



Combinatoire des tresses et des structures de Garside

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme, Université de Caen

- Quelques questions de combinatoire des tresses :
intérêt de la structure de Garside, et extensions possibles

- Plan :

1. Combinatoire des tresses : générateurs d'Artin
2. Combinatoire des tresses : générateurs de Garside
3. D'autres structures de Garside
4. Une application bizarre

- Pour $n \geq 2$, le groupe B_n est infini, donc considérer des sous-ensembles **finis**.
- $B_n^+ :=$ monoïde des classes de diagrammes de tresse à n brins **positifs**
 tous les croisements dans le sens positif

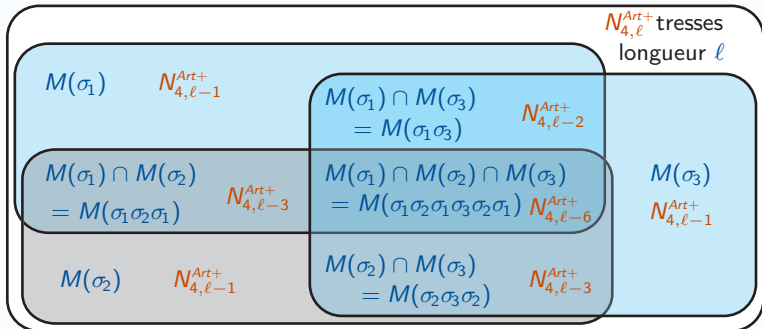
• **Théorème** (Garside, 1967).— Comme monoïde, B_n^+ admet la présentation... ; il est simplifiable, et admet des ppcm et des pgcd.

• Donc : Deux mots de tresse positifs équivalents ont la même longueur, et une tresse positive β a une **longueur** bien définie $\|\beta\|^{\text{Art}}$ en les générateurs d'Artin σ_i .

• **Question**.— Déterminer $N_{n,\ell}^{\text{Art}+} := \#\{\beta \in B_n^+ \mid \|\beta\|^{\text{Art}} = \ell\}$
 et/ou la série génératrice associée.

• **Théorème** (Deligne, 1972).— Pour chaque n , la série génératrice des $N_{n,\ell}^{\text{Art}+}$ est rationnelle.

- Existence d'une récurrence $N_{n,\ell}^{Art+} = c_1 N_{n,\ell-1}^{Art+} + \dots + c_K N_{n,\ell-K}^{Art+}$.
- Pour β dans B_n^+ : $M(\beta) :=$ les multiples de β (à droite) $= \{\beta\gamma \mid \gamma \in B_n^+\}$.
- Principe 1 : une tresse $\neq 1$ est multiple d'au moins un σ_i ;
- Principe 2 : une tresse multiple de σ_i et de σ_j est multiple du ppcm de σ_i et σ_j .



• Donc $N_{4,\ell}^{Art+} = 3N_{4,\ell-1}^{Art+} - N_{4,\ell-2}^{Art+} - 2N_{4,\ell-3}^{Art+} + N_{4,\ell-6}^{Art+}$, $\rightsquigarrow \frac{1}{1-3t+t^2+2t^3-t^6}$.



- Donc : pour chaque n , la série génératrice des $N_{n,\ell}^{Art+}$ est l'inverse d'un polynôme $P_n(t)$.

- **Proposition** (Bronfman, 2001).— Partant de $P_0(t) = P_1(t) = 1$, on a

$$P_n(t) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} t^{\frac{i(i-1)}{2}} P_{n-i}(t).$$

- Exemples :

- $P_2(t) = 1 - t$,
- $P_3(t) = 1 - 2t + t^3$,
- $P_4(t) = 1 - 3t + t^2 + 2t^3 - t^6$, etc.

- Même question pour B_n au lieu de B_n^+ ; problème : longueur non unique, par ex. le mot vide (longueur 0) et $\sigma_1\sigma_1^{-1}$ (longueur 2) représentent la même tresse
 \rightsquigarrow définir $\|\beta\|^{Art}$ comme le **minimum** des longueurs des mots représentant β .

