Cyril Nicaud : Combinatoire des automates (le 7 avril 2011)

résumé par A. Genitrini

Cyril Nicaud nous a presente a travers son expose, trois methodes a n de generer uniformement une classe d'automates, ainsi que la combinatoire sous-jacente nous permettant d'enumerer cette classe. La plupart de ces methodes sont detaillees dans son habilitation [4].

1 Introduction

Tout au long de l'expose, nous nous sommes interesses aux automates deterministes et complets. Un automate sur l'alphabet $\mathcal{A}$ deterministe et complet est la donnee d'un quadruplet (Q, δ, q_0, F) ou Q est l'ensemble des etats, q_0 est l'unique etat initial, δ est une application de $Q \times \mathcal{A}$ dans Q et F est l'ensemble des etats terminaux.

Par la suite, nous noterons k la taille de l'alphabet et n le nombre d'etats. Les etats seront numerotes de 1 a n et l'etat initial est le numerote par 1.

Nos automates ne contiendront pas d'etats naux. Nous devrions les appeler semi-automates mais puisque nous ne considererons que de tels automates par la suite, par abus nous les appellerons automates. Nous pouvons par la suite choisir parmi les etats ceux qui sont naux, suivant une distribution quelconque. En n, nous raisonnerons sur des automates accessibles, i.e. il existe une suite de transitions permettant de passer de l'etat initial a n'importe quel autre etat.

L'un de nos buts est la generation aleatoire d'elements de cette classe, suivant la loi uniforme sur l'ensemble des automates de même taille (i.e. contenant le même nombre d'etats). A travers cette etude concernant la generation, nous nous interesserons egalement a l'enumeration asymptotique de ces objets combinatoires.

2 Génération de tableaux

En 2000, C. Nicaud a demontre que les automates deterministes, complets, accessibles et sans etats terminaux sont en bijection avec avec une classe de tableaux marques : les *k-tableaux étendus et réalisables de taille n*. Il s'agit d'un couple de $(kn + 1)$-uplets d'entiers (X, Y) avec $X = (x_0, \dots x_{kn})$ et $Y = (y_0, y_{kn})$ et veri ant :

{ $1 \leq y_i \leq x_i \leq n$ pour tout $i \in \{0, \dots kn\}$,
{ $x_{i+1} - x_i \in \{0, 1\}$ pour tout $i \in \{0, \dots kn - 1\}$,
{ si $x_{i+1} - x_i = 1$ alors $y_{i+1} = x_{i+1}$ pour tout $i \in \{0, \dots kn - 1\}$,
{ $x_i \geq (i + 1)/k$ pour tout $i \in \{0, \dots kn - 1\}$.

Nous presentons un exemple d'automate et de son tableau associe sur la Figure 1. On

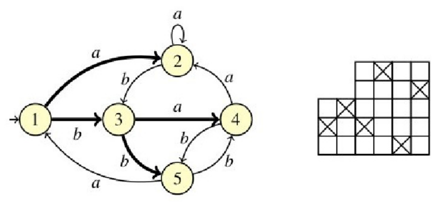

FIGURE 1 { Un automate et son tableau etendu associe

peut decomposer de maniere recursive les tableaux realisables, ce qui nous permet d'envisager une generation aleatoire par methode recursive des automates deterministes et complets. Apres un temps de pre-calcul en (n^2), C. Nicaud a demontre que nous generons un automate en temps lineaire. Toutefois, cette generation necessite l'usage d'entiers tres grands ou alors, si nous avons recours au ottants, la generation n'est plus uniforme et cette perte est di cilement quanti able.

3 Génération de partitions

Nous souhations etablir une nouvelle bijection des automates vers d'autres objets qui sont des partitions de l'ensemble des couples (etat de depart, transition) selon l'etat d'arrivee. A tout automate correspond une partition. Par ailleurs les partitions associees a un automate deterministe, complet et accessible sont aisement reperables.

Un exemple d'automate et sa partition associee sont representes sur la Figure 2. Nous dirons qu'une partition est admissible, s'il s'agit d'une partition de $(kn + 1)$ elements en n parts. A n de generer ce type d'objets, C. Nicaud s'est refere a l'article de Duchon *et al* [2] sur la generation de Boltzmann. C. Nicaud a prouve que de nombreuses partitions sont admissibles. Experimentalement, sur des partitions en 200 parts, environ 80% d'entre elles sont associees a un automates deterministe, complet et accessible. Par ailleurs, la methode de Boltzmann nous donne une complexite de generation approchee en $(n^{3/2})$.

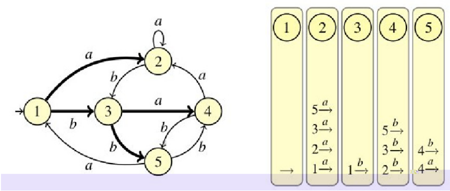

FIGURE 2 { Un automate et sa partition associee

4 Génération d'applcations

Voila une autre methode, relativement \na•ve", permettant de generer uniformement des automates : pour chaque lettre de l'alphabet, il su t de generer uniformement une application de l'ensemble des etats dans lui-même. Seulement nous nous remarquons que la plupart des automates generer ne sont pas acessibles. Ainsi, en generant des automates de taille 1000, C. Nicaud a observe seulement 0.5% d'automates accessibles. De plus, cette proportion semble decro^tre lorsque la taille souhaitee augmente. En appliquant un resultat de Flajolet et Odlysko [3], C. Nicaud a prouve qu'asymptotiquement, la proportion des automates accessibles etait exponentiellement petite. Par consequent, Cette methode de generation, avec rejet des automates non accessibles n'est pas e cace.

Toutefois, en ecartant les etats non accessibles depuis l'etat initial, on obtient un automate nous interessant. Le point delicat est le suivant : C. Nicaud a prouve que la distribution des automates accessibles, issus d'un automate non accessible par cette methode d'elagage est bien uniforme suivant la taille de l'objet obtenu. En outre, il existe une constante calculable α, dependant de la taille de l'alphabet, et telle que la distribution de la taille des automates accessibles, issus d'automates de taille n est concentree autour de αn. En n, C. Nicaud et A. Carayol viennent de prouver que cette methode de generation a une complexite moyenne en $(n^{3/2})$ pour une taille exacte et (n) en taille approchee.

En conclusion, C. Nicaud nous a presente trois methodes a n de generer des automates deterministes, complets et accessibles basees sur des bijections avec des tableaux, des permutations et des applications. A travers l'etude de ces generations, F. Bassino et C. Nicaud [1] ont pu expliciter l'asymptotique du nombre de tels automates : $\left(\left\{ \begin{matrix} kn+1 \\ n \end{matrix} \right\}\right)$, ou $\left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\}$ est un nombre de Stirling de deuxieme espece enumerant les partitions.

Références

[1] F. Bassino and C. Nicaud. Enumeration and random generation of accessible automata. *Theor. Comput. Sci.*, 381(1-3) :86{104, 2007.

[2] P. Duchon, P. Flajolet, G. Louchard, and G. Schae er. Boltzmann samplers for the random generation of combinatorial structures. *Combinatorics, Probability & Computing*, 13(4-5) :577{625, 2004.

[3] Philippe Flajolet and Andrew M. Odlyzko. Random mapping statistics. In *In Advances in Cryptology*, pages 329{354. Springer Verlag, 1990.

[4] C. Nicaud. Analyse d'algorithmes et generation aleatoire en theorie des langages. Memoire d'habilitation a diriger des recherches, 2011.