

# Polynômes orthogonaux et équation de Painlevé discrètes

Philippe Biane

Séminaire de combinatoire

IHP, 7 Octobre 2010

## Polynômes orthogonaux

$\mu$ =mesure de probabilités sur  $\mathbf{R}$ .

$P_n(z)$ =orthogonalisation de Gram-Schmidt de  $1, z, z^2, \dots$  pour le produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int P(x)\bar{Q}(x)\mu(dx)$$

La mesure est déterminée par ses moments:

$$m