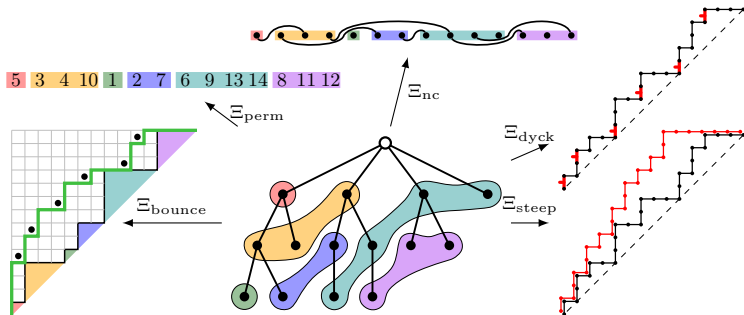


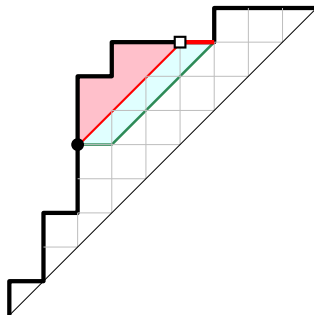
La transformation zeta *steep-bounce* dans le Cataland parabolique

Wenjie Fang, Institute of Discrete Mathematics, TU Graz
Avec Cesar Ceballos et Henri Mühle

07 février 2019, Séminaire Flajolet, IHP

Résultats principaux

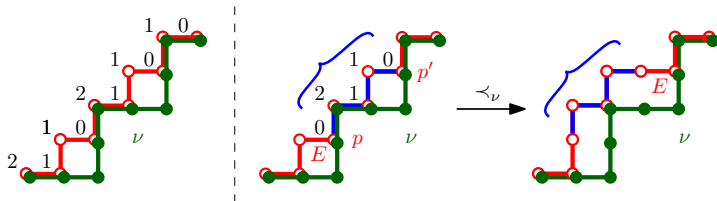




Treillis de ν -Tamari

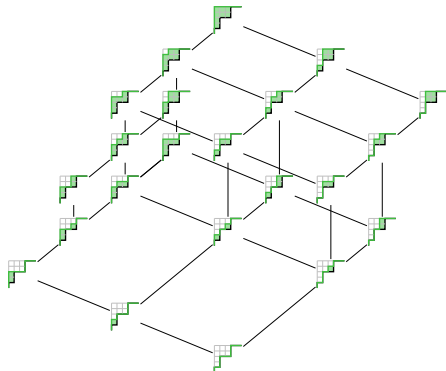
Généralisation avec ν un chemin dirigé arbitraire comme "diagonale" !

Distance horizontale = $\#$ pas Est avant de toucher l'autre côté de ν



Treillis de ν -Tamari (Préville-Ratelle and Viennot 2014) : $\mathcal{T}_\nu$ avec ν arbitraire (dit le **canopé**) de pas N, E .

Pourquoi c'est important ?



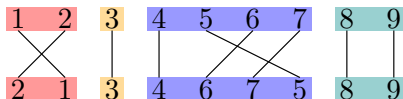
- Généralisant beaucoup de cas (m -Tamari, Tamari rationnel)
- Liens bijectifs (cartes planaires non-séparables)
- Aspect algébrique (algèbre de Hopf, espace des coinvariants diagonaux, etc.)

Sous-groupe parabolique et quotient parabolique de $\mathfrak{S}_n$

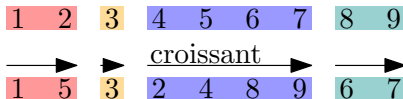
Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ une composition de n .

Sous-groupe parabolique : $\mathfrak{S}_{\alpha_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\alpha_k} \subset \mathfrak{S}_n$.

Généré par s_i sauf les $i = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_j$.



Quotient parabolique : $\mathfrak{S}_n^\alpha = \mathfrak{S}_n / (\mathfrak{S}_{\alpha_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\alpha_k})$.



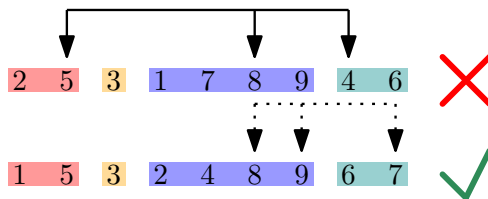
Ordre croissant dans chaque bloc

Permutation parabolique évitant 231

Motif $(\alpha, 231)$: trois indices $i < j < k$ dans trois blocs distincts avec

- $w(k) < w(i) < w(j)$,
- $w(k) + 1 = w(i)$.

