Prolongement “analytique” de polytopes.

Michèle Vergne
Travail commun avec Nicole Berline

6 décembre 2012

Famille de Polytopes

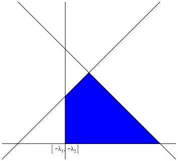
Soit V un espace vectoriel réel de dimension n et soit

$$\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N]$$

une liste de formes linéaires sur V, telle que le cône engendré par les μ_i soit égal à V^*.
Soit $b = [b_1, b_2, \dots, b_N] \in \mathbb{R}^N$ une liste de N nombres réels.
On considère le polytope défini par les N inéquations linéaires :

$$\mathfrak{p}(b) \quad := \quad \{x \in V;\ \langle \mu_k, x \rangle \leq b_k\}.$$

On fixe une valeur initiale b^0. On suppose que la valeur initiale b^0 est générique, c'est à dire à chaque sommet de $\mathfrak{p}^0 = \mathfrak{p}(b^0)$, exactement n de ces inéquations deviennent des égalités.



Valeur $b = [0, 0, 3, 2]$ générique à gauche pour les inégalités $-x_1 \leq b_1, -x_2 \leq b_2, x_1 + x_2 \leq b_3, x_2 - x_1 \leq b_4$.

Le problème

Lorsqu'on varie b dans l'ouvert $\tau_0 \subset \mathbb{R}^N$ autour de b^0, où b reste générique, il est intuitivement clair que $\mathfrak{p}(b)$ garde la même forme, et que certaines quantités dépendant du paramètre $b \in \mathbb{R}^N$ vont varier de manière analytique lorsque b varie dans τ_0.
Par exemple, le volume de $\mathfrak{p}(b)$ est donné par une fonction polynomiale $E(b)$ lorsque b varie dans τ_0.
Quelle est la signification de la valeur de ce polynôme en b, lorsque b est loin de b^0 ? ?

Dans l'exemple précédent $vol(\mathfrak{p}(b)) =$

$$\frac{1}{4}(b_1+b_2+b_3)^2+\frac{1}{2}(b_1+b_2+b_3)(b_4+b_2-b_1)-\frac{1}{4}(b_4+b_2-b_1)^2$$

tant que $b_1 - b_2 - b_4 > 0$ et $2b_2 + b_3 + b_4 > 0$.
Quelle est la signification de la valeur de ce polynôme en b, lorsque b est loin de b^0 ? ?

de plus, les polynômes d'Ehrhart

Si V est muni d'un réseau Λ , et si les μ_i sont rationnels, on veut aussi étudier la fonction nombre de points entiers dans $\mathfrak{p}(b)$

$$E_\Lambda(b) = cardinal(\mathfrak{p}(b) \cap \Lambda)$$

lorsque b varie. Le théorème (Ehrhart, Dahmen-Micchelli,$\cdots$) (dont nous allons voir la raison plus tard) est que cette fonction $b \to E_\Lambda(b)$ est donnée sur $\tau_0 \cap \mathbb{Z}^N$ par un quasi-polynôme, c'est-à-dire une fonction polynomiale de b à coefficients dans les fonctions périodiques sur $\mathbb{Z}^n/q\mathbb{Z}^n$, pour un q convenable.

Dans l'exemple précédent $E_\Lambda(b)) =$

$$\frac{1}{4}(b_1+b_2+b_3)^2+\frac{1}{2}(b_1+b_2+b_3)(b_4+b_2-b_1)-\frac{1}{4}(b_4+b_2-b_1)^2$$

$$+(b_1+b_2+b_3)+\frac{1}{2}(b_4+b_2-b_1)+\frac{7}{8}+\frac{1}{8}*(-1)^{(2b_2+b_3+b_4)}$$

tant que $b_1 - b_2 - b_4 > 0$ et $2b_2 + b_3 + b_4 > 0$.
Quelle est la signification géométrique de $E_\Lambda(b)$, lorsque b est loin de b^0 ? ?

