Enumération des cartes planaires irréductibles par découpage géodésique

Emmanuel Guitter

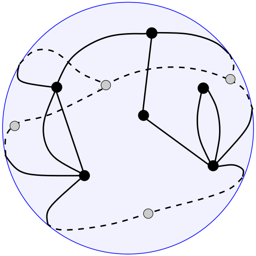
IPhT, CEA Saclay

6 juin 2013

travail en commun avec J. Bouttier

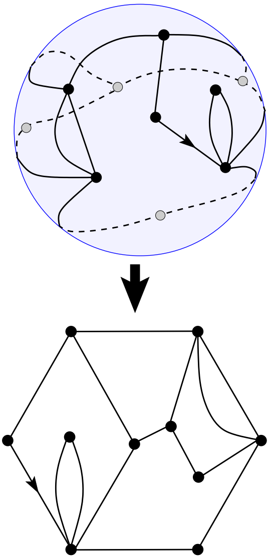
Cartes planaires biparties

- carte planaire



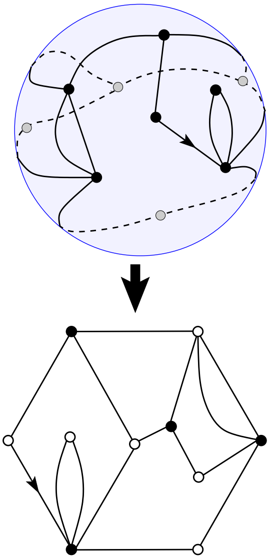
Cartes planaires biparties

- carte planaire
- enracinée
  (représentation canonique
  dans le plan)



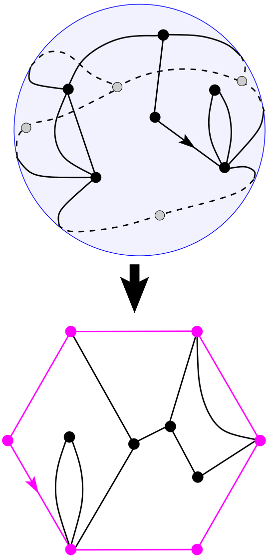
Cartes planaires biparties

- carte planaire
- enracinée
  (représentation canonique
  dans le plan)
- bipartie
  (toutes les faces ont degré pair)



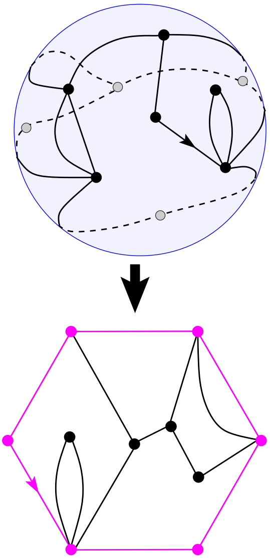
Cartes planaires biparties

- carte planaire
- enracinée
  (représentation canonique
  dans le plan)
- bipartie
  (toutes les faces ont degré pair)
- à bord de degré $2j$
  (la face externe a degré $2j$)
  ici $2j = 6$



Cartes planaires biparties

- carte planaire
- enracinée
  (représentation canonique
  dans le plan)
- bipartie
  (toutes les faces ont degré pair)
- à bord de degré $2j$
  (la face externe a degré $2j$)



Fonction génératrice

poids x_{2k} par face interne de degré $2k$

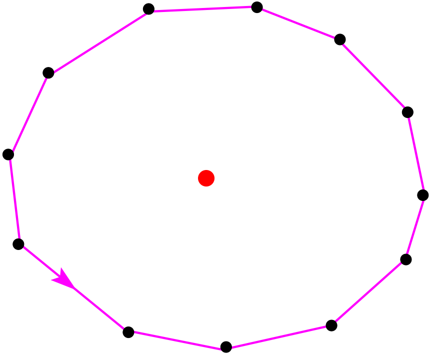
$$\rightarrow \quad F_{2j}(x_2, x_4, \ldots) = \sum_{cartes\ \mathcal{M}} w(\mathcal{M})$$

$$w(\mathcal{M}) = \prod_{faces\ F} x_{degré(F)}$$

Enumération par découpage géodésique

le cas avec pointage: découpage

carte à bord pointée
(avec un sommet marqué)

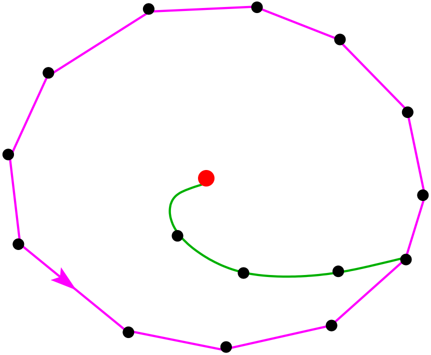


Enumération par découpage géodésique

le cas avec pointage: découpage

carte à bord pointée
(avec un sommet marqué)

on trace la géodésique
(plus court chemin)
la plus à gauche
d'un sommet du bord vers
le sommet marqué



Enumération par découpage géodésique

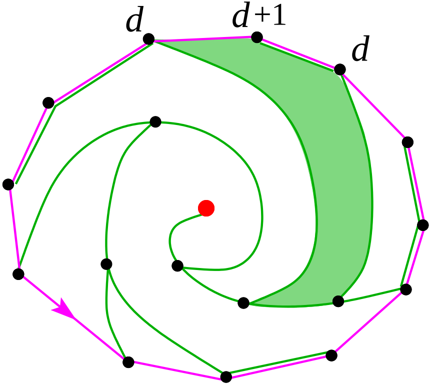
le cas avec pointage: découpage

carte à bord pointée
(avec un sommet marqué)

on trace la géodésique
(plus court chemin)
la plus à gauche
d'un sommet du bord vers
le sommet marqué

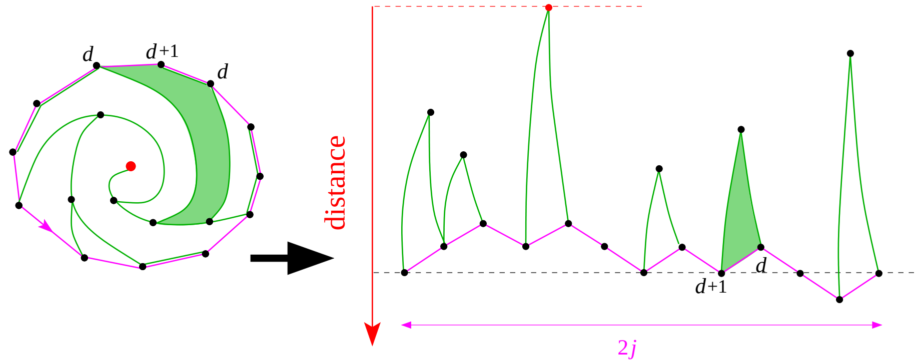
on fait la même chose pour
tous les sommets du bord

$d \to d+1$ on suit le bord
$d+1 \to d$ nouveau domaine
= "slice"



Enumération par découpage géodésique

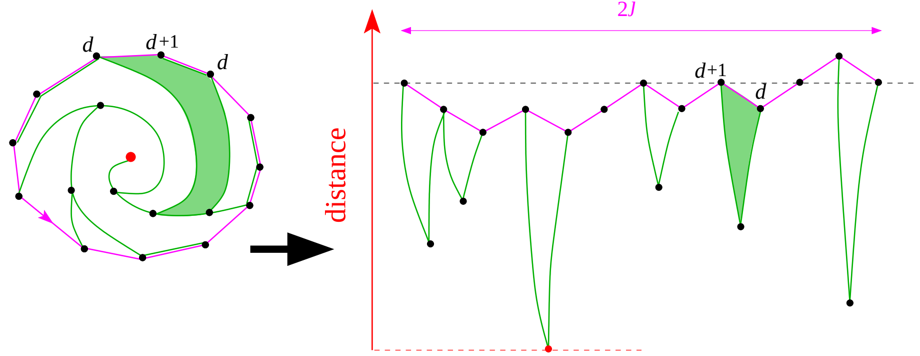
le cas avec pointage: découpage



chemin de longueur $2j$ fait de pas ± 1 en hauteur, de dénivelée 0, chaque "descente" $d + 1 \to d$ étant munie d'une slice

Enumération par découpage géodésique

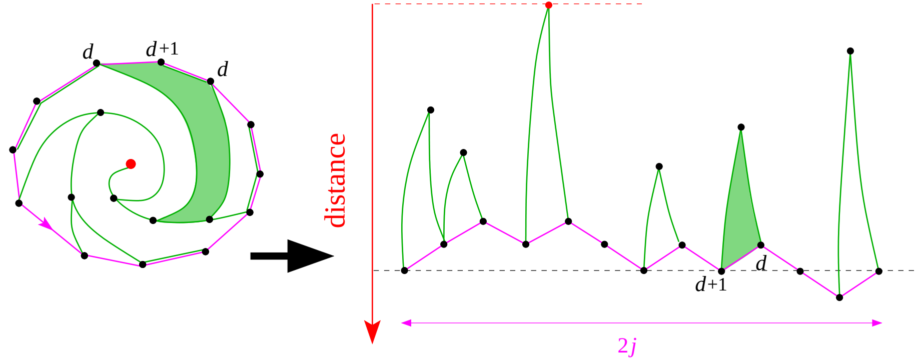
le cas avec pointage: découpage



chemin de longueur $2j$ fait de pas ± 1 en hauteur, de dénivelée 0, chaque "descente" $d+1 \to d$ étant munie d'une slice

Enumération par découpage géodésique

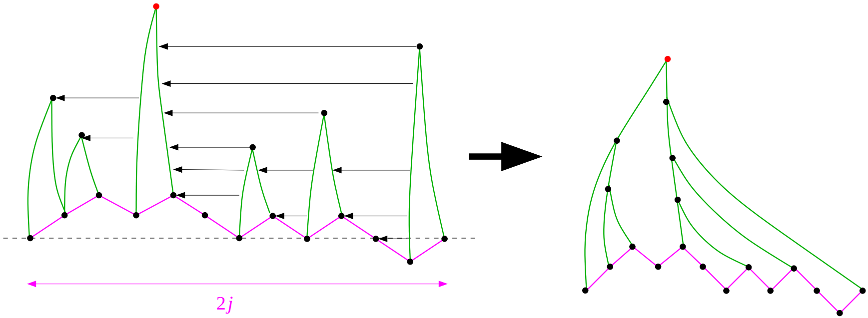
le cas avec pointage: découpage



chemin de longueur $2j$ fait de pas ± 1 en hauteur, de dénivelée 0, chaque "descente" $d+1 \to d$ étant munie d'une slice