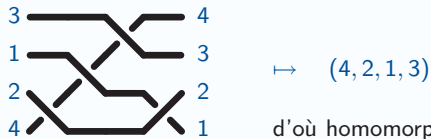
- **Question.**— Déterminer $N_{n,\ell}^{Art} := \#\{\beta \in B_n \mid \|\beta\|^{Art} = \ell\}$
 et/ou déterminer la série génératrice associée.

- **Proposition** (Mairesse–Matheus, 2005).— La série génératrice des nombres $N_{3,\ell}^{Art}$ est $1 + \frac{2t(2 - 2t - t^2)}{(1 - t)(1 - 2t)(1 - t - t^2)}$.

- Ouvert, même $N_{4,\ell}^{Art}$: (Mairesse) pas de dénominateur de degré ≤ 13 ...
- "Explication" : les générateurs d'Artin ne sont pas les **bons** générateurs...
 \rightsquigarrow changer de générateurs

1. Combinatoire des tresses : générateurs d'Artin
2. Combinatoire des tresses : générateurs de Garside
3. D'autres structures de Garside
4. Une application bizarre

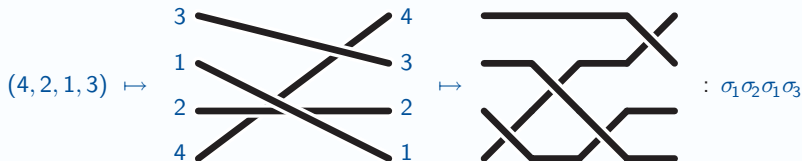
- **Permutation** associée à une tresse :



d'où homomorphisme surjectif $\pi : B_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$

- **Définition.**— Une tresse est **simple** si elle peut être représentée par un diagramme positif où deux brins quelconques se coupent au plus une fois.

- **Lemme.**— Pour tout f dans \mathfrak{S}_n , il existe **une** tresse simple σ_f vérifiant $\pi(\sigma_f)=f$.



- Remarque : $\sigma_i = \sigma_{(i,i+1)}$, donc les σ_f engendrent B_n : "générateurs de Garside"

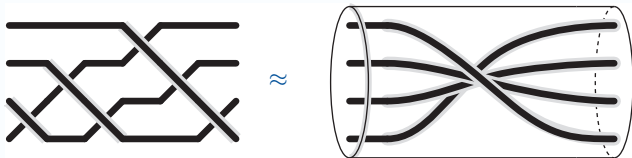
• **Proposition.**— En termes des générateurs de Garside, le groupe B_n (et le monoïde B_n^+) sont présentés par les relations $\sigma_f \sigma_g = \sigma_{fg}$ avec $\ell(f) + \ell(g) = \ell(fg)$.

↑
inversions de f

- **Question.**— Déterminer $N_{n,\ell}^{Gar+} := \#\{\beta \in B_n^+ \mid \|\beta\|^{Gar} = \ell\}$
et/ou déterminer la série génératrice.

- La famille des générateurs σ_f est très redondante
 - ↪ en général beaucoup d'expressions équivalentes pour une tresse
 - ↪ mais existence d'une expression distinguée : "forme normale"

- La tresse **fondamentale** : $\Delta_n := \sigma_{(n, \dots, 1)}$; $\Delta_1 = 1$, $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1$.



- Notation : $\alpha \preceq \beta$, " α **divise** (à gauche) β s'il existe γ positive t.q. $\alpha\gamma = \beta$
(alias : β multiple de α)

- **Proposition** (Garside 1967).— (B_n^+, \preceq) est un treillis : deux tresses positives admettent un pgcd et un ppcm.