Plus généralement on veut intégrer une fonction analytique h, sur $\mathfrak{p}(b)$ (ou sommer ...) prolonger cette fonction $b \to \int_{\mathfrak{p}(b)} h(x)dx$ pour tout paramètre $b \in \mathbb{R}^N$ (ou $b \in \mathbb{Z}^N$) et comprendre la signification géométrique du prolongement.

Prolongement “analytique” de Varchenko

Varchenko a montré qu’il existait pour tout paramètre $b \in \mathbb{R}^N$ une fonction $A(b) : V \to \mathbb{Z}$, combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de fonctions caractéristiques de polytopes semi-ouverts tel que POUR TOUT paramètre $b \in \mathbb{R}^N$

$$E(b) = \int_V A(b)(x)dx.$$

(Donc si $A(b) = \sum c_i[P_i]$ avec des $c_i \in \mathbb{Z}$ alors $E(b) = \sum c_i vol(P_i)$).
ET $E_\Lambda(b)$ dans le contexte des polynômes d’Ehrhart

$$E_\Lambda(b) = \sum_{x \in \Lambda} A(b)(x)$$

Naturellement $A(b)$ dépend du polytope initial, et on appelle $A(b)$ la continuation “analytique” de (la fonction caractéristique de $[\mathfrak{p}(b)]$ ($b \in \tau_0$) avec valeur initiale $[\mathfrak{p}^0]$.

Prolongement “analytique” d’un intervalle

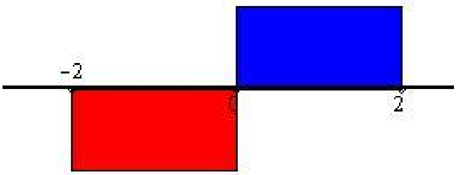


FIGURE: ROUGE $= -1$.

$$A(b) = [0, b] \text{ si } b \geq 0,$$

$$A(b) = -]b, 0[\text{ si } b < 0.$$

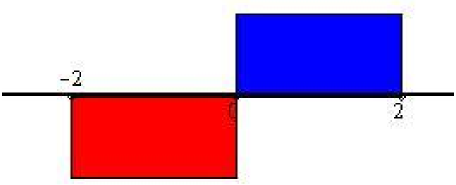


FIGURE: ROUGE $= -1$.

Par exemple si $b \geq 0$, et dans $\mathbb{Z}$, on a

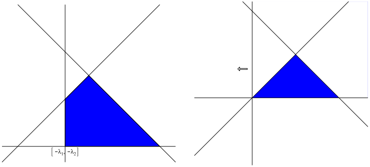
$$E(b) = b, \qquad E_\Lambda(b) = b + 1$$

Ces deux formules sont aussi vraies pour $b < 0$ si on calcule sur $A(b)$. (pas de points entiers dans l'intervalle ouvert si $b = -1$).

ICI on voit qu'il faut prendre l'intervalle ouvert.

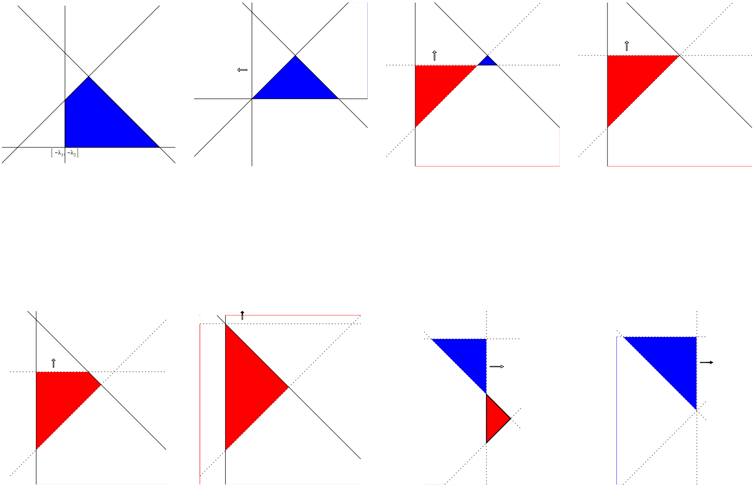
Variation de $\mathfrak{p}(b)$

Lorsque b varie, le type combinatoire de $\mathfrak{p}(b)$ varie.