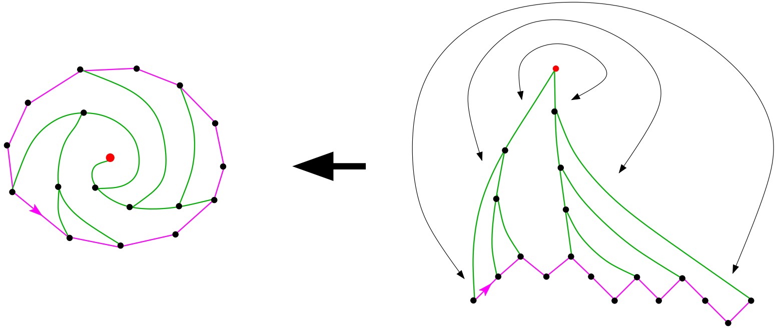
Enumération par découpage géodésique

le cas avec pointage: recollement



Enumération par découpage géodésique

le cas avec pointage: recollement



Enumération par découpage géodésique

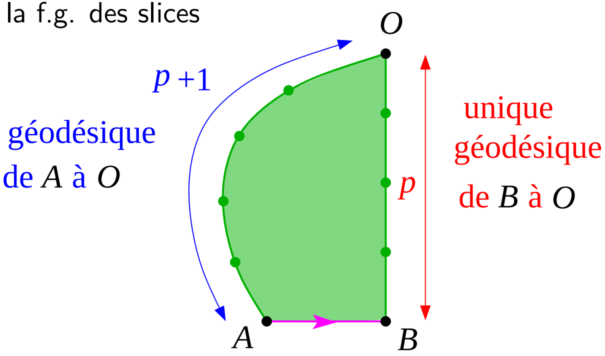
le cas avec pointage: fonction génératrice

si $Z_k(2j;R)$ désigne la f.g. des chemins de longueur $2j$ faits de pas ± 1 en hauteur, de dénivelée k, chaque descente étant pondérée par R , alors

F.g. des cartes bord pointées

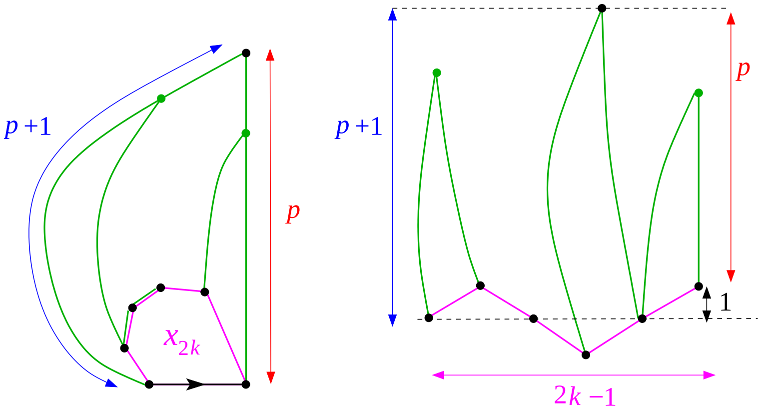
$$F^{\bullet}_{2j} = Z_0(2j;R) \; = \binom{2j}{j} R^j$$

où $R = R(x_2, x_4, \dots)$ est la f.g. des slices



Enumération par découpage géodésique

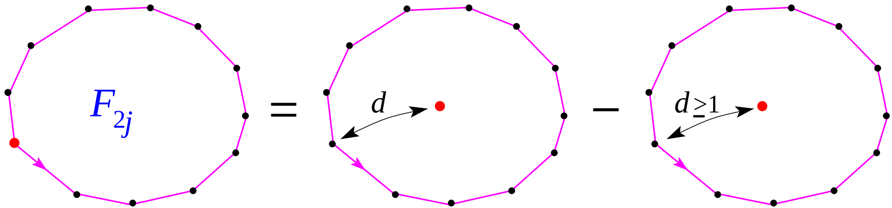
le cas avec pointage: fonction génératrice



$$R = 1 + \sum_{k\geq 1} x_{2k} Z_{-1}(2k-1; R) = 1 + \sum_{k\geq 1} x_{2k} \binom{2k-1}{k} R^k$$

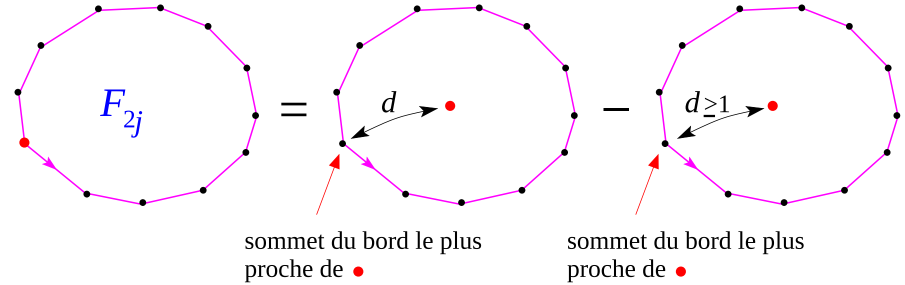
Enumération par découpage géodésique

le cas sans pointage



Enumération par découpage géodésique

le cas sans pointage

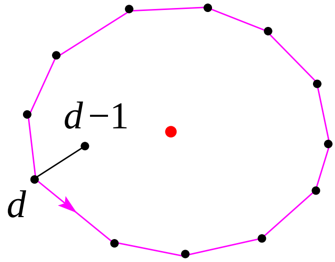


$$F_{2j} = Z_0^+(2j; R) - \cdots$$

où $Z_k^+(2j; R)$ désigne la f.g. des chemins de longueur $2j$ faits de pas ± 1 en hauteur, de dénivelée k, chaque descente étant pondérée par R, et restant toujours au dessus du point de départ

Enumération par découpage géodésique

le cas sans pointage

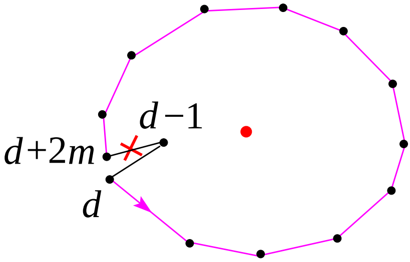


$$F_{2j} = Z_0^+(2j; R) - \cdots$$

où $Z_k^+(2j; R)$ désigne la f.g. des chemins de longueur $2j$ faits de pas ± 1 en hauteur, de dénivelée k, chaque descente étant pondérée par R, et restant toujours au dessus du point de départ

Enumération par découpage géodésique

le cas sans pointage

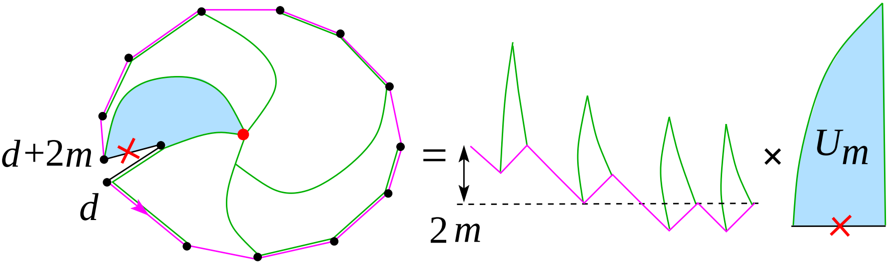


$$F_{2j} = Z_0^+(2j;R) - \cdots$$

où $Z_k^+(2j;R)$ désigne la f.g. des chemins de longueur $2j$ faits de pas ± 1 en hauteur, de dénivelée k, chaque descente étant pondérée par R, et restant toujours au dessus du point de départ

Enumération par découpage géodésique

le cas sans pointage



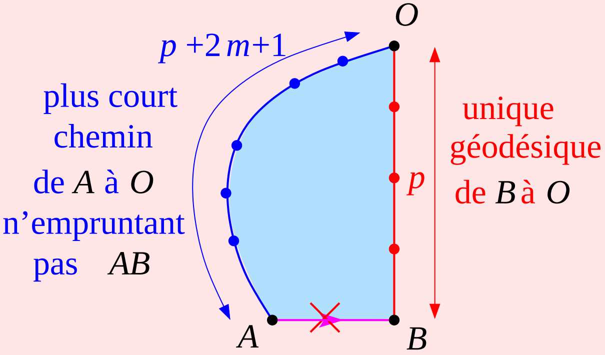
$$F_{2j} = Z_0^+(2j;R) - \sum_{m\geq 1} Z_{2m}^+(2j;R)U_m$$

où $Z_k^+(2j;R)$ désigne la f.g. des chemins de longueur $2j$ faits de pas ± 1 en hauteur, de dénivelée k, chaque descente étant pondérée par R, et restant toujours au dessus du point de départ