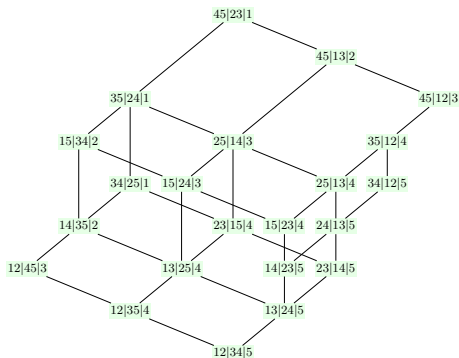
Permutation $(\alpha, 231)$ évitant : sans motif $(\alpha, 231)$



$\mathfrak{S}_n^\alpha(231)$: l'ensemble des permutation $(\alpha, 231)$ -évitant

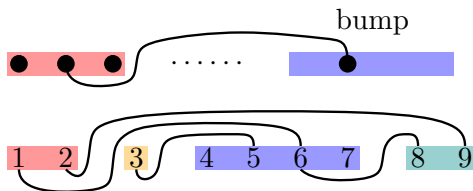
Treillis de Tamari parabolique

Treillis de Tamari parabolique $\mathcal{T}_n^\alpha$ = l'ordre faible restreint à $\mathfrak{S}_n^\alpha(231)$
(Mühle et Williams 2018+)



Aussi pour les autres types !

Partition parabolique sans croisement



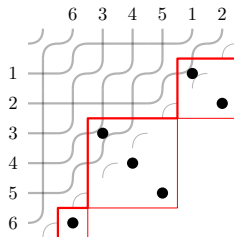
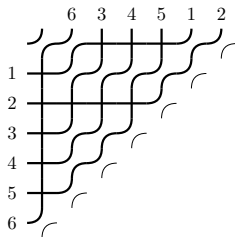
$$\{1, 6, 8\}, \{2, 9\}, \{3, 5\}, \{4\}, \{7\}$$

α -partition parabolique sans croisement : un ensemble de bumps, ≤ 1 entrant/sortant, sans bumps croisés

Pipe dreams ...

Pipe dreams : un réseau triangulaire de **croix** et de **coudes**.

Algèbre de Hopf sur pipe dreams (Bergeron, Ceballos et Pilaud, 2018+).

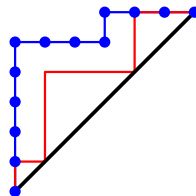
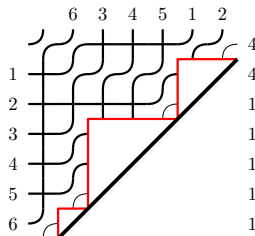
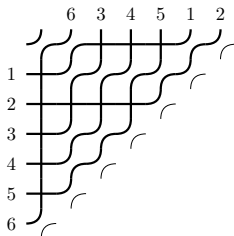


Les dim. des comps. homogènes d'une sous-algèbre (générée par les identités) = $\#$ pipe dreams avec une permutation "identité par bloc"

... et les paires de rebonds

Paire de rebond : un chemin de Dyck au-dessus d'un chemin de rebond

- **Chemin de rebond** : donné par la permutation
- **Chemin au-dessus** : autant de points que de coudes à l'extérieur à chaque niveau



Proposition (Bergeron, Ceballos et Pilaud, 2018+)

Les pipe dreams dont la permutation est une "identité par bloc" de taille n sont en bijection avec les paires de rebond d'ordre n .

Comptage et relations ?

Les objets

- Permutations α -paraboliques évitant 231,
- α -partitions paraboliques sans croisement,
- Paires de rebond indicé par α .

Le comptage

- Tous les trois en bijection (Mühle et Williams 2018+), mais pas facile
- Comptage expérimental en sommant sur tout α de n :

1, 1, 3, 12, 57, 301, 1707, 10191, 63244, 404503, ... (OEIS A151498)

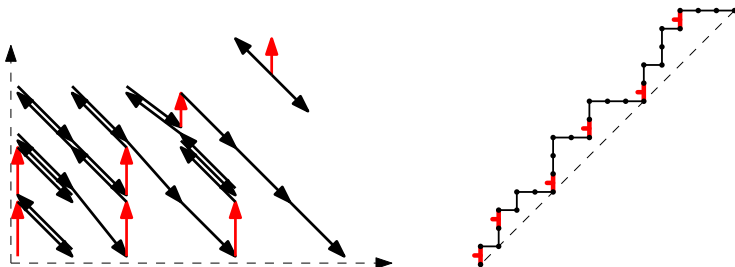
= certains chemins dans le quadrant

- Un lien bijectif ? Une structure plus directe ?