Après, lorsque la ligne verticale se déplace vers la gauche, l'inégalité correspondante devient redondante. Le polytope $\mathfrak{p}(b)$ reste constant et égal au triangle bleu, et il apparait des "faux sommets."

Prolongement du tétragone



Sommets

Définition Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des sous ensembles $B \subseteq \{1, \ldots, N\}$, tels que $(\mu_j, j \in B)$ est une base de V^*.

Un ensemble $B \in \mathcal{B}$ détermine une application $b \mapsto s_B(b) : \mathbb{R}^N \to V : \langle \mu_j, s_B(b) \rangle = b_j$ pour $j \in B$.

Le point $s_B(b) \in V$ est le point où les inégalités deviennent des égalités. Mais $s_B(b)$ est un vrai ou faux sommet de $\mathfrak{p}(b)$.
Soit $\mathcal{B}^0$ l'ensemble des sous ensembles B correspondant aux vrais sommets de $\mathfrak{p}^0$. Il faut donc que $\langle \mu_k, s_B(b^0) \rangle < b_k^0$ pour tous les $k \notin B$.
On voit que si b est dans l'ouvert τ_0 où toutes ces inégalités (pour $B \in \mathcal{B}^0$, et $k \notin B$) sont strictement négatives, les sommets de $\mathfrak{p}(b)$ sont les $s_B(b)$, pour $B \in \mathcal{B}_0$.
ILS VARIENT LINEAIREMENT AVEC b (pour $b \in \tau_0$).

Egalité de Brianchon Gram

Pour tout polytope $\mathfrak{p} \subset V$, on a l'égalité de fonctions sur V :

$$[\mathfrak{p}] = \sum_{faces} (-1)^{\dim face} [T_{face}(\mathfrak{p})].$$

La somme est sur toutes les faces de $\mathfrak{p}$ et $T_{face}(\mathfrak{p})$ est le cône tangent au polytope $\mathfrak{p}$ pour une face.

Brianchon Gram,à partir des sous ensembles de $[1, 2, \dots, N]$.

Appliquons cette formule à $\mathfrak{p}(b)$ pour $b \in \tau_0$ (voisinage ouvert de b^0).
Soit $\mathcal{F}^0$ l'ensemble des sous ensembles G de $[1, 2, \dots, N]$ pour lesquels il existe $B \in \mathcal{B}^0$ avec $G \subset B$. Ces sous ensembles indexent les faces de $\mathfrak{p}(b)$.
Notons $Cone(G, b) = \{x, \langle \mu_j, x \rangle \leq b_j, j \in G\}$.
Brianchon-Gram s'écrit simplement : pour $b \in \tau_0$:

$$[\mathfrak{p}(b)] = \sum_{G \in \mathcal{F}^0} (-1)^{n-|G|} [Cone(G, b)].$$

ABC

$$\chi_\Delta = \chi_{\Gamma_A} + \chi_{\Gamma_B} + \chi_{\Gamma_C} - \chi_{\Gamma_{AB}} - \chi_{\Gamma_{AC}} - \chi_{\Gamma_{BC}} + 1_{\mathbb{R}^2},$$