Enumération par découpage géodésique

le cas sans pointage

U_m est la f.g. de m-slices



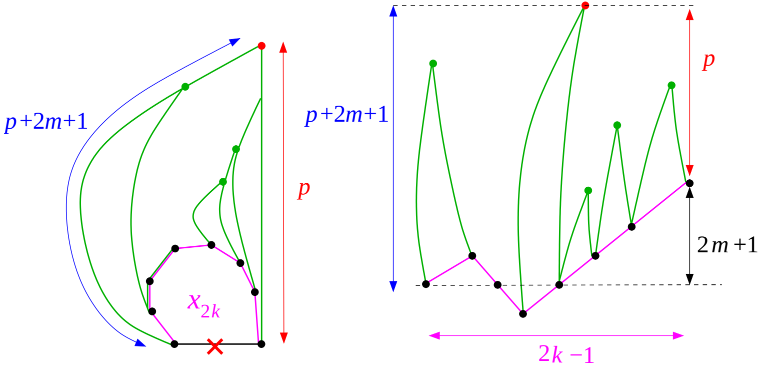
NB: pour $m = 0$, on retrouve les slices énumérées par R

$$R = 1 + U_0$$

Enumération par découpage géodésique

le cas sans pointage

décomposition des m-slices



$$U_m = \sum_{k \geq m+1} x_{2k} Z_{-2m-1}(2k-1; R)$$

Enumération par découpage géodésique

le cas sans pointage

F.g. des cartes à bord

$$F_{2j} = Z_0^+(2j;R) - \sum_{m\geq 1} Z_{2m}^+(2j;R)U_m$$

$$U_m = \sum_{k\geq m+1} x_{2k} Z_{-2m-1}(2k-1;R), \qquad R = 1 + U_0$$

$$F_{2j} = \frac{\binom{2j}{j}}{j+1}R^j - \sum_{m\geq 1}(2m+1)\frac{\binom{2j}{j+m}}{j+m+1}R^{j-m}U_m$$

$$U_m = \sum_{k\geq m+1} x_{2k}\binom{2k-1}{k+m}R^{k+m}, \qquad R = 1 + U_0$$

Exemple

quadrangulations

$$x_{2j} = \delta_{j,2}\, x_4$$

$$U_0 = 3x_4 R^2, \qquad U_1 = x_4 R^3, \qquad U_m = 0 \text{ pour } m \geq 2$$

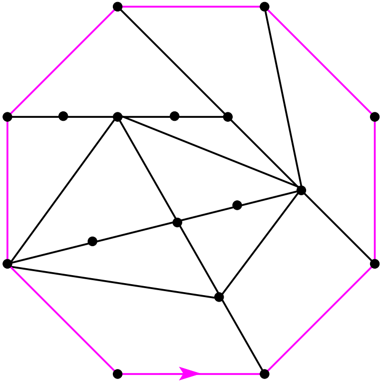
$$R = 1 + 3x_4 R^2 \quad \rightarrow \quad R = \frac{1-\sqrt{1-12x_4}}{6x_4}$$

$$F_{2j} = \frac{\binom{2j}{j}}{j+1} R^j - 3x_4 \frac{\binom{2j}{j+1}}{j+2} R^{j+2}$$

Cartes biparties irréductibles

définition

on définit la maille d'une carte comme la longueur de son plus petit cycle (chemin fermé simple)



carte de maille 4

NB: la maille d'une carte bipartie est paire

Cartes biparties irréductibles

définition

soit d un entier pair, une carte bipartie à bord est dite d-irréductible si

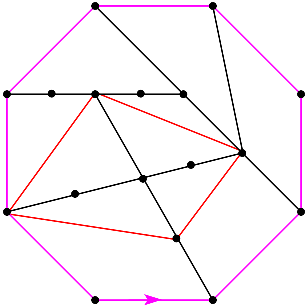
- elle a maille $\geq d$
  (en particulier toutes ses faces internes ont degré $\geq d$)

Cartes biparties irréductibles

définition

soit d un entier pair, une carte bipartie à bord est dite d-irréductible si

- elle a maille $\geq d$
  (en particulier toutes ses faces internes ont degré $\geq d$)
- tous ses cycles de longueur d sont des bords de faces internes de degré d



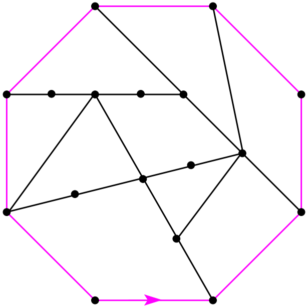
carte non 4-irréductible

Cartes biparties irréductibles

définition

soit d un entier pair, une carte bipartie à bord est dite d-irréductible si

- elle a maille $\geq d$
  (en particulier toutes ses faces internes ont degré $\geq d$)
- tous ses cycles de longueur d sont des bords de faces internes de degré d



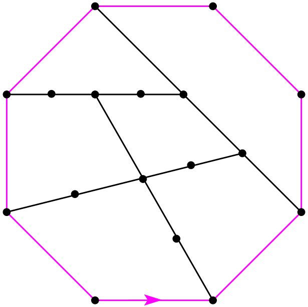
carte 4-irréductible

Cartes biparties irréductibles

définition

soit d un entier pair, une carte bipartie à bord est dite d-irréductible si

- elle a maille $\geq d$
  (en particulier toutes ses faces internes ont degré $\geq d$)
- tous ses cycles de longueur d sont des bords de faces internes de degré d



carte 6-irréductible

Cartes biparties irréductibles

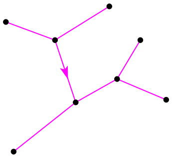
définition

soit d un entier pair, une carte bipartie à bord est dite d-irréductible si

- elle a maille $\geq d$
  (en particulier toutes ses faces internes ont degré $\geq d$)
- tous ses cycles de longueur d sont des bords de faces internes de degré d

NB1: un arbre (carte sans cycle) est d-irréductible pour tout d

les seules cartes d-irréductibles à bord de longueur $2j$ pour $2j < d$ sont les arbres à j branches



Cartes biparties irréductibles

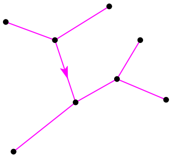
définition

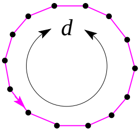
soit d un entier pair, une carte bipartie à bord est dite d-irréductible si

- elle a maille $\geq d$
  (en particulier toutes ses faces internes ont degré $\geq d$)
- tous ses cycles de longueur d sont des bords de faces internes de degré d

NB1: un arbre (carte sans cycle) est d-irréductible pour tout d

les seules cartes d-irréductibles à bord de longueur d sont les arbres à $d/2$ branches et la carte à une seule face interne de degré d





Cartes biparties irréductibles

définition

soit d un entier pair, une carte bipartie à bord est dite d-irréductible si

- elle a maille $\geq d$
  (en particulier toutes ses faces internes ont degré $\geq d$)
- tous ses cycles de longueur d sont des bords de faces internes de degré d

NB1: un arbre (carte sans cycle) est d-irréductible pour tout d

NB2: une carte $(d-2)$-irréductible sans faces de degré $(d-2)$ n'est rien d'autre qu'une carte de maille $\geq d$

Cartes irréductibles biparties

définition

soit $d = 2b$ un entier positif pair

Fonction génératrice des cartes biparties d-irréductibles

poids z par face interne de degré d

poids x_{2k} par face interne de degré $2k > d$

$$\rightarrow \quad F_{2j}^{(d)}(z; x_{d+2}, x_{d+4}, \ldots)$$

Cartes irréductibles biparties

définition

soit $d = 2b$ un entier positif pair

Fonction génératrice des cartes biparties d-irréductibles

poids z par face interne de degré d

poids x_{2k} par face interne de degré $2k > d$

$$\rightarrow \quad F_{2j}^{(d)}(z; x_{d+2}, x_{d+4}, \ldots)$$

- des 2 remarques précédentes, on déduit

$$F_{2j}^{(d)} = \mathrm{Cat}(j) = \frac{\binom{2j}{j}}{j+1}, \qquad j < b \quad \text{(arbres)}$$
$$F_{2b}^{(d)} = \mathrm{Cat}(b) + z = \frac{\binom{2b}{b}}{b+1} + z$$

$F_{2j}^{(d-2)}(0; x_d, x_{d+2}, \ldots)$ est la f.g. des cartes de maille $\geq d$

Rq: maille toujours $\geq 2 \rightarrow F_{2j}^{(0)}(0; x_d, x_{d+2}, \ldots) = F_{2j}(x_d, x_{d+2}, \ldots)$

Cartes irréductibles biparties

énumération

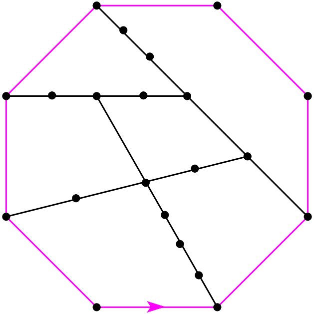
• cas particuliers ($d = 4$):
- W.T. Tutte, *A census of planar triangulations*, Canad. J. Math. **14** (1962) 21-38
- R. Mullin and P. Schellenberg, *The enumeration of c-nets via quadrangulations*, J. Combin. Theory **4** (1968) 259-276
- É. Fusy, D. Poulalhon and G. Schaeffer, *Dissections, orientations, and trees, with applications to optimal mesh encoding and to random sampling*, Trans. Algorithms **4**(2) (2008) Art 19

• formules générales pour les cartes de maille d quelconque:
- O. Bernardi and É. Fusy, *A bijection for triangulations, quadrangulations, pentagulations, etc.*, J. Combin. Theory Ser. A **119** (2012) 218244
- O. Bernardi and É. Fusy, *Unified bijections for maps with prescribed degrees and girth*, J. Combin. Theory Ser. A **119** (2012) 13511387

Cartes irréductibles

approche par substitution

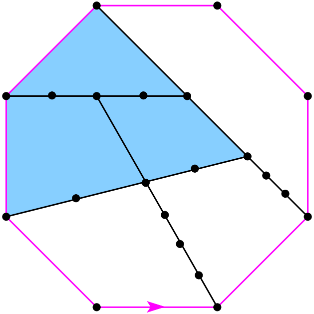
les cartes de maille $\geq d$ s'obtiennent à partir des cartes d-irréductibles en substituant à chaque face de degré d de la carte d-irréductible une carte à bord de longueur d et de maille d



Cartes irréductibles

approche par substitution

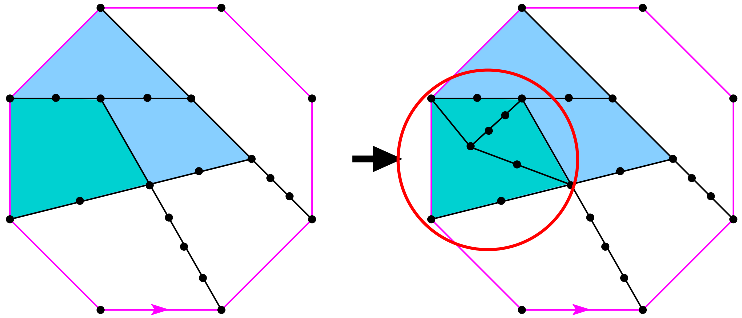
les cartes de maille $\geq d$ s'obtiennent à partir des cartes d-irréductibles en substituant à chaque face de degré d de la carte d-irréductible une carte à bord de longueur d et de maille d



