Variables échangeables, martingales et mesures non-destructives en mécanique quantique

MICHEL BAUER
Résumé par PHILIPPE BIANE

Séminaire de Combinatoire Philippe Flajolet
Institut Henri Poincaré, séance du 27 septembre 2012

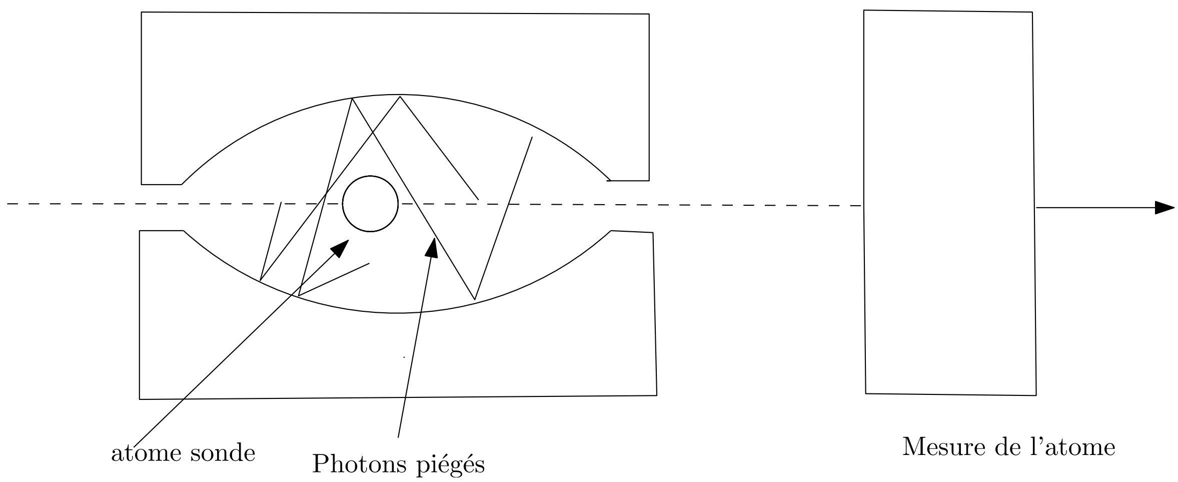
Résumé

Plus de 80 ans après la découverte des lois de la mécanique quantique, celles-ci continuent de susciter l'étonnement. La notion de mesure en particulier, reste très mystérieuse. Des expériences récentes très simples et belles, que nous décrirons brièvement, permettent de lever légèrement un coin du voile. Après avoir présenté, pour des non-physiciens, les notions de base de la mécanique quantique, nous montrerons pourquoi l'interprétation de ces expériences est étroitement liée à la théorie des variables échangeables, au théorème de de Finetti et au théorème de convergence des martingales.

1 Introduction

On sait qu'en mécanique quantique il est impossible de mesurer un système sans interférer avec lui. En fait la plupart des mesures entraînent une destruction du système étudié. Néanmoins, avec un peu d'ingéniosité, on arrive à mettre au point des mesures indirectes qui permettent de préserver le système quantique observé. Un exemple est celui du comptage des photons dans une cavité.

On dispose d'un petit nombre de photons qui sont piégés dans une cavité au moyen de miroirs réfléchissants. Pour compter leur nombre, on envoie des atomes qui pénètrent dans la cavité, interfèrent avec les photons, puis ressortent de la cavité pour être mesurés.



On déduit de ces mesures une loi de probabilités sur les nombres entiers. Lorsque le nombre d'atomes augmente, cette loi de probabilités converge vers une valeur qui donne le nombre de photons dans la cavité. Nous allons voir que, pour modéliser cette expérience, on a recours à des notions de probabilités qui font intervenir le groupe symétrique.

2 Variables échangeables

2.1 Origines

Une suite de variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ à valeurs dans E, indexées par $\mathbf{N}$, est dite *échangeable* si pour toute permutation σ des indices la suite $X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}, \ldots$ a même loi que la suite originelle.