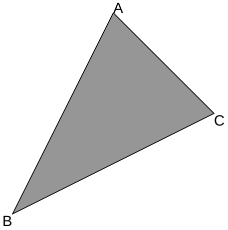
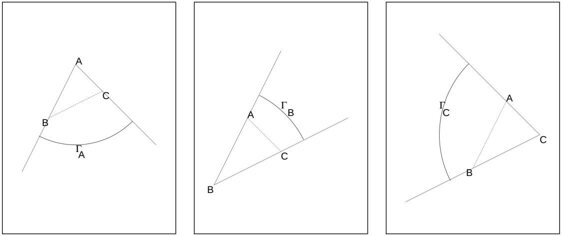
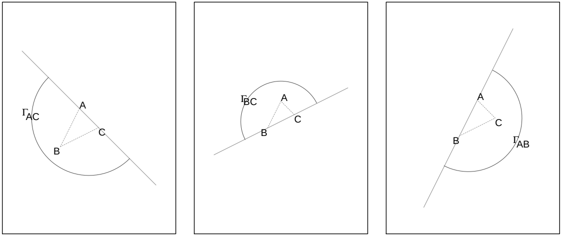


FIGURE: Le triangle $\Delta = ABC$

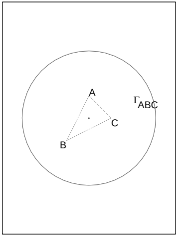
Cones tangents aux sommets



MOINS cones tangents aux arêtes



plus ESPACE ENTIER



On obtient ABC.

Prolongement “analytique”

Donc pour $b \in \tau_0$,

$$[\mathfrak{p}(b)] = \sum_{G \in \mathcal{F}^0} (-1)^{n-|G|} [Cone(G, b)].$$

Définition évidente(Berline-Vergne)
Pour tout $b \in \mathbb{R}^N$, on définit la fonction $A(b)$ par

$$A(b) = \sum_{G \in \mathcal{F}^0} (-1)^{n-|G|} [Cone(G, b)].$$

En particulier, on bouge les sommets linéairement en fonction de b, et on déplace leurs cônes tangents avec eux.
(Ce n’est pas la définition de Varchenko qui dépend du choix d’une forme linéaire générique non canonique, et n’utilise que des cônes saillants).

Prolongement “analytique” d’un intervalle, retour

$$b > 0$$

BRIANCHON-GRAM

$$[0, b] = [-\infty, b] + [0, \infty] - [\mathbb{R}]$$

On définit donc

$$A(b) = [-\infty, b] + [0, \infty] - [\mathbb{R}]$$

Pour $b = 0$, c’est un point (continuité de Brianchon-Gram.)
Pour $b < 0$, $A(b) = -]b, 0[$

Pour $b \in \tau_0$ (voisinage de b^0), d'après Brianchon-Gram,

$$A(b) = [\mathfrak{p}(b)].$$

En effet tous les $b \in \tau_0$ a pour ensemble de sommets $s_B(b), B \in \mathcal{B}^0$.

Théorème. POUR TOUT $b \in \mathbb{R}^N$, $A(b)$ est une combinaison linéaire (à coefficients dans $\mathbb{Z}$) de fonctions caractéristiques de polytopes de différentes dimensions et vérifie les propriétés voulues de "continuation analytique".

Prolongement “analytique”, bis

Il n’est pas évident que $A(b)$ soit égale à une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d’ensembles bornés, car nous l’avons écrite comme somme de fonctions caractéristiques de cônes.
Mais, ceci démontré, l’analycité de $E(b)$ est évidente. En effet, le volume d’un polytope $E(b)$ ou l’intégrale d’un polynôme sur $\mathfrak{p}(b)$, ou d’une exponentielle, se calcule à partir des cônes tangents aux sommets, c’est à dire les cones associés à $B \in \mathcal{B}^0$. De même pour les sommes sur les points entiers, si le polytope est rationnel. (Formule de Brion)

Formule de Brion pour $\Delta = ABC$

L'intégrale $\int_\Delta e^{\langle y,x\rangle} dx_1 dx_2$ est égale à :

$$\frac{e^{\langle A,y\rangle}}{\langle y, A-B\rangle\langle y, A-C\rangle}|AB \wedge AC|$$

$$+\frac{e^{\langle B,y\rangle}}{\langle y, B-A\rangle\langle y, B-C\rangle}|BA\wedge BC|+\frac{e^{\langle C,y\rangle}}{\langle y, C-A\rangle\langle y, C-B\rangle}|CA\wedge CB|$$

où $\langle A, y\rangle = a_1 y_1 + a_2 y_2, (a_1, a_2)$ étant les coordonnées de $A, (y_1, y_2)$ celles de y.