Les chemins marqués et les paire raide

Les chemins de quadrant : $\{(1, 0), (1, -1), (-1, 1)\}$, terminant sur $y = 0$.

Compté dans (Bousque-Mélou et Mishna, 2010)

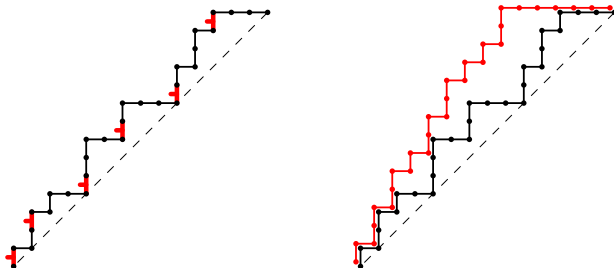


En bijection avec les chemins de Dyck marqués par niveau :

niveau $\leq$ marquages rencontrés

Les chemins marqués par niveau et les paires *steep*

Paires *steep* : 2 chemins de Dyck emboîtés, celui au-dessus sans EE sauf à la fin



Bijection :

- Chemin au-dessous : chemin sans marquage
- Chemin au-dessus : lire les N , marqué $\rightarrow N$, non-marqué $\rightarrow EN$

La conjecture Steep-Bounce

Conjecture (Bergeron, Ceballos et Pilaud 2018+, Conjecture 2.2.8)

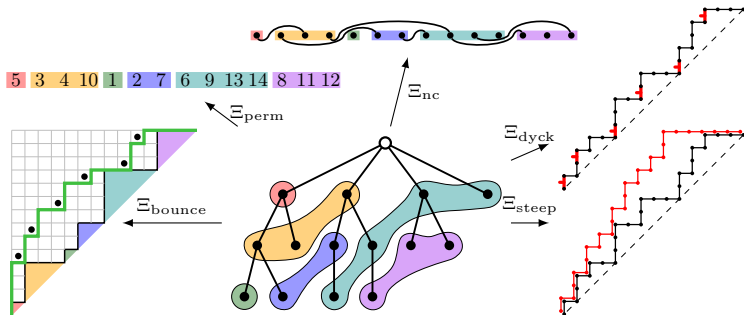
Les deux ensembles suivants sont de la même taille :

- *les paires de rebond d'ordre n avec k régions ;*
- *les paires steep d'ordre n avec k pas E à $y = n$.*

Une preuve donnera le comptage des tous ces objets (pipe dreams et Catalan parabolique)

Cas $k = 1, 2, n - 1, n$ déjà traité.

Un schéma des bijections



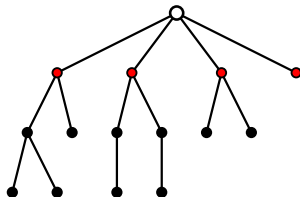
Arbre colorié à gauche

- T : arbre plan avec n nœuds non racine ;
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$: composition de n

Nœuds actifs : non-colorié, mais le parent est colorié ou la racine.

Algorithme de coloriage : Pour i de 1 à k ,

- S'il y a moins que α_i nœuds actifs, alors échouer ;
- Sinon, colorier les α_i à gauche en couleur i .



$$\alpha = (\textcolor{red}{1}, 3, 1, 2, 4, 3) \vdash 14$$

Quand réussi, c'est un **arbre colorié à gauche**.

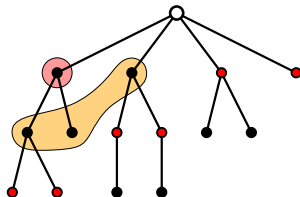
Arbre colorié à gauche

- T : arbre plan avec n nœuds non racine ;
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$: composition de n

Nœuds actifs : non-colorié, mais le parent est colorié ou la racine.

Algorithme de coloriage : Pour i de 1 à k ,

- S'il y a moins que α_i nœuds actifs, alors échouer ;
- Sinon, colorier les α_i à gauche en couleur i .



$$\alpha = (1, 3, \mathbf{1}, 2, 4, 3) \vdash 14$$

Quand réussi, c'est un **arbre colorié à gauche**.