- Forme normale d'une tresse positive :
 - Si $\beta = 1$, alors on pose $\text{NF}(\beta) := \varepsilon$ (mot vide) ;
 - Sinon, $\beta_1 := \text{pgcd}(\beta, \Delta_n)$, plus grande tresse simple divisant β ; il existe β' t.q. $\beta = \beta_1 \beta'$, on recommence avec β' et on pose $\text{NF}(\beta) = (\beta_1)^{\frown} \text{NF}(\beta')$.

• **Proposition** (ElRifai-Morton, Thurston, Adyan, ...1980's) Toute tresse positive admet une unique décomposition $(\beta_1, \dots, \beta_\ell)$ t.q. β_k est la plus grande tresse simple divisant $\beta_k \dots \beta_\ell$ pour tout k .

↪ la forme normale "greedy"

- Démonstration : $\beta \neq 1 \Rightarrow \text{pgcd}(\beta, \Delta_n) \neq 1$, d'où $\|\beta'\| < \|\beta\|$, et converge. \square
- Forme normale d'une tresse quelconque :

• **Proposition** (Garside, 1967) Toute tresse de B_n admet une unique expression $\beta_1^{-1} \beta_2$ avec β_1, β_2 dans B_n^+ vérifiant $\text{pgcd}(\beta_1, \beta_2) = 1$.

↪ la forme normale symétrique "greedy"

- Par l'existence de la forme normale

$N_{n,\ell}^{Gar+}$ ($= \#\{\beta \in B_n^+ \mid \|\beta\|^{Gar} = \ell\}$) = # de suites normales (s_1, \dots, s_ℓ) dans B_n^+ ;

- (Contrairement aux générateurs d'Artin), question facile
car la normalité est une propriété locale :

- **Lemme.**— Une suite de tresses simples (s_1, \dots, s_ℓ) est normale ssi chaque sous-suite de longueur 2 l'est.

- **Proposition.**— Soit M_n la matrice $n! \times n!$ indexée par les tresses simples (i.e., les permutations) t.q. $(M_n)_{s,t} = \begin{cases} 1 & \text{si } (s, t) \text{ est normal,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Alors $N_{n,\ell}^{Gar+}(s)$ est la première valeur dans $(1, \dots, 1) \cdot M_n^\ell$.

\rightsquigarrow Pour chaque n , la série génératrice des $N_{n,\ell}^{Gar+}$ est rationnelle.

- Exemples:

$$M_1 = (1), \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

- D'où: $N_{3,\ell}^{\text{Gar}+} = 8 \cdot 2^\ell - 3\ell - 7$, etc.

- Cas des tresses quelconques : local et géodésique

• **Lemme.**— Si (s_1, \dots, s_p) et (t_1, \dots, t_q) sont des suites normales, alors $\text{pgcd}(s_1 \dots s_p, t_1 \dots t_q) = 1$ si et seulement si $\text{pgcd}(s_1, t_1) = 1$; la forme normale symétrique est géodésique.

• **Proposition.**— $N_{n,\ell}^{\mathcal{G}} = \sum_{p+q=\ell} \#\{(\vec{s}, \vec{t}) \mid \vec{s}, \vec{t} \text{ normales lg } p, q \text{ et } \text{pgcd}(s_1, t_1) = 1\}$.

- La "vraie" application (Cannon, Thurston).— La forme normale définit une structure de groupe automatique sur B_n .

- Retour à B_n^+ ; rappel : tresse simple dans $B_n^+ \approx$ permutation de $\{1, \dots, n\}$

- **Lemme.**— (σ_f, σ_g) normal ssi $D(f) \supseteq D(g^{-1})$.