On est ramené à étudier la fonction $b \to s_B(b) + \mathfrak{c}$ où $\mathfrak{c}$ est un cone fixe, et des intégrales (des sommes) d'exponentielles dessus. Tout se Calcule "Explicitement".
Ceci démontre que

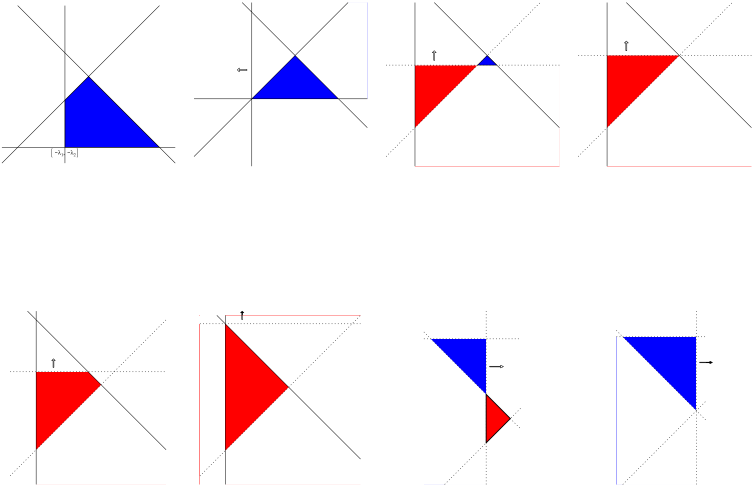
$$E(b) = \int_V A(b)(x)dx$$

est un polynôme en $b \in \mathbb{R}^N$ et similairement

$$E_\Lambda(b) = \sum_{x \in \Lambda} A(b)(x)$$

est un quasi polynôme en $b \in \mathbb{Z}^N$.

Prolongement du tétragone



Formule pour $A(b)$ comme somme de polytopes

Il faut comprendre où le polytope $\mathfrak{p}(b)$ change dramatiquement.. . Donc il faut regarder où l'arrangement d'hyperplans $\langle \mu_k, x\rangle = b_k$ ne sera plus générique : plus de n hyperplans se coupent.
Introduisons les circuits de longueur $n+1$ pour les μ_i :

$$\mathcal{C} = \{C \subset [1, 2, \ldots, N]\}$$

tels que Cardinal $C = n+1$, et tels que les $\mu_i, i \in C$ engendrent V^*. On a donc une unique relation linéaire (a proportionalité près).

$$\sum_{i \in C} c_i \mu_i = 0.$$

Définissons $W(C) = \sum_{i \in C} c_i b_i$: $W(C)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^N$. On note H_C l'hyperplan $W(C) = 0$.

(Petites) Chambres

Soit $\mathcal{H}$ la collection d'hyperplans H_C de $\mathbb{R}^N$.
Si $b \in H_C$, alors les $n+1$-hyperplans $\langle \mu_i, x \rangle = b_i, i \in C$ se coupent.
On note τ une composante connexe de $\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{H}$.
Si b varie dans une composante connexe τ de $\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{H}$, le polytope $\mathfrak{p}(b)$ ne va pas changer de forme.
On appellera τ une (petite) chambre. (On peut être plus précis et définir des plus grandes chambres où le polytope $\mathfrak{p}(b)$ ne change pas de forme..).