Cartes irréductibles

approche par substitution

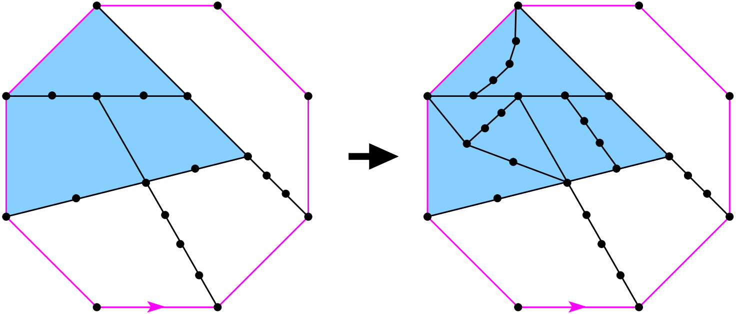
les cartes de maille $\geq d$ s'obtiennent à partir des cartes d-irréductibles en substituant à chaque face de degré d de la carte d-irréductible une carte à bord de longueur d et de maille d



Cartes irréductibles

approche par substitution

les cartes de maille $\geq d$ s'obtiennent à partir des cartes d-irréductibles en substituant à chaque face de degré d de la carte d-irréductible une carte à bord de longueur d et de maille d

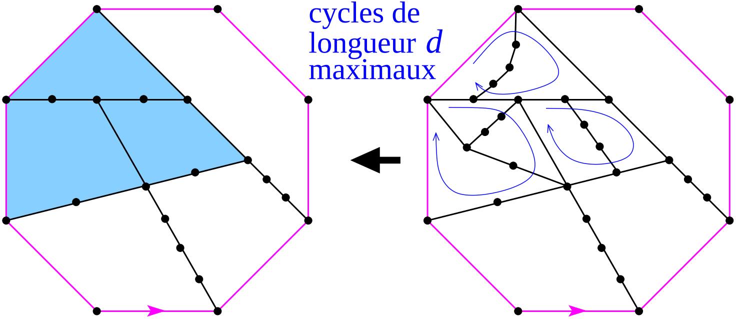


les bords des faces originales sont les cycles de longueur d maximaux

Cartes irréductibles

approche par substitution

les cartes de maille $\geq d$ s'obtiennent à partir des cartes d-irréductibles en substituant à chaque face de degré d de la carte d-irréductible une carte à bord de longueur d et de maille d



NB: les cycles de longueur d maximaux ne se chevauchent pas

Cartes irréductibles

approche par substitution

$$F_{2j}^{(d-2)}(0; x_d, \ldots) = F_{2j}^{(d)}(Z(x_d, x_{d+2}, \ldots); x_{d+2}, \ldots)$$

où Z est la f.g. des cartes de maille d à bord de longueur d

$$\left(Z(x_d,\ldots) = F_d^{(d-2)}(0; x_d, \ldots) - \mathrm{Cat}(d)\right)$$

$\rightarrow$ en définissant $X_d(z; x_{d+2}, \ldots)$ par $Z(X_d(z; x_{d+2}, \ldots), x_{d+2}, \ldots) = z$

$$F_{2j}^{(d)}(z; x_{d+2}, \ldots) = F_{2j}^{(d-2)}(0; X_d(z; x_{d+2}, \ldots), x_{d+2}, \ldots)$$

et par itération

$$F_{2j}^{(d)}(z; x_{d+2}, \ldots) = F_{2j}(X_2, X_4, \ldots X_d, x_{d+2}, \ldots)$$

en fonction de $b = d/2$ poids “renormalisés” $X_{2j}(z; x_{d+2}, \ldots)$, $1 \leq j \leq b$

Q: peut-on déterminer simplement ces b “inconnues” ?

Cartes irréductibles

approche par substitution

$$F_{2j} = Z_0^+(2j; R) - \sum_{m\geq 1} Z_{2m}^+(2j; R) U_m$$

$$U_m = \sum_{k\geq m+1} x_{2k} Z_{-2m-1}(2k-1; R), \qquad R = 1 + U_0$$

$$\Rightarrow F_{2j}^{(d)} = Z_0^+(2j; R^{(d)}) - \sum_{m\geq 1} Z_{2m}^+(2j; R^{(d)}) U_m^{(d)}$$

où $R^{(d)} = R(X_2, \ldots, X_d, x_{d+2}, \ldots)$ et $U_m^{(d)} = U_m(X_2, \ldots, X_d, x_{d+2}, \ldots)$

l'expression de U_m pour $m \geq b$ ne contient que les x_{2k} non-renormalisés

$$\to U_m^{(d)} = \sum_{k\geq m+1} x_{2k} Z_{-2m-1}(2k-1; R^{(d)}), \quad m \geq b$$

Cartes irréductibles

approche par substitution

• en pratique, on peut donc avantageusement remplacer les b inconnues $X_2, \ldots, X_d$ par un jeu équivalent de b inconnues:

$$R^{(d)} = 1 + U_0^{(d)} \text{ et } U_m^{(d)} \text{ pour } m = 1, \ldots, b-1$$

• on a par ailleurs d équations qui fixent la valeur de $F_{2j}^{(d)}$ pour $j = 1, \ldots, b$

$$F_{2j}^{(d)} = \mathrm{Cat}(j) = \frac{\binom{2j}{j}}{j+1}, \qquad j < b \quad \text{(arbres)}$$
$$F_{2b}^{(d)} = \mathrm{Cat}(b) + z = \frac{\binom{2b}{b}}{b+1} + z$$

$\rightarrow$ on peut donc résoudre

Exemple

quadrangulations 4-irréductibles

$$b = 2, \qquad z \text{ par carré}, \qquad x_{2k} = 0, \quad k > 2$$

- on a alors $U_m^{(4)} = 0, \quad m \geq 2$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow F_{2j}^{(4)} &= Z_0^+(2j; R^{(4)}) - Z_2^+(2j; R^{(4)}) U_1^{(4)} \\
F_{2j}^{(4)} &= \frac{\binom{2j}{j}}{j+1} (R^{(4)})^j - 3 \frac{\binom{2j}{j+1}}{j+2} (R^{(4)})^{j-1} U_1^{(4)}
\end{aligned}$$

- les 2 inconnues $R^{(d)}$ et $U_1^{(d)}$ sont fixées par les 2 équations

$$\begin{aligned}
F_2^{(4)} &= \quad 1 \quad &= R^{(4)} - U_1^{(4)} \\
F_4^{(4)} &= 2 + z &= 2(R^{(4)})^2 - 3R^{(4)} U_1^{(4)}
\end{aligned}$$

Exemple

quadrangulations 4-irréductibles

$$b = 2, \qquad z \text{ par carré}, \qquad x_{2k} = 0, \quad k > 2$$

$$z + (R^{(4)})^2 - 3R^{(4)} + 2 = 0$$

$$\Rightarrow R^{(4)} = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{1-4z})$$

$$F_{2j}^{(4)} = \binom{2j}{j-2}\left(\frac{3}{j-1}(R^{(4)})^{j-1} - \frac{2}{j}(R^{(4)})^j\right)$$

de manière générale, le système obtenu est triangulaire et s'inverse donc facilement

Cas général

cartes d-irréductibles

$$b = d/2, \qquad z \text{ par } d\text{-angle}, \qquad x_{2k}, \quad k > b$$

F.g. des cartes à bord d-irréductibles

$$z + \sum_{\ell=0}^{b} (-1)^{b-\ell} \binom{b+\ell}{2\ell} \mathrm{Cat}(\ell) (R^{(d)})^{b-\ell} + \sum_{k \geq b+1} \binom{2k-1}{k+b} x_{2k} (R^{(d)})^{b+k} = 0$$

$$F_{2j}^{(d)} = \binom{2j}{j-b} \left(\sum_{\ell=0}^{b-1} (-1)^{b-\ell-1} \frac{b-\ell}{j-\ell} \binom{b+\ell}{2\ell} \mathrm{Cat}(\ell) (R^{(d)})^{j-\ell} - \sum_{k \geq b+1} \frac{b+k}{j+k} \binom{2k-1}{k+b} x_{2k} (R^{(d)})^{j+k} \right)$$

Cas général

d-angulations d-irréductibles

$$b = d/2, \qquad z \text{ par } d\text{-angle}, \qquad x_{2k} = 0, \quad k > b$$

F.g. des d-angulations à bord d-irréductibles

$$z + \sum_{\ell=0}^{b} (-1)^{b-\ell} \binom{b+\ell}{2\ell} \mathrm{Cat}(\ell) (R^{(d)})^{b-\ell} = 0$$

$$F_{2j}^{(d)} = \binom{2j}{j-b} \sum_{\ell=0}^{b-1} (-1)^{b-\ell-1} \frac{b-\ell}{j-\ell} \binom{b+\ell}{2\ell} \mathrm{Cat}(\ell) (R^{(d)})^{j-\ell}$$

Slices d-irréductibles

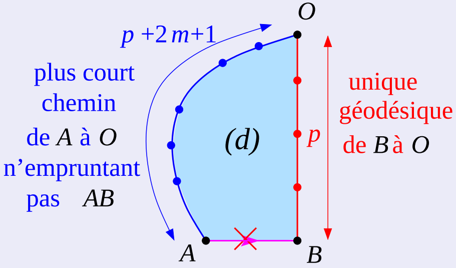
• quel est le sens des "inconnues" $R^{(d)}$ et $U_m^{(d)}$ $(1 \leq m \leq b-1)$, ou plus généralement des $U_m^{(d)}$ pour tout $m \geq 0$?