\uparrow
 descentes de $f := \{k \mid f(k) > f(k+1)\}$

- Donc : $(M_n)_{f,g} = 1$ iff $D(f) \supseteq D(g^{-1})$.
 \rightsquigarrow Si $D(g^{-1}) = D(g'^{-1})$, les colonnes de g et g' dans M_n sont égales
 \rightsquigarrow On peut regrouper les colonnes : réduit la taille de $n!$ à 2^{n-1} :

- **Proposition.**— Soit $(M'_n)_{I,J} := \#$ de f dans \mathfrak{S}_n t.q. $D(f) = I$ et $D(f^{-1}) \supseteq J$. Alors $N_{n,\ell}^{Gar+}$ est la première valeur dans $(1, \dots, 1) \cdot M'_n{}^\ell$.

- Exemple: $M'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (\rightsquigarrow taille 4 au lieu de 6)

- **Lemme.**— Le $\#$ de permutations f vérifiant $D(f) \supseteq I$ et $D(f^{-1}) \supseteq J$ est le $\#$ de $k \times \ell$ matrices à coefficients dans \mathbb{N} t.q. la somme de la i ème ligne est p_i et la somme de la j ème colonne est q_j , où (p_1, \dots, p_k) est la **composition** de I et (q_1, \dots, q_ℓ) est celle de J .

↑
suite formée par les tailles des blocs d'éléments adjacents

ensemble formé par les tailles des blocs d'éléments adjacents

↓
 $\rightsquigarrow (M'_n)_{I,J}$ ne dépend que de la **partition** de J \rightsquigarrow re-regrouper les colonnes :

- **Prop.**— Soit M''_n la matrice $p(n) \times p(n)$ t.q. $(M''_n)_{\lambda,\mu} := \sum_{\text{part}(I)=\lambda} (M'_n)_{I,\mu}$. Alors $N_{n,\ell}^{\text{Gar}+}$ est le premier terme de $(1, \dots, 1) \cdot M''_n{}^\ell$.

- Aller de M_n à $M''_n \approx$ réduire la taille de la structure automatique de B_n
de $n!$ à $p(n)$ ($\sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2n/3}}$)

- (**Hohlweg**) Le fait que $(M'_n)_{I,J}$ ne dépend que de la partition de J est une (autre) forme du résultat de **Solomon** sur l'algèbre des descentes.

- Quand n croît, $N_{n,\ell}^{Gar+}$ lié aux valeurs propres de M_n , donc de M_n'' :

$$M_3'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 1, 1, 2 ; \quad M_4'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 1, 1, 2, 3 \pm \sqrt{6}.$$

- Comparer les polynômes caractéristiques :

$$\begin{aligned} \text{CharPol}(M_1'') &= x - 1 \\ \text{CharPol}(M_2'') &= \text{CharPol}(M_1'') \cdot (x - 1) \\ \text{CharPol}(M_3'') &= \text{CharPol}(M_2'') \cdot (x - 2) \\ \text{CharPol}(M_4'') &= \text{CharPol}(M_3'') \cdot (x^2 - 6x + 3) \\ \text{CharPol}(M_5'') &= \text{CharPol}(M_4'') \cdot (x^2 - 20x + 24) \\ \text{CharPol}(M_6'') &= \text{CharPol}(M_5'') \cdot (x^4 - 82x^3 + 359x^2 - 260x + 60) \dots \end{aligned}$$

- **Proposition** (Hivert–Novelli–Thibon).—

Le polynôme caractéristique de M_n'' divise celui de M_{n+1}'' .

- **Démonstration.**— Interpréter M_n'' en termes de fonctions quasi-symétriques au sens de Malvenuto–Reutenauer, et déterminer la décomposition LU. □

- Quelques expériences supplémentaires :

n	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda_{\max}(M_n)$	1	2	5.5	18.7	77.4	373.9	2066.6
$\frac{\lambda_{\max}(M_n)}{n \cdot \lambda_{\max}(M_{n-1})}$	0.5	0.667	0.681	0.687	0.689	0.690	0.691

- **Question.**— Quel est le comportement asymptotique de $\lambda_{\max}(M_n)$?

- **Conclusion.**— La **combinatoire des tresses** par rapport aux générateurs de Garside mène à des questions nouvelles et intéressantes sur la **combinatoire des permutations**.