Murs pour τ_0

Soit τ_0 la composante connexe de $\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{H}$ à laquelle appartient b^0 qui définit notre polytope initial $\mathfrak{p}^0$. Alors $\overline{\tau}_0$ est limitée par des hyperplans de la famille $\mathcal{H}$. Voici lesquels :
Soit $B \in \mathcal{B}^0$ et $k \notin B$. Alors $C = B \cup k$ est un circuit de longueur $n+1$. On a une équation

$$\sum_{i \in C} c_i \mu_i = 0.$$

Soit

$$w_C = \{\sum c_i b_i = 0\}$$

l'équation correspondante. On normalise cette equation w_C de telle sorte que $w_C(b^0) > 0$.
Alors $H = H_C$ est un mur pour la composante connexe τ_0 et tous les murs de τ_0 sont obtenus ainsi en variant $B \in \mathcal{B}_0$ et $k \notin B_0$.

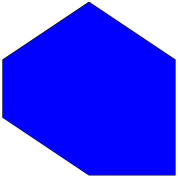
Continuité de Brianchon Gram

Théorème Si $b \in \overline{\tau_0}$, $A(b) = [\mathfrak{p}(b)]$

Ce n'est pas évident car $A(b)$ est défini à partir des faces de $\mathfrak{p}^0$.

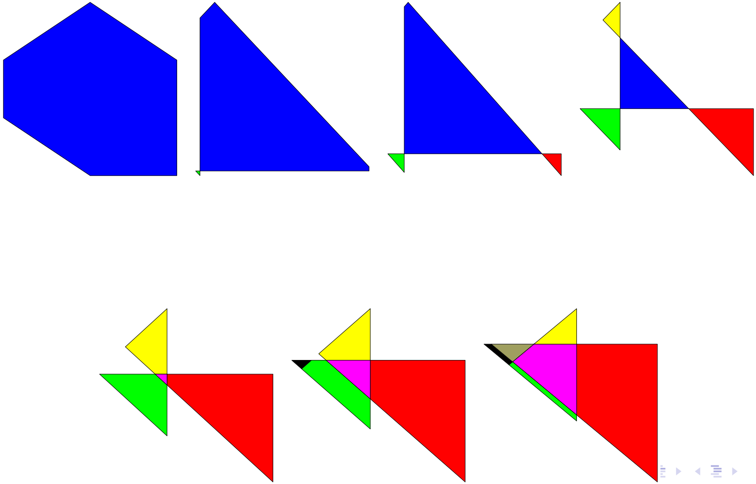
Formules de saut lorsque *b* franchit un mur

EXAMPLE :



Un petit polytope montre son nez

bleu $= 1$, *jaune* $:= -1$, *rouge* $:= -1$, *vert* $:= -1$, *noir* $:= -1$, *kaki* $= -1$, *magenta* $:= -2$.



La formule de saut

Soient τ_0,τ_1 deux composantes connexes de $\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{H}$, séparées par $H = \sum c_i b_i = 0$.
On regarde $Flip = \{j, c_j > 0\}$ un sous ensemble de $[1, 2, \ldots, N]$.
On introduit le polytope semi-ouvert

$$\mathfrak{p}(Flip, b) = \begin{cases} \langle \mu_j, x \rangle > b_j \text{ if } j \in Flip \\ \langle \mu_i, x \rangle \leq b_i \text{ if } i \notin Flip \end{cases} .$$

C'est celui qui arrive..
Théorème (Berline-Vergne)
Si b appartient à la chambre adjacente τ_1,

$$A(b) = [\mathfrak{p}(b)] - (-1)^{|Flip|}[\mathfrak{p}(Flip; b)].$$

Cette formule est une version ensembliste des résultats de Paradan (Jump formulae in Hamiltonian geometry ; arXiv :math/0411306.)

Conséquences

Soit h une fonction polynômiale sur V. Il existe une fonction polynomiale $E(h,\tau_0)(b)$ sur $\mathbb{R}^N$ telle que

$$\int_{\mathfrak{p}(b)} h(x)dx = E(h,\tau_0)(b)$$

lorsque $b \in \tau_0$.
Soit $E(h,\tau_0)(b)$ le polynome sur $\mathbb{R}^N$ qui vaut $\int_{\mathfrak{p}(b)} h(x)dx$ lorsque $b \in \tau_0$.
Alors si $b \in \tau_1$,

$$E(h,\tau_0)(b) - E(h,\tau_1)(b) = (-1)^{|Flip|} \int_{\mathfrak{p}(Flip,b)} h(x)dx$$

Formule de saut de Paradan, et calcul par résidus par Boysal-Vergne.