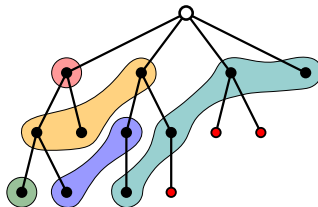
Arbre colorié à gauche

- T : arbre plan avec n nœuds non racine ;
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$: composition de n

Nœuds actifs : non-colorié, mais le parent est colorié ou la racine.

Algorithme de coloriage : Pour i de 1 à k ,

- S'il y a moins que α_i nœuds actifs, alors échouer ;
- Sinon, colorier les α_i à gauche en couleur i .



$$\alpha = (1, 3, 1, 2, 4, \mathbf{3}) \vdash 14$$

Quand réussi, c'est un **arbre colorié à gauche**.

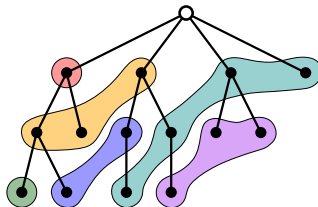
Arbre colorié à gauche

- T : arbre plan avec n nœuds non racine ;
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$: composition de n

Nœuds actifs : non-colorié, mais le parent est colorié ou la racine.

Algorithme de coloriage : Pour i de 1 à k ,

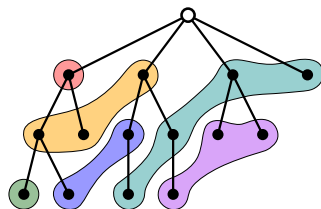
- S'il y a moins que α_i nœuds actifs, alors échouer ;
- Sinon, colorier les α_i à gauche en couleur i .



$$\alpha = (1, 3, 1, 2, 4, 3) \vdash 14$$

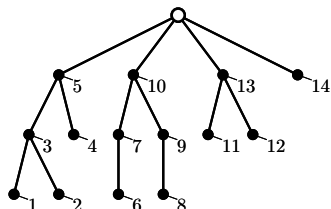
Quand réussi, c'est un **arbre colorié à gauche**.

Vers les permutations



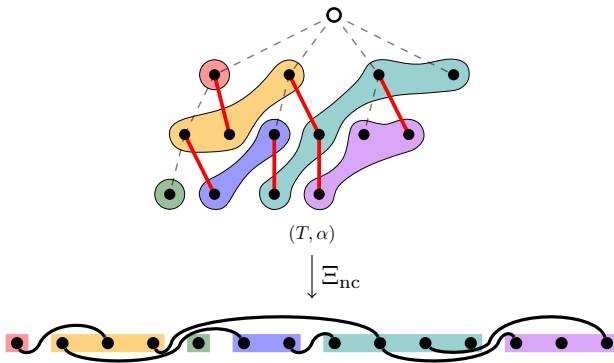
(T, α)

Ξ_{perm}



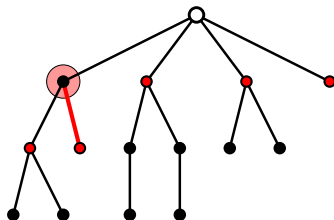
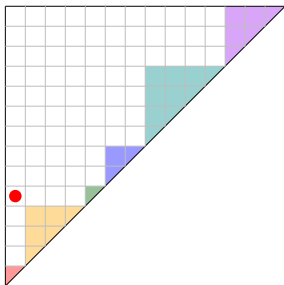
$$\Xi_{\text{perm}}(T, \alpha) = 5 \mid 3 \ 4 \ 10 \mid 1 \mid 2 \ 7 \mid 6 \ 9 \ 13 \ 14 \mid 8 \ 11 \ 12 \in \mathfrak{S}_n^\alpha(231)$$

Vers les partitions paraboliques sans croisement



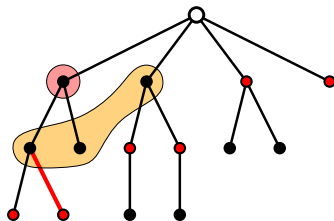
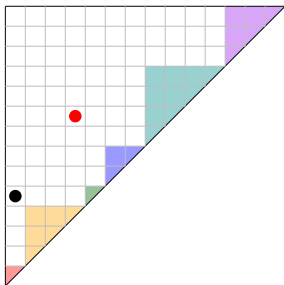
- Arbre $\rightarrow$ partition : applatir
- Partition $\rightarrow$ arbre : regarder le ciel