- Jusqu'à présent, on a étudié $N_{n,\ell}^{Gar+}$ à n fixé ; pour ℓ fixé, récurrences (très) diverses ; d'abord $N_{n,1}^{Gar+} = n!$

- **Proposition.** — $N_{n,2}^{Gar+} = \sum_0^{n-1} (-1)^{n+i+1} \binom{n}{i}^2 N_{i,2}^{Gar+}$,

d'où (Carlitz–Scoville–Vaughan) $1 + \sum_n N_{n,2}^{Gar+} \frac{z^n}{(n!)^2} = \frac{1}{J_0(\sqrt{z})}$.

J_0 fonction de Bessel

- Ensuite, en posant $N_{n,\ell}^{Gar+}(s) = \#$ de suites normales $(s_1, \dots, s_{\ell-1}, s)$ dans B_n^+ ,
 $N_{n,3}^{Gar+}(\Delta_{n-1}) = 2^{n-1}$, $N_{n,3}^{Gar+}(\Delta_{n-2}) = 2 \cdot 3^n - (n+6) \cdot 2^{n-1} + 1$, ...
- Puis $N_{n,4}^{Gar+}(\Delta_{n-1}) = nN_{n-1,4}^{Gar+}(\Delta_{n-1}) + 2n - 1$, d'où $N_{n,4}^{Gar+}(\Delta_{n-1}) = \lfloor n!e \rfloor - 1$...

1. Combinatoire des tresses : générateurs d'Artin
2. Combinatoire des tresses : générateurs de Garside
3. D'autres structures de Garside
4. Une application bizarre

- A ce point : riche combinatoire des tresses, liée au choix d'une **bonne** famille de générateurs, en l'occurrence les générateurs de Garside

↪ A-t-on des propriétés analogues pour d'autres groupes ?

• **Définition** (D.–Paris, 1999).— Un monoïde M est dit **de Garside** relativement à un élément Δ si M est simplifiable, possède une présentation homogène (relations préservant la longueur), admet des pgcd et ppcm, et Δ est tel que ses diviseurs à gauche et à droite coïncident, sont en nombre fini, et engendrent M .

Un **groupe de Garside** est un groupe de fractions d'un monoïde de Garside.

• **Proposition**.— Si M est un monoïde de Garside relativement à Δ , tout élément de M a une unique décomposition (s_1, \dots, s_ℓ) avec s_1, \dots, s_ℓ simples (= divisant Δ) et t.q. s_k est diviseur simple maximal de $s_k \dots s_\ell$ pour tout k .

- Pour chaque monoïde de Garside : une structure (bi)-automatique sur le groupe, et une matrice d'adjacence pour la combinatoire de la forme normale.

- Exemple numéro 0 : B_n^+ est monoïde de Garside relativement à Δ_n
- D'autres générateurs de B_n :

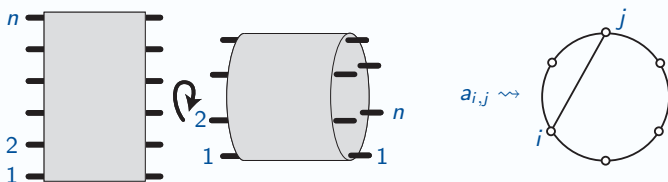
$$a_{i,j} = \sigma_{j-1} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-1}^{-1} \text{ pour } 1 \leq i < j \leq n.$$



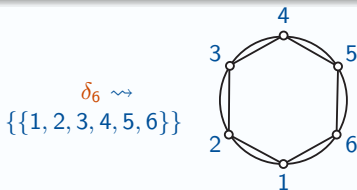
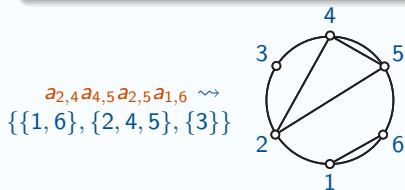
- Monoïde de tresses **dual** : le sous-monoïde B_n^{+*} de B_n engendré par les $a_{i,j}$.