• rappel de la définition:

$$U_m^{(d)} = U_m(X_2, \ldots, X_d, x_{d+2}, \ldots)$$

$\rightarrow$ correspond au processus de substitution au niveau des slices

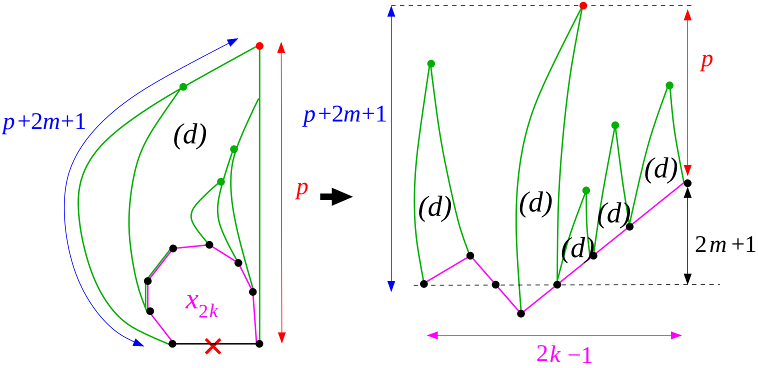
$U_m^{(d)}$ est la f.g. des m-slices d-irréductibles



Slices d-irréductibles

comptage direct

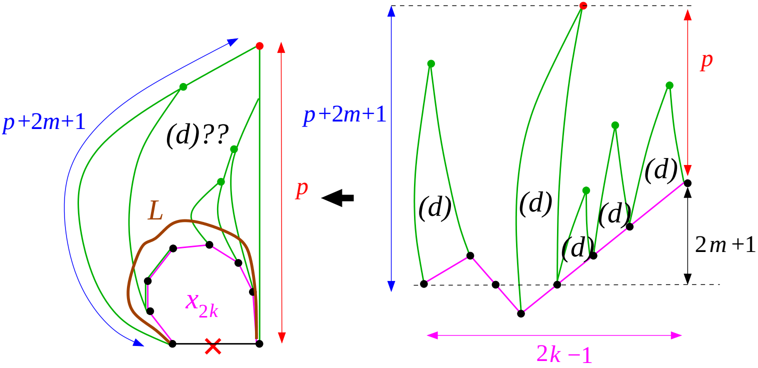
- peut-on calculer $U_m^{(d)}$ directement ?
- la décomposition canonique marche-t'elle ?



Slices d-irréductibles

comptage direct

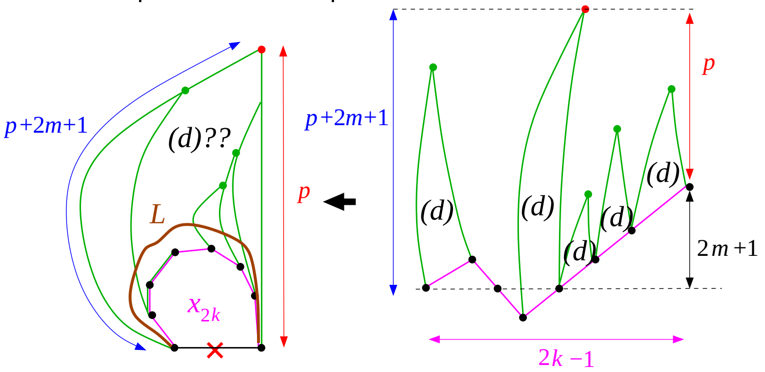
- peut-on calculer $U_m^{(d)}$ directement ?
- la décomposition canonique marche-t'elle ?



Slices d-irréductibles

comptage direct

- peut-on calculer $U_m^{(d)}$ directement ?
- la décomposition canonique marche-t'elle ?



$L \geq 2m+1$ (inégalité triangulaire) donc, si $m \geq b$, $\quad L+1 > d \quad \checkmark$

$$U_m^{(d)} = \sum_{k \geq m+1} x_{2k} Z_{-2m-1}(2k-1; R^{(d)}), \qquad m \geq b$$

Slices d-irréductibles

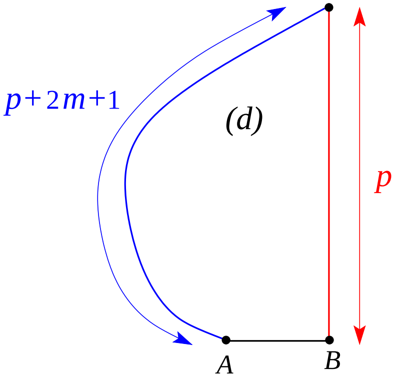
comptage direct

- la décomposition canonique ne marche pas pour $m < b$
- existe-t'il une autre décomposition ?

Slices d-irréductibles

comptage direct

- la décomposition canonique ne marche pas pour $m < b$
- existe-t'il une autre décomposition ?

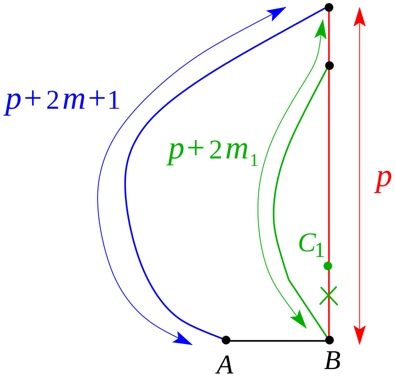


on suppose $p \geq 1$

Slices d-irréductibles

comptage direct

- la décomposition canonique ne marche pas pour $m < b$
- existe-t'il une autre décomposition ?



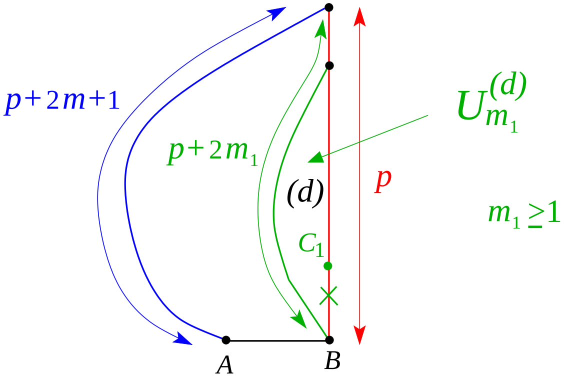
$m_1 \geq 1$

on suppose $p \geq 1$

Slices d-irréductibles

comptage direct

- la décomposition canonique ne marche pas pour $m < b$
- existe-t'il une autre décomposition ?

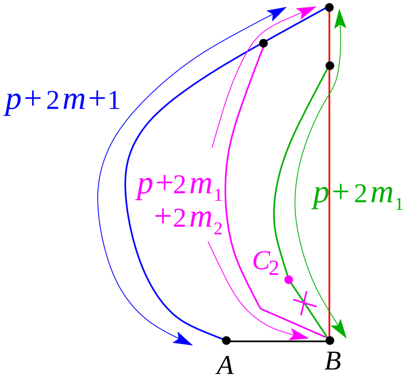


on suppose $p \geq 1$

Slices d-irréductibles

comptage direct

- la décomposition canonique ne marche pas pour $m < b$
- existe-t'il une autre décomposition ?



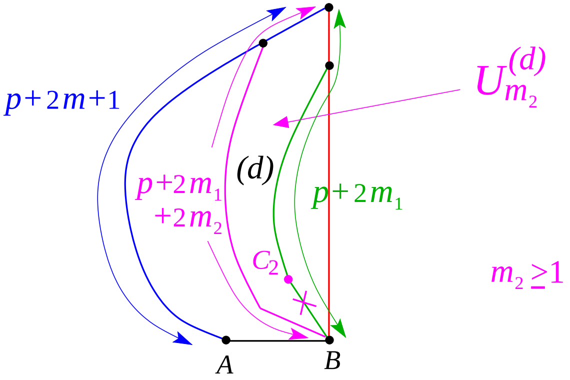
$m_2 \geq 1$

on suppose $p \geq 1$

Slices d-irréductibles

comptage direct

- la décomposition canonique ne marche pas pour $m < b$
- existe-t'il une autre décomposition ?

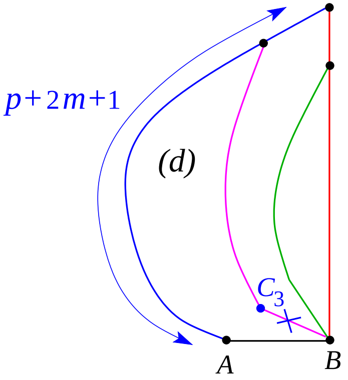


on suppose $p \geq 1$

Slices d-irréductibles

comptage direct

- la décomposition canonique ne marche pas pour $m < b$
- existe-t'il une autre décomposition ?

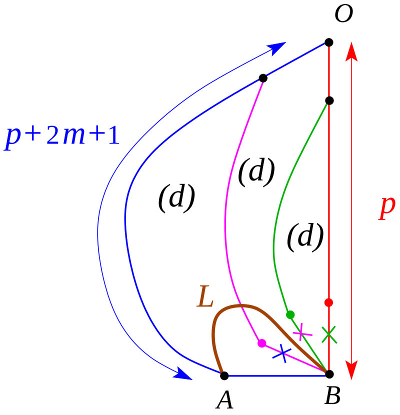


on continue jusqu'à ce que $\sum m_\ell = m + 1$ (sélectionne le bord gauche)

Slices d-irréductibles

comptage direct

inversement, on recolle des m_ℓ-slices d-irreductibles avec $\sum m_\ell = m + 1$
problème: il peut exister des chemins plus courts que le bord gauche

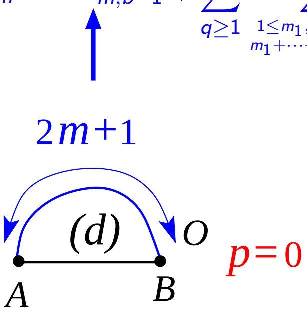


néanmoins, $L \geq d - 1$ et donc $L + p \geq 2m + p + 1$ est garanti si $m \leq b - 1$

Slices d-irréductibles

comptage direct

$$U_m^{(d)} = z\delta_{m,b-1} + \sum_{q\geq 1} \sum_{\substack{1\leq m_1,\ldots,m_q\leq b \\ m_1+\cdots+m_q=m+1}} \prod_{\ell=1}^{q} U_{m_\ell}^{(d)} \qquad m \leq b-1$$



NB1: $p = 0$ possible uniquement si $m = b - 1$

NB2: n'interviennent dans la somme que des $m_\ell \leq b$

Slices d-irréductibles

comptage direct

Système déterminant les $U_m^{(d)}$

$$U_m^{(d)} = z\delta_{m,b-1} + \sum_{q\geq 1} \sum_{\substack{1\leq m_1,\ldots,m_q\leq b \\ m_1+\cdots+m_q=m+1}} \prod_{\ell=1}^{q} U_{m_\ell}^{(d)} \qquad m \leq b-1$$

$$U_m^{(d)} = \sum_{k\geq m+1} x_{2k} Z_{-2m-1}(2k-1; R^{(d)}), \qquad m \geq b$$

$$R^{(d)} = 1 + U_0^{(d)}$$

Exemple

quadrangulations 4-irréductibles

$$b = 2, \qquad z \text{ par carré}, \qquad x_{2k} = 0, \quad k > 2$$

on a alors $U_m^{(4)} = 0, \quad m \geq 2$

$$U_0^{(4)} = U_1^{(4)}, \qquad U_1^{(4)} = z + (U_1^{(4)})^2, \qquad R^{(4)} = 1 + U_0^{(4)}$$

$$z + (R^{(4)})^2 - 3R^{(4)} + 2 = 0$$

Des slices aux arbres

le cas des d-angulations d-irréductibles

commençons par le cas simple $x_{2k} = 0,\ k > b$ ($U_m^{(d)} = 0$ pour $m \geq b$)

$$U_m^{(d)} = z\delta_{m,b-1} + \sum_{q \geq 1} \sum_{\substack{1 \leq m_1, \ldots, m_q \leq b-1 \\ m_1 + \cdots + m_q = m+1}} \prod_{\ell=1}^{q} U_{m_\ell}^{(d)} \qquad m \leq b-1$$

$$R^{(d)} = 1 + U_0^{(d)}$$

NB: à $m = 0$, l'équation donne $U_0^{(d)} = U_1^{(d)}$ (on suppose $b > 1$)