Vers les paires de rebonds



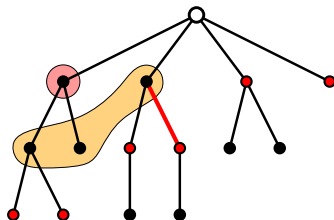
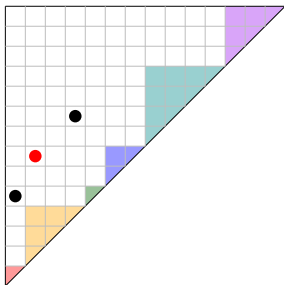
$$\alpha = (1, 3, 1, 2, 4, 3) \vdash 14$$

Vers les paires de rebonds



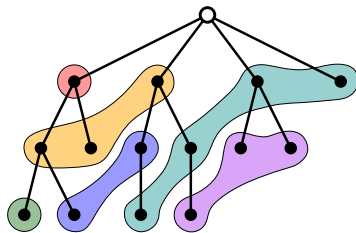
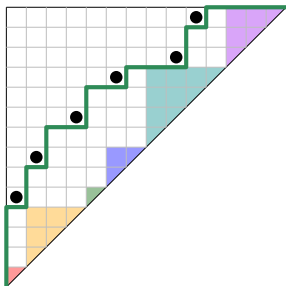
$$\alpha = (1, 3, 1, 2, 4, 3) \vdash 14$$

Vers les paires de rebonds



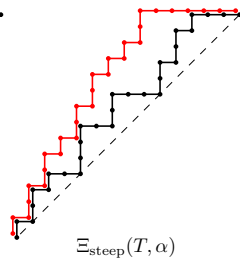
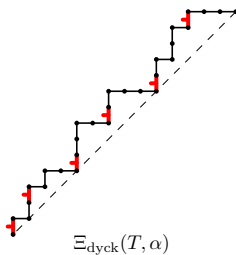
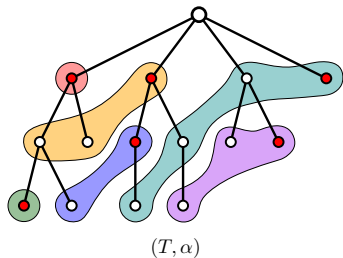
$$\alpha = (1, 3, 1, 2, 4, 3) \vdash 14$$

Vers les paires de rebonds



$$\alpha = (1, 3, 1, 2, 4, 3) \vdash 14$$

Vers les paires *steep*



Le théorème Steep-Bounce

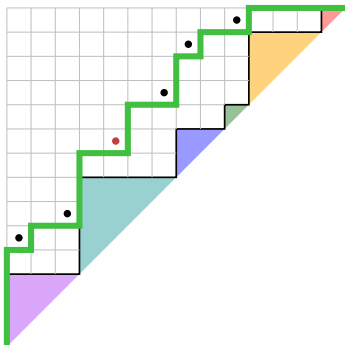
Théorème (Ceballos, F., Mühle 2018+)

Il y a une bijection naturelle Γ entre les deux ensembles suivants :

- *les paires de rebond d'ordre n avec k régions ;*
- *les paires steep d'ordre n avec k pas E à $y = n$.*

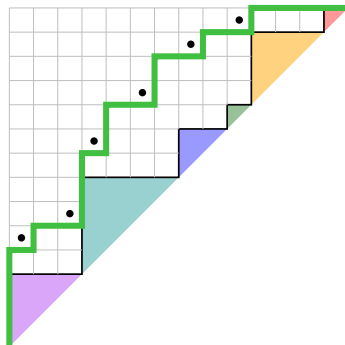
Donc on sait tout compter !

Une bijection entre les deux Tamaris



5 3 4 10 1 2 9 6 8 13 14 7 11 12

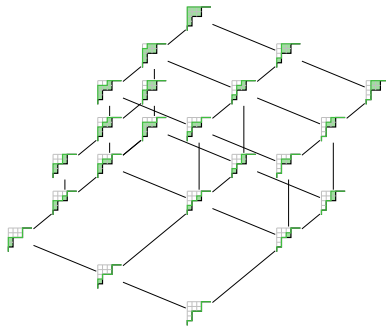
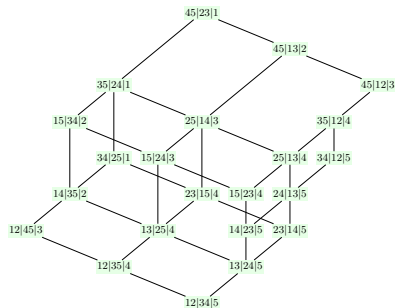
$\leq_{\overline{\nu}_\alpha}$