• **Proposition** (Birman–Ko–Lee, 1997).— Le monoïde B_n^{+*} est un monoïde de Garside relativement à $\delta_n = \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1$.

- Représentation "cylindrique" des générateurs $a_{i,j}$:



- **Proposition.** — Les diviseurs de δ_n dans B_n^{+*} sont en bijection avec les $Cat(n)$ partitions non croisées de $\{1, \dots, n\}$.



\rightsquigarrow Calculer $N_{n,\ell}^{BKL+}$, étudier les matrices d'adjacence, les valeurs propres, etc.

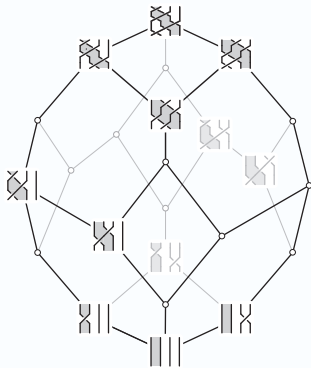
- Il existe bien d'autres groupes de Garside, avec chacun leur combinatoire, par exemple, tous les groupes de la forme $\langle a, b, c, \dots \mid a^p = b^q = c^r = \dots \rangle$.
- Mais surtout : le **mécanisme** de la forme normale "greedy" fonctionne au-delà des groupes et monoïdes de Garside.

• **Définition.**— Une sous-famille \mathcal{S} d'une catégorie \mathcal{C} (simplifiable à gauche) est une **famille de Garside** si tout élément de \mathcal{C} a une décomposition \mathcal{S} -normale, où un chemin (s_1, \dots, s_ℓ) est déclaré **\mathcal{S} -normal** si s_1, \dots, s_ℓ sont dans \mathcal{S} et

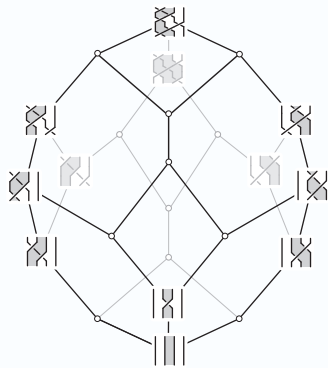
$$\forall k \forall s \in \mathcal{S} \forall f \in \mathcal{C} (s \preccurlyeq fs_k s_{k+1} \Rightarrow s \preccurlyeq fs_k).$$

- Exemple numéro 0 : si M est un monoïde de Garside relativement à Δ , alors $\text{Div}(\Delta)$ est une famille de Garside dans M .

- Exemple de famille de Garside dans une catégorie qui n'est pas un monoïde :
les tresses simples dans la catégorie des rubans de B_4



tresses simples avec un (1,2)-ruban



tresses simples avec un (2,3)-ruban

- Question.**— Pourquoi 12 éléments ? Pourquoi des treillis isomorphes ?

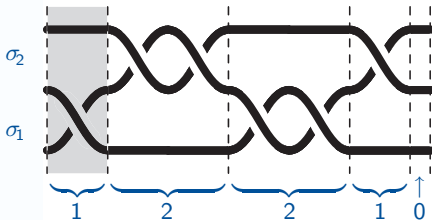
1. Combinatoire des tresses : générateurs d'Artin
2. Combinatoire des tresses : générateurs de Garside
3. D'autres structures de Garside
4. Une application bizarre

- But : construire de (très) longues suites finies de tresses dans B_3^+ par une récurrence simple (cf. suites de Goodstein et bataille contre l'Hydre).