Des slices aux arbres

le cas des d-angulations d-irréductibles

commençons par le cas simple $x_{2k} = 0,\ k > b$ ($U_m^{(d)} = 0$ pour $m \geq b$)

$$U_m^{(d)} = z\delta_{m,b-1} + \sum_{q \geq 1} \sum_{\substack{1 \leq m_1, \ldots, m_q \leq b-1 \\ m_1 + \cdots + m_q = m+1}} \prod_{\ell=1}^{q} U_{m_\ell}^{(d)} \qquad 1 \leq m \leq b-1$$

$$R^{(d)} = 1 + U_1^{(d)}$$

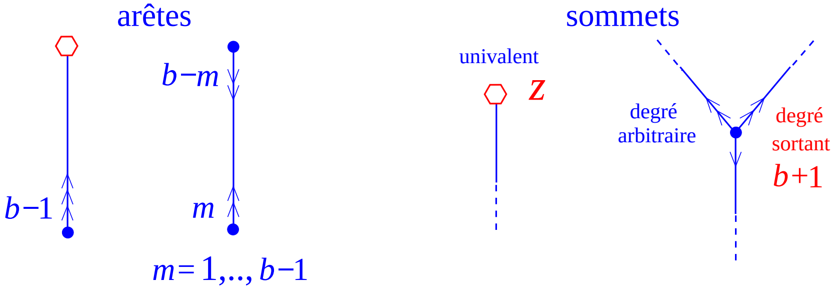
Des slices aux arbres

le cas des d-angulations d-irréductibles

commençons par le cas simple $x_{2k} = 0,\ k > b$ ($U_m^{(d)} = 0$ pour $m \geq b$)

$$U_m^{(d)} = z\delta_{m,b-1} + \sum_{q\geq 1} \sum_{\substack{1\leq m_1,\ldots,m_q\leq b-1\\ m_1+\cdots+m_q=m+1}} \prod_{\ell=1}^{q} U_{m_\ell}^{(d)} \qquad 1 \leq m \leq b-1$$

$$R^{(d)} = 1 + U_1^{(d)}$$



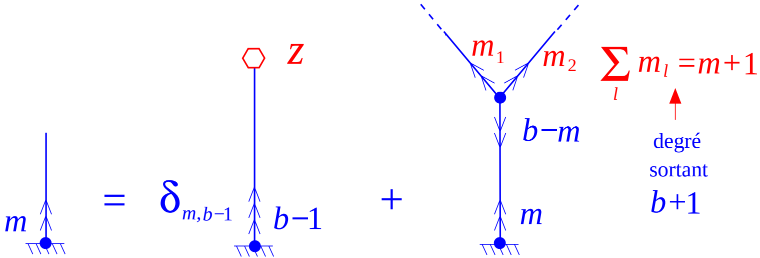
Des slices aux arbres

le cas des d-angulations d-irréductibles

commençons par le cas simple $x_{2k} = 0,\ k > b$ ($U_m^{(d)} = 0$ pour $m \geq b$)

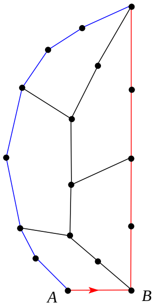
$$U_m^{(d)} = z\delta_{m,b-1} + \sum_{q\geq 1} \sum_{\substack{1\leq m_1,\ldots,m_q\leq b-1\\ m_1+\cdots+m_q=m+1}} \prod_{\ell=1}^{q} U_{m_\ell}^{(d)} \qquad 1 \leq m \leq b-1$$

$$R^{(d)} = 1 + U_1^{(d)}$$

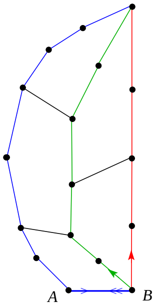


Q: bijection ?