$>_L$

5 3 4 10 1 2 7 6 9 13 14 8 11 12

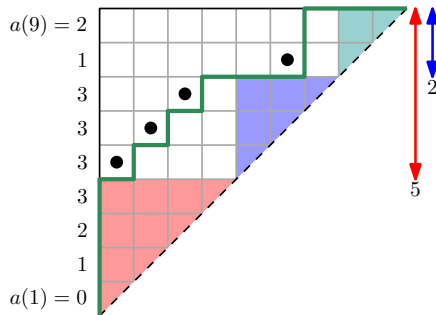
L'un est isomorphe au dual de l'autre



Théorème (Ceballos, F., Mühle 2018+)

Le treillis parabolique indicé par α est isomorphe au treillis de ν -Tamari avec $\nu = N^{\alpha_1} E^{\alpha_1} \dots N^{\alpha_k} E^{\alpha_k}$.

Détour sur la combinatoire de q, t -Catalan



$$\text{area}(D) = \sum_i a(i) = 18$$

$$\text{bounce}(D) = \sum_i (i-1)\alpha_i = 7$$

$$\text{dinv}(D) = \#\{(i,j) \mid i < j, (a(i) = a(j) \vee a(i) = a(j) + 1)\} = 17$$

Une symétrie non triviale

Théorème (Garsia et Haiman 1996, Haiman 2001)

En sommant sur tout chemin de Dyck D d'ordre n , on a

$$\sum_D q^{\text{area}(D)} t^{\text{bounce}(D)} = \sum_D q^{\text{bounce}(D)} t^{\text{area}(D)}.$$

La preuve passe par la série de Hilbert de l'espace des coinvariants diagonaux à deux jeux de variables.

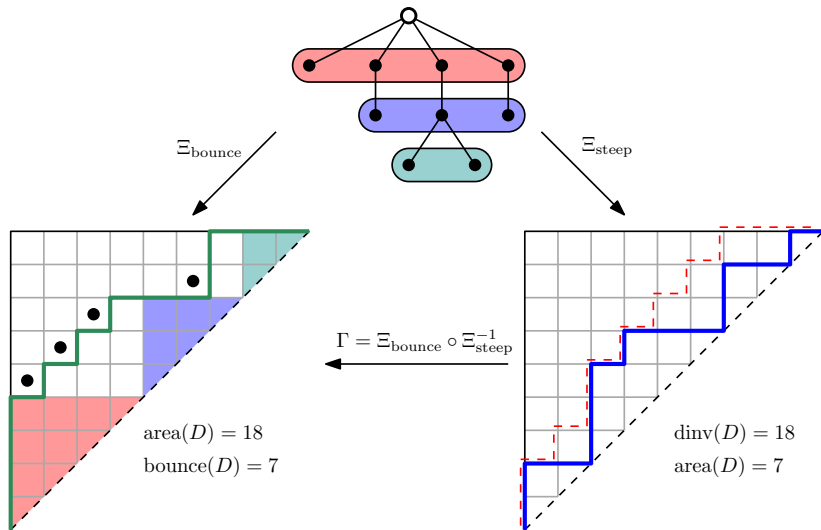
Pas encore de preuve combinatoire !

Théorème (Haglund 2008, Preuve du Théorème 3.15)

Il y a une bijection ζ sur les chemins de Dyck qui transfère les paires de statistiques

$$(\text{dinv}, \text{area}) \rightarrow (\text{area}, \text{bounce}).$$

Notre transformation zeta



Notre transformation zeta, version Steep-Bounce

Théorème (Ceballos, F., Mühle 2018+)

Il y a une bijection naturelle Γ entre les deux ensembles suivants :

- *les paires de rebond d'ordre n avec $r - 1$ rebonds ;*
- *les paires steep d'ordre n avec r pas E à $y = n$.*

ζ = cas spécial de Γ , où les paires de rebonds et les paires steep construits de façon gourmande

Une généralisation à explorer !

Les pistes à suivre

- Comment se transfèrent les statistiques, et lesquelles ?
- Action des symétries ?
- Implication dans l'espace des coinvariants diagonaux ?
- *etc.* ?

Les pistes à suivre

- Comment se transfèrent les statistiques, et lesquelles ?
- Action des symétries ?
- Implication dans l'espace des coinvariants diagonaux ?
- *etc.* ?

Merci de votre attention !