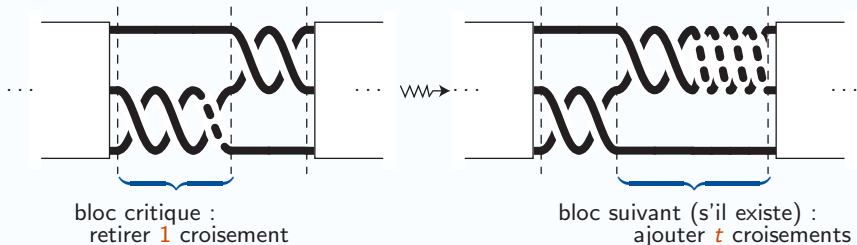
- **Lemme (Burckel).**— Toute tresse de B_3^+ admet une unique expression $\sigma_{[p]}^{e_p} \dots \sigma_2^{e_2} \sigma_1^{e_1}$ avec $e_p \geq 1$, $e_{p-1} \geq 2$, ..., $e_3 \geq 2$, $e_2 \geq 1$, $e_1 \geq 0$.

↑
1 ou 2 suivant la parité de p

- Position **critique** : plus petit k (= le bloc le plus à droite) t.q. e_k n'a pas la valeur légale minimale, s'il existe, et p sinon.



- **Définition.**— Partant de β_0 dans B_3^+ , et tant que $\beta_t \neq 1$, définir β_{t+1} :
 - retirer un croisement dans le bloc critique de β_t ;
 - si le bloc critique n'est pas le dernier bloc, ajouter t nouveaux croisements dans le bloc suivant le bloc critique.



- Exemples :
 - $\sigma_2^2 \sigma_1^2, \sigma_2^2 \sigma_1, \sigma_2^2, \sigma_2 \sigma_1^3, \sigma_2 \sigma_1^2, \sigma_2 \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1^7, \sigma_1^6, \sigma_1^5, \sigma_1^4, \sigma_1^3, \sigma_1^2, \sigma_1, 1$;
 - $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1, \dots, 1$ (30 étapes) ;
 - $\sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_1^2, \dots, 1$ (90 159 953 477 630 étapes).

• **Proposition 1.**— Pour toute β_0 dans B_3^+ (resp. B_∞^+), la suite $(\beta_t)_{t \geq 0}$ est finie.

• **Démonstration.**— Il existe un bon ordre sur B_∞^+ telle que la suite $(\beta_t)_{t \geq 0}$ est strictement décroissante. \square

le sous-système de l'arithmétique de Peano avec induction restreinte aux formules avec un quantificateur \exists (resp. $\exists\forall$) non borné



• **Théorème.**— La proposition 1 n'est **pas** prouvable dans le système $I\Sigma_1$ (resp. $I\Sigma_2$).

• **Démonstration.**— On a $T(\sigma_{[p]} \sigma_{[p-1]}^2 \dots \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_1^p) \geq Ack(p)$. Or $I\Sigma_1$ ne prouve pas l'existence de la fonction d'Ackermann. Donc il ne peut prouver la finitude des suites $(\beta_t)_{t \geq 0}$. Idem pour B_∞^+ avec fonction de Hardy H_{ω^ω} . \square

par contraste avec le résultat informel :

• Toutes les propriétés (algébriques) usuelles des tresses sont prouvables dans $I\Sigma_1$.

- Jusqu'à présent, suites particulières de tresses positives ; maintenant, suites **quelconques**, mais toujours strictement décroissantes pour le bon ordre.
- Fait : Pour tout ℓ , il existe m t.q. toute suite $(\beta_t)_{t \geq 0}$ strictement décroissante dans B_3^+ et satisfaisant $\|\beta\|^{Gar} \leq \ell$ pour tout t a une longueur au plus m .
(évident : $\#$ fini de tresses satisfaisant $\|\beta\|^{Gar} \leq \ell$)

• **Definition.**— Pour $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, soit WO_f le principe :
" Pour tout ℓ , il existe m t.q. toute suite $(\beta_t)_{t \geq 0}$ strictement décroissante dans B_3^+ et satisfaisant $\|\beta\|^{Gar} \leq \ell + f(t)$ pour tout t a une longueur au plus m ".