On peut décrire complètement l'ensemble des lois échangeables sur un ensemble E. Cet ensemble forme un convexe fermé dans l'ensemble des lois de probabilités sur $E^{\mathbf{N}}$. En fait le théorème de de Finetti (dû au mathématicien et philosophe Bruno de Finetti 1905-1986) dit que les points extrémaux de ce convexe sont les lois produits, de la forme : $\mu^{\otimes \mathbf{N}}$ où μ est une loi de probabilités sur E, et que de plus ce convexe est un simplexe : toute loi échangeable M sur $E^{\mathbf{N}}$ admet une unique représentation intégrale

$$M = \int_{P(E)} \xi^{\otimes \mathbf{N}} d\nu(\xi)$$

où $P(E)$ est l'ensemble des lois de probabilités sur E, et ν une loi de probabilités sur $P(E)$. Voici une façon équivalente de décrire la loi M. On commence par choisir au hasard (suivant la loi ν) une mesure de probabilités ξ sur E, puis on prend une suite de variables aléatoires $(X_1, \ldots, X_n, \ldots)$ indépendantes, tirées avec la même loi ξ. Alors la suite de variables $(X_1, \ldots, X_n, \ldots)$ suit la loi M. D'un point de vue pratique, étant donnée une réalisation $(X_1, \ldots, X_n, \ldots)$ de cette loi on peut retrouver la mesure ξ comme limite des mesures empiriques : si $B \subset E$, alors

$$\xi(B) = \lim_{n \to \infty} \frac{1_{X_1 \in B} + \ldots + 1_{X_n \in B}}{n}.$$

Cela provient simplement de la loi des grands nombres.

La probabilité que la loi empirique soit proche de $\mu \neq \xi$ décroit exponentiellement comme $\exp(-n\mathcal{E}(\mu|\xi))$ où $\mathcal{E}(\mu|\xi) \geq 0$ est l'*entropie relative* de μ par rapport à ξ, d'après le théorème de Sanov sur les grandes déviations dans la loi des grands nombres (voir [1]). Cette estimation permet de faire des tests statistiques précis. Dans la suite on suppose que E est un ensemble fini, et que le support de la mesure ν est fini : il n'y a qu'un nombre fini de mesure ξ possibles. Si α est l'une de ces mesures, on appelle alors $Q_k(\alpha)$ la probabilité pour que $\xi = \alpha$, sachant $X_1, \ldots, X_k$. C'est une martingale, qui vaut

$$Q_k(\alpha) = \frac{\nu(\alpha)\alpha(X_1)\ldots\alpha(X_k)}{\sum_\beta \nu(\beta)\beta(X_1)\ldots\beta(X_k)}$$

d'après le théorème de Bayes. D'après le théorème des martingales, $Q_k(\alpha)$ converge vers $1_{\xi=\alpha}$.

On va utiliser ce cadre théorique pour analyser un exemple de mesure non-démolissante en mécanique quantique.

3 Bases de la mécanique quantique

On va rappeler ici les bases mathématiques de la mécanique quantique telles qu'elles ont été formulées par von Neumann [2].

3.1 États d'un système quantique

En mécanique quantique l'état d'un système est décrit par un vecteur (non nul) dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Deux vecteurs proportionnels décrivent le même état. Si $\mathcal{H}_A$ et $\mathcal{H}_B$ décrivent les états possibles de deux systèmes quantiques, alors la réunion des deux systèmes est décrite par l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.

Au cours du temps le système, dans l'état initial $|\varphi\rangle$ évolue suivant $t \to U_t(|\varphi\rangle)$ où $U_t = e^{itH}$ est un opérateur unitaire, et H (le Hamiltonien) est un opérateur auto-adjoint.

Remarquons que si on remplace t par it alors l'opérateur d'évolution devient e^{-tH}, qui pour beaucoup de Hamiltoniens H est un semi-groupe markovien, d'où une analogie avec la théorie des processus de Markov.

3.2 Mesures en mécanique quantique

Les quantités que l'on peut observer sont associées à des opérateurs auto-adjoints (appelés "observables"). En particulier le Hamiltonien est une observable, associée à l'énergie du système.