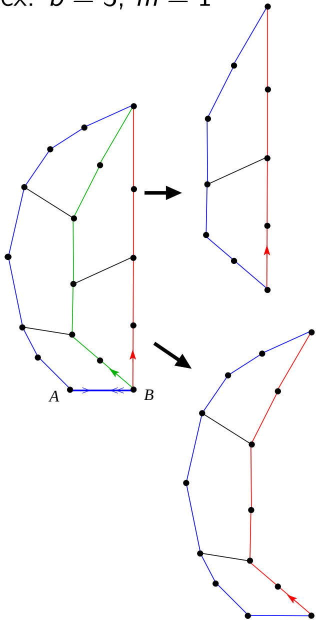
ex: $b = 3,\ m = 1$



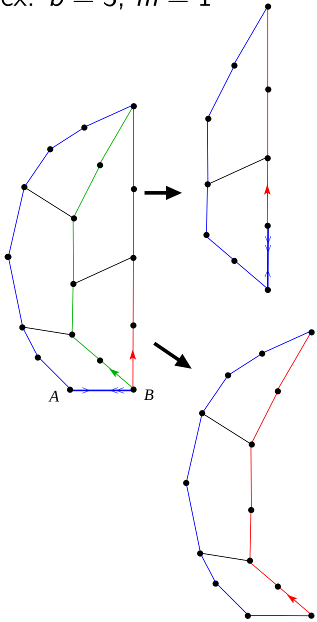
ex: $b = 3,\ m = 1$



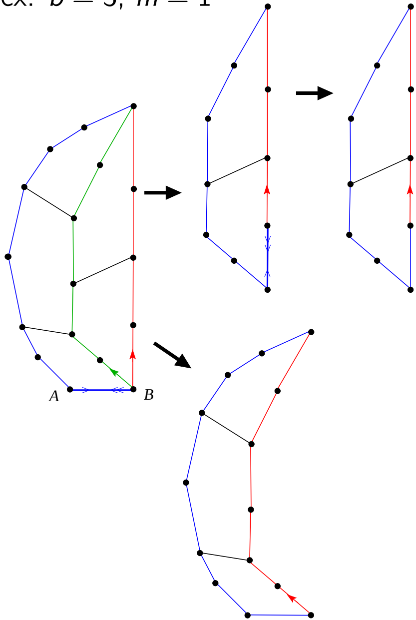
ex: $b = 3,\ m = 1$



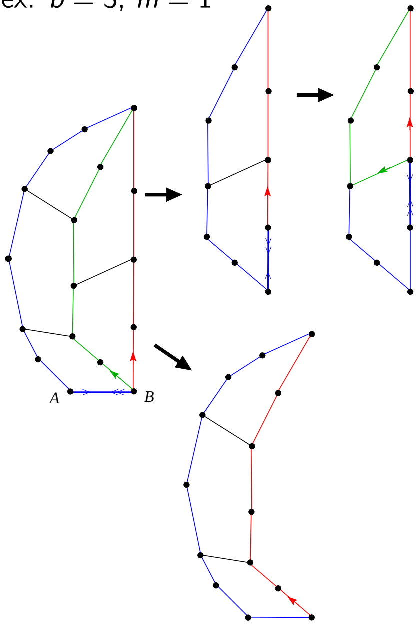
ex: $b = 3,\ m = 1$



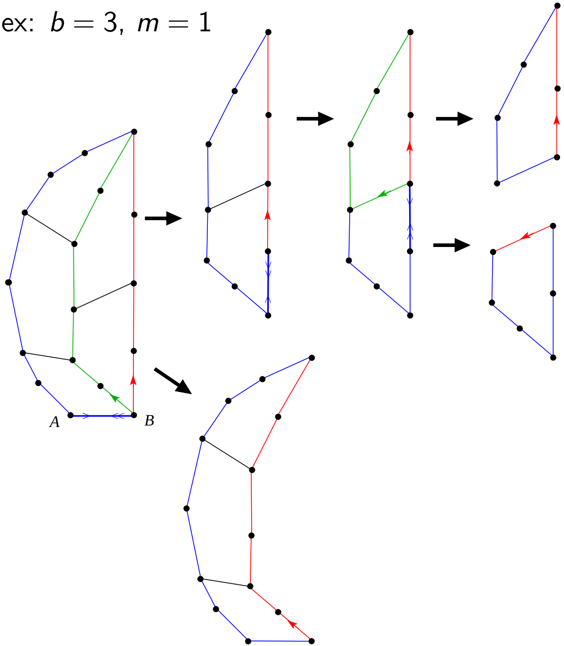
ex: $b = 3,\ m = 1$



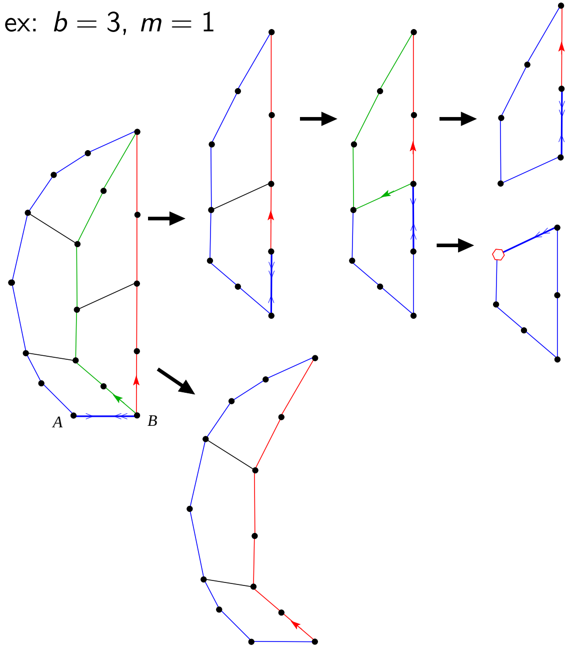
ex: $b = 3,\ m = 1$



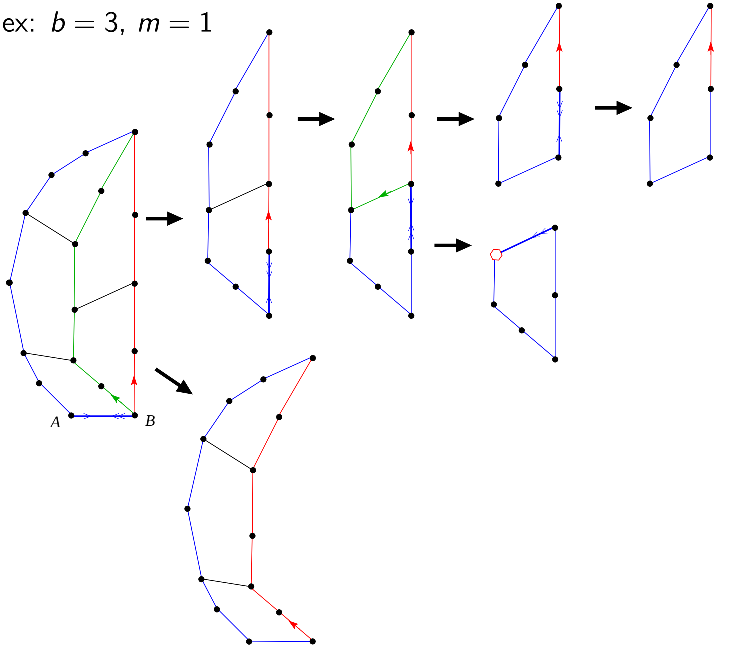
ex: $b = 3,\ m = 1$



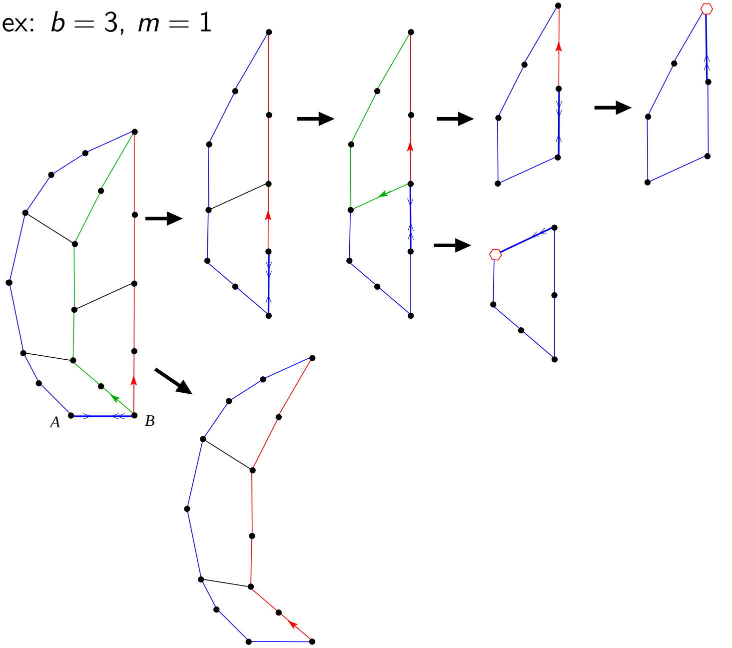
ex: $b = 3,\ m = 1$



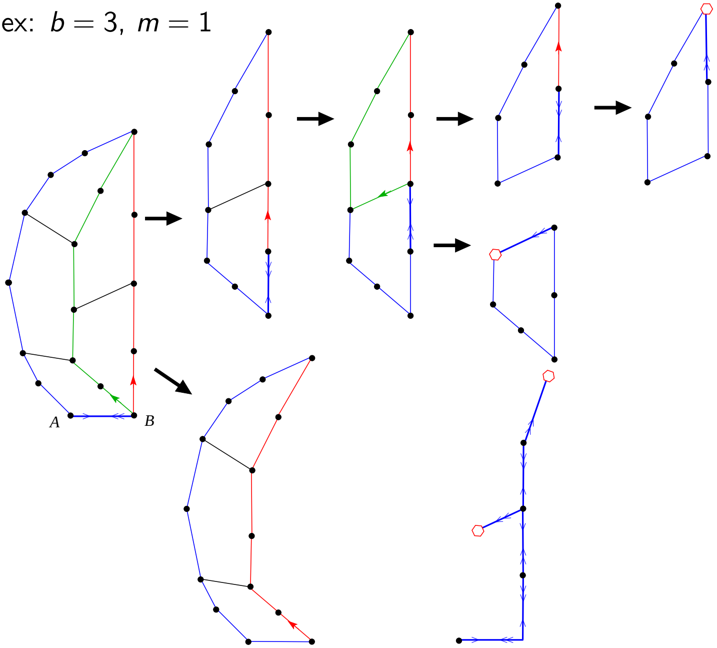
ex: $b = 3,\ m = 1$



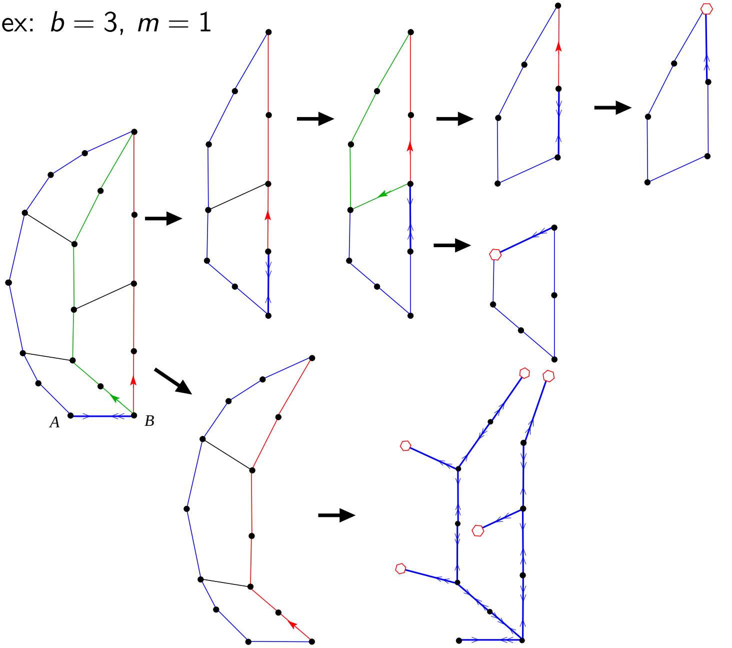
ex: $b = 3,\ m = 1$



ex: $b = 3,\ m = 1$



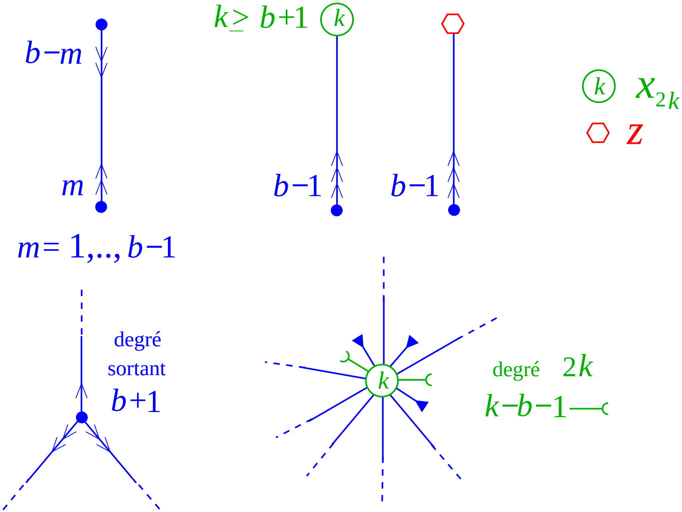
ex: $b = 3,\ m = 1$



Des slices aux arbres

le cas d-irréductible général

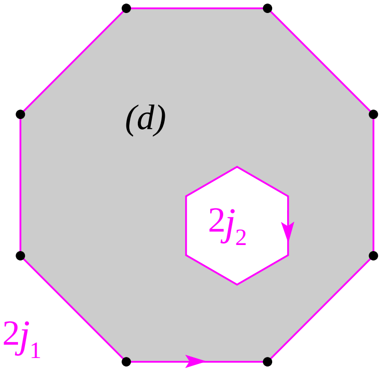
nouveaux sommets étiquetés $k \geq b+1$ pondérés par x_{2k}



Cartes à plusieurs bords et formules d'énumération

cartes à plusieurs bords

cartes à 2 bords



Fonction génératrice des cartes à 2 bords

$$F^{(d)}_{2j_1,2j_2} = 2j_2 \frac{\partial}{\partial_{x_{2j_2}}} F^{(d)}_{2j_1}$$

en utilisant

$$F^{(d)}_{2j_1} = \binom{2j_1}{j_1 - b} \left(\sum_{\ell=0}^{b-1} (-1)^{b-\ell-1} \tfrac{b-\ell}{j_1-\ell} \tbinom{b+\ell}{2\ell} \mathrm{Cat}(\ell) (R^{(d)})^{j_1-\ell} - \sum_{k \geq b+1} \tfrac{b+k}{j_1+k} \tbinom{2k-1}{k+b} x_{2k} (R^{(d)})^{j_1+k} \right)$$

on trouve (résultat non-bijectif)

$$F^{(d)}_{2j_1,2j_2} = 2j_1 \binom{2j_1 - 1}{j_1 + b} 2j_2 \binom{2j_2 - 1}{j_2 + b} \frac{(R^{(d)})^{j_1+j_2}}{j_1 + j_2} \qquad j_1, j_2 > b$$

Cartes à plusieurs bords et formules d'énumération

cartes à plusieurs bords

• cette formule est à rapprocher de la formule pour les cartes biparties générales à 2 bords

$$F_{2j_1,2j_2} = 2j_1 \binom{2j_1 - 1}{j_1} 2j_2 \binom{2j_2 - 1}{j_2} \frac{R^{j_1+j_2}}{j_1 + j_2} \qquad j_1, j_2 > 0$$

($\rightarrow$ correspond simplement à faire $b = 0$ dans la formule précédente)