Encore plus amusant

On suppose V avec reseau Λ, et on suppose $\mu_j \in \Lambda^*$ de sorte que $\mu_j(\lambda) \in \mathbb{Z}$ si $\lambda \in \Lambda$.
Il existe un quasi-polynôme $E_\Lambda(h, \tau_0)(b)$ sur $\mathbb{Z}^N$ telle que

$$\sum_{x \in \mathfrak{p}(b) \cap \Lambda} h(x) = E_\Lambda(h, \tau_0)(b)$$

si $b \in \tau_0$.
ALORS si $b \in \tau_1 \cap \mathbb{Z}^N$, on a :

$$E_\Lambda(h, \tau_0)(b) - E_\Lambda(h, \tau_1)(b) = (-1)^{|Flip|} \sum_{x \in \mathfrak{p}(Flip, b)} h(x).$$

DE PLUS, IL EST IMMEDIAT DE VOIR :
Si b satisfait l'équation

$$\sum_i c_i b_i > - \sum_{i \in Flip} c_i$$

alors $\mathfrak{p}(Flip, b)$, n'a aucun point entier si $b \in \mathbb{Z}^N$.
On obtient donc des relations de divisibilité

EXEMPLE : Considérons

$$\mathfrak{p}(b) = \{-x_i \leq b_i, \sum x_i \leq b_{n+1}\}$$

définit par $n+1$ inégalités. Si $\tau_0 = \{\sum_{i=1}^{n+1} b_i > 0\}$, $\mathfrak{p}(b)$ est un simplexe. Si $\tau_1 = \{\sum_{i=1}^{n+1} b_i < 0\}$, $\mathfrak{p}(b)$ est vide.
Le polynôme $E_\Lambda(b)$ qui calcule le nombre de points dans $\mathfrak{p}(b)$ pour $\sum_{i=1}^{n+1} b_i > 0$ calcule encore le nombre de points de $\mathfrak{p}(b)$ pour $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0, -1, -2, \ldots, -n$.
Evidemment, on sait le calculer directement car

$$E_\Lambda(b) = \frac{1}{n!}(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n+1} + 1) \cdots (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n+1} + n).$$

Variétés toriques

On considère V muni d'un réseau Λ. Soit T le tore dont le groupe des charactères est Λ.
Soit $\mathfrak{p}^0 \subset V$ à sommets dans Λ et soit $b \in \tau_0 \cap \Lambda$.
Alors on peut construire une variété torique M munie de l'action du tore T et un fibré en lignes T-équivariant $\mathcal{L}_b$ sur M telle que l'espace des sections holomorphes $H^0(M, \mathcal{L}_b) = \oplus_{\lambda \in \Lambda \cap \mathfrak{p}(b)} \mathbb{C} s_\lambda$ avec s_λ une section holomorphe de poids λ lorsque b varie dans τ_0. Autrement dit, les points entiers de $\mathfrak{p}(b)$ indexent une base de $H^0(M, \mathcal{L}_b)$.

Si $b \in \mathbb{Z}^N$, mais n'est plus dans τ_0 le fibré $\mathcal{L}_b$ n'est plus ample.
Si on regarde le module alterné

$$\sum_i (-1)^i H^{0,i}(M, \mathcal{L}_b) = \sum m(b)(\lambda) e^{i\lambda},$$

alors d'après le théorème de Riemann-Roch

$$m(b)(\lambda) = A(b)(\lambda).$$

On a donc donné une signification géométrique au support de ce module $\sum_i (-1)^i H^{0,i}(M, \mathcal{L}_b)$.
Il serait intéressant de comprendre le support de chaque terme, mais...