Lorsqu'on observe un système qui se trouve dans l'état $|\varphi\rangle$, au moyen de l'observable Λ, alors le résultat de la mesure est une variable aléatoire. La loi de cette variable aléatoire se décrit au moyen de la décomposition spectrale de Λ. Si on suppose pour simplifier que Λ a un nombre fini de valeurs propres λ_i, alors la probabilité que la mesure donne le résultat λ_i est égale à $|\pi_i|\varphi\rangle|^2$, où π_i est le projecteur orthogonal sur le sous-espace propre associé à λ_i et on a normalisé à 1 la norme de l'état $|\varphi\rangle$. De plus si le résultat de la mesure a donné la valeur λ_i, alors, à la fin de l'expérience le système se trouve dans l'état $\pi_i|\varphi\rangle$ (c'est *l'effondrement de la fonction d'onde*).

On peut remarquer que si Λ_1 et Λ_2 sont des opérateurs auto-adjoints qui commutent, alors on peut les diagonaliser simultanément. On peut alors effectuer les mesures successives de Λ_1 et Λ_2, pour obtenir les quantités (aléatoires !) α_1, α_2 et l'ordre dans lequel on effectue les mesures n'a pas d'influence sur le résultat : la loi du couple (α_1, α_2) ne dépend pas de cet ordre.

4 Mesures non-démolissantes

Le schéma précédent est celui dit de la "mesure idéale de von Neumann". Il existe aussi des façons indirectes d'effectuer une mesure en mécanique quantique. Elles consistent à utiliser un système couplé vivant dans $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, où $\mathcal{H}_A$ contient l'état à mesurer et le système correspondant à $\mathcal{H}_B$ est appelé la "sonde". L'observable que l'on mesure est de la forme $\Lambda = I_A \otimes \Lambda_B$, ce qui signifie que l'on ne mesure que la sonde. Si le système total, avant la mesure de Λ, est dans un état produit : $|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$, alors après la mesure de Λ le système se retrouve encore dans un état produit $|\psi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$, par contre si l'état initial du système est de la forme

$$\sum_j |\psi_A^j\rangle \otimes |\psi_B^j\rangle \tag{1}$$

il se passe quelque chose : la mesure du système B va perturber le système A. Un état tel que (1), qui ne peut pas se mettre sous forme produit, est dit *intriqué*. Remarquons que la plupart des états sont intriqués.

Reprenons le cas de l'atomes (système B) passant dans la cavité où se trouvent les photons (système A). La mesure du système A à l'aide de la sonde procède donc comme ceci : l'état initial est de la forme $|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$. Lorsque l'atome passe dans la cavité il se produit une interaction, et le système passe dans l'état $U(|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle)$, où U est l'évolution unitaire dûe à l'interaction atome-photons dans la cavité, pendant le temps que dure le passage de l'atome dans la cavité. À la sortie de l'atome, en général, le système est dans un état intriqué. On effectue alors la mesure sur l'atome, correspondant à une observable de la forme $\Lambda = I_A \otimes \Lambda_B$. Si on répète l'expérience l'espace de Hilbert correspondant est $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{photons} \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_n$. Ici $\mathcal{H}_{photons}$ est l'espace de Hilbert des photons dans la cavié, et les $\mathcal{H}_i$ sont les espaces de Hilbert des atomes successifs traversant la cavité. On suppose que la mesure de l'atome k est donnée par une observables $O(k)$ qui n'agit que sur la partie $\mathcal{H}_{photons} \otimes \mathcal{H}_k$ de l'espace total. On suppose de plus que les observables $O(k)$ commutent. Les résultats des mesures successives se comportent alors comme des variables aléatoires classiques échangeables, et on peut appliquer les résultats précédents.

L'expérience qui est ainsi décrite aboutit à un effondrement de la fonction d'onde des photons observé au ralenti.

5 Dernères nouvelles

Serge Haroche, auteur des expériences décrites ci-dessus avec son groupe au Laboratoire Kastler-Brossel (ENS) vient de recevoir le prix Nobel de physique (voir [3]).

Références

[1] Dembo, Amir ; Zeitouni, Ofer Large deviations techniques and applications. Corrected reprint of the second (1998) edition. Stochastic Modelling and Applied Probability, 38. Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[2] von Neumann, John Mathematical foundations of quantum mechanics. Translated by Robert T. Beyer. Princeton University Press, Princeton, 1955.

[3] La page web de Serge Haroche :
http ://www.college-de-france.fr/site/serge-haroche/index.htm