- Le fait dit que $WO_{constant}$ est vrai.

• **Proposition.**— Pour toute fonction f , le principe WO_f est vrai.

Démonstration : Construire un arbre de suites finies ordonné par inclusion ; cet arbre est à branchement fini car $\#$ fini de tresses de longueur donnée ; si m n'existait pas, l'arbre aurait une branche infinie, contredisant le bon ordre. \square

- $WO_{\text{constante}}$ est prouvable dans $I\Sigma_1$ (argument de comptage valide);
- $WO_{\text{carré}}$ n'est pas prouvable dans $I\Sigma_1$ (analyse des suites "hydres").

• **Question.**— Où est la transition $I\Sigma_1$ -prouvable / $I\Sigma_1$ -improuvable ?

- **Notation.**— Ack_ω fonction d'Ackermann ; Ack_r pour le r -ième niveau de la hiérarchie d'Ackermann ; Ack_r^{-1} pour l'inverse fonctionnel de Ack_r :

$Ack_r^{-1}(n) = p$ ssi $Ack_r(p) \leq n < Ack_r(p+1)$ (croissant très lentement)

- **Théorème.**— Pour $r \leq \omega$, soit $f_r(x) := \lfloor Ack_r^{-1}(\sqrt{x}) \rfloor$. Alors WO_{f_r} est prouvable à partir de $I\Sigma_1$ pour r fini, et non prouvable à partir de $I\Sigma_1$ pour $r = \omega$.

- **Démonstration.**— Evaluer $\#\{\beta \in B_3^+ \mid \|\beta\|^{Gar} \leq \ell \ \& \ \beta < \Delta_3^k\}$:

exactement ce qu'on a fait plus haut... □

- Dès qu'il y a une [famille de Garside finie](#), il y a un automate fini, donc une matrice d'adjacence, etc. et toute une combinatoire.
- Celle-ci a des chances d'être intéressante quand la famille de Garside est reliée à des objets eux-mêmes intéressants : permutations (monoïdes de tresses), partitions non croisées (monoïdes de tresses deux), etc.
- La famille des catégories possédant une famille de Garside (finie) intéressante est ([apparemment](#)) vaste et mal connue ; exemple ([Bessis, 2006](#)) : les groupes libres sont des groupes de Garside.
- Tout ce qu'on a dit pour les tresses s'étend aux groupes d'Artin de type sphérique (i.e., associés à un groupe de Coxeter fini).
- Il existe des structures de Garside exotiques sur les groupes de tresses et, au-delà, des formes normales non basées sur une structure de Garside :
(très) nombreux problèmes de dénombrement potentiels.

- [J. Mairesse & F. Matheus](#), Growth series for Artin groups of dihedral type
Internat. J. Algebra Comput. 16 (2006) 1087–1107
- [P. Dehornoy](#), Combinatorics of normal sequences of braids,
J. Combinatorial Th. Series A, 114 (2007) 389–409.
- [F. Hivert](#), [J.-C. Novelli](#), [J.-Y. Thibon](#), Sur une conjecture de Dehornoy
Comptes Rendus Math. 346 (2008) 375–378.
- [P. Dehornoy & L. Paris](#), Gaussian groups and Garside groups, two
generalizations of Artin groups; Proc. London Math. Soc., 79 (1999) 569–604.
- [P. Dehornoy](#), [E. Godelle](#), [F. Digne](#), & [J. Michel](#), Garside calculus,
www.math.unicaen.fr/~garside/
- [L. Carlucci](#), [P. Dehornoy](#), [A. Weiermann](#), Unprovability statements involving
braids; Proc. London Math. Soc., 102 (2011) 159–192.
- [D. Bessis](#), A dual braid monoid for the free group,
Journal of Algebra 302 (2006) 55–69.