Cartes à plusieurs bords et formules d'énumération

cartes à plusieurs bords

• cette formule est à rapprocher de la formule pour les cartes biparties générales à 2 bords

$$F_{2j_1,2j_2} = 2j_1 \binom{2j_1 - 1}{j_1} 2j_2 \binom{2j_2 - 1}{j_2} \frac{R^{j_1+j_2}}{j_1 + j_2} \qquad j_1, j_2 > 0$$

($\rightarrow$ correspond simplement à faire $b = 0$ dans la formule précédente)

• pour les cartes biparties générales à $r \geq 2$ bords, on a la formule

$$F_{2j_1,2j_2,\ldots,2j_r} = \frac{1}{\sum_{\ell=1}^{r} j_\ell} \prod_{\ell=1}^{r} 2j_\ell \binom{2j_\ell - 1}{j_\ell} \frac{\partial^{r-2}}{\partial z^{r-2}} R^{\sum_{\ell=1}^{r} j_\ell}$$

où R incorpore un poids z par sommet

voir G. Collet and É. Fusy, *A simple formula for the series of bipartite and quasi- bipartite maps with boundaries* (2012) pour une preuve bijective

Fonction génératrice des cartes à $r \geq 2$ bords

$$F^{(d)}_{2j_1,2j_2,\ldots,2j_r}$$

$$F^{(d)}_{2j_1,2j_2,\ldots,2j_r} = \prod_{\ell=3}^{r} \left(2j_\ell \frac{\partial}{\partial x_{2j_\ell}} \right) F^{(d)}_{2j_1,2j_2}$$

on trouve (preuve combinatoire utilisant les arbres)

$$F^{(d)}_{2j_1,2j_2,\ldots,2j_r} = \frac{1}{(r-2)b + \sum_{\ell=1}^{r} j_\ell} \prod_{\ell=1}^{r} 2j_\ell \binom{2j_\ell - 1}{j_\ell + b} \frac{\partial^{r-2}}{\partial z^{r-2}} \left(R^{(d)}\right)^{(r-2)b + \sum_{\ell=1}^{r} j_\ell}$$

nombre de cartes d-irréductibles à bord de longueur $2j$ avec q_ℓ faces internes de degré 2ℓ ($\ell \geq b$)

$$N_{2j}^{(d)}(\{q_\ell\}_{\ell\geq b}) = (2j)\binom{2j-1}{j+b}\prod_{\ell>b}\frac{1}{q_\ell!}\binom{2\ell-1}{\ell+b}^{q_\ell}$$
$$\times\frac{1}{E+b(F-2-2q_b)}\frac{(F-2)!}{q_b!}[z^{F-2}](R^{(d)}(z))^{E+b(F-2-2q_b)}$$

où $R^{(d)}(z)$ est calculé à $x_{2k}=0$, $k>b$ (sol. d'une équation algébrique de degré b)

ici, $F = \#$ faces, $E = \#$ arêtes

Exemple

Quadrangulation 4-irréductibles

$$N_{2j}^{(4)}(\{q_\ell\}_{\ell\geq 2}) = (2j)\binom{2j-1}{j+2}\prod_{\ell>2}\frac{1}{q_\ell!}\binom{2\ell-1}{\ell+2}^{q_\ell}$$

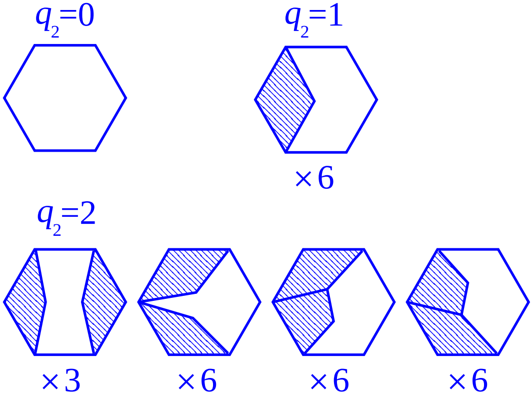
$$\times\left\{\frac{\delta_{F,2}}{E}+\frac{(2(F-3))!}{q_2!(F-3)!}\;{}_2F_1(5-E-2F+4q_2,3-F,2(3-F);-1)\right\}$$

exemple: 2 hexagones ($j=3$, $q_3=1$) et $q_2=1,2,3,\ldots$ carrés

$$1, 6, 21, 62, 180, 540, 1683, 5418, 17901, 60390, 207207, 720954, \ldots$$

Exemple

Quadrangulation 4-irréductibles



$1, 6, 21, 62, 180, 540, 1683, 5418, 17901, 60390, 207207, 720954, \ldots$

Formule de pointage

$$F^{(d)}_{2j_1,2j_2,\ldots,2j_r} = \frac{1}{(r-2)b + \sum_{\ell=1}^{r} j_\ell} \prod_{\ell=1}^{r} 2j_\ell \binom{2j_\ell - 1}{j_\ell + b} \frac{\partial^{r-2}}{\partial z^{r-2}} \left(R^{(d)}\right)^{(r-2)b + \sum_{\ell=1}^{r} j_\ell}$$

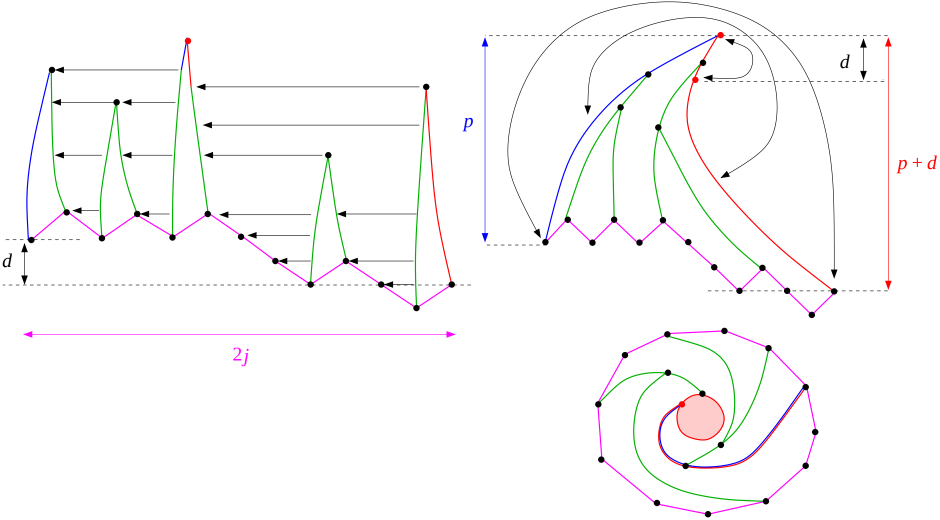
à $r = 1$ cette formule devient

F.g. des cartes à bords d-irréductibles “pointées”$^{(*)}$

$$\frac{\partial F^{(d)}_{2j}}{\partial z} = \binom{2j}{j-b} \left(R^{(d)}\right)^{j-b} = Z_d(2j, R^{(d)})$$

$^{(*)}$ “pointées” $=$ avec une face de degré d marquée

Formule de pointage



Conclusion

- le découpage géodésique est un bon outil d'énumération des cartes

Conclusion

- le découpage géodésique est un bon outil d'énumération des cartes
- il permet l'énumération des cartes d-irréductibles via celle des m-slices d-irreductibles

Conclusion

- le découpage géodésique est un bon outil d'énumération des cartes
- il permet l'énumération des cartes d-irréductibles via celle des m-slices d-irreductibles
- les slices ont <u>des</u> décompositions récurcives

Conclusion

- le découpage géodésique est un bon outil d'énumération des cartes
- il permet l'énumération des cartes d-irréductibles via celle des m-slices d-irreductibles
- les slices ont des décompositions récurcives
- on peut les coder par des arbres décorés

Conclusion

- le découpage géodésique est un bon outil d'énumération des cartes
- il permet l'énumération des cartes d-irréductibles via celle des m-slices d-irreductibles
- les slices ont <u>des</u> décompositions récurcives
- on peut les coder par des arbres décorés

- tout marche également dans le cas non biparti

Conclusion

- le découpage géodésique est un bon outil d'énumération des cartes
- il permet l'énumération des cartes d-irréductibles via celle des m-slices d-irreductibles
- les slices ont <u>des</u> décompositions récurcives
- on peut les coder par des arbres décorés

- tout marche également dans le cas non biparti
- équations intégrables en contrôlant la longueur des bords des slices

Conclusion

- le découpage géodésique est un bon outil d'énumération des cartes
- il permet l'énumération des cartes d-irréductibles via celle des m-slices d-irreductibles
- les slices ont des décompositions récurcives
- on peut les coder par des arbres décorés

- tout marche également dans le cas non biparti
- équations intégrables en contrôlant la longueur des bords des slices

$$z + (R^{(4)})^2 - 3R^{(4)} + 2 = 0$$

Conclusion

- le découpage géodésique est un bon outil d'énumération des cartes
- il permet l'énumération des cartes d-irréductibles via celle des m-slices d-irreductibles
- les slices ont des décompositions récurcives
- on peut les coder par des arbres décorés

- tout marche également dans le cas non biparti
- équations intégrables en contrôlant la longueur des bords des slices

(longueur du bord droit $p \leq i$)

$$z + (R^{(4)})^2 - 3R^{(4)} + 2 = 0$$

$$z + R_i^{(4)} R_{i+2}^{(4)} - (R_i^{(4)} + R_{i+1}^{(4)} + R_{i+2}^{(4)}) + 2 = 0$$

Conclusion

- le découpage géodésique est un bon outil d'énumération des cartes
- il permet l'énumération des cartes d-irréductibles via celle des m-slices d-irreductibles
- les slices ont des décompositions récurcives
- on peut les coder par des arbres décorés

- tout marche également dans le cas non biparti
- équations intégrables en contrôlant la longueur des bords des slices

(longueur du bord droit $p \leq i$)

$$z + (R^{(4)})^2 - 3R^{(4)} + 2 = 0$$

$$z + R_i^{(4)} R_{i+2}^{(4)} - (R_i^{(4)} + R_{i+1}^{(4)} + R_{i+2}^{(4)}) + 2 = 0$$

$$R_i^{(4)}(z) = 1 + z\, T_{i-1}(z), \qquad T_i = 1 + z\, T_{i-1} T_{i+1}$$

(arbres binaires "naturally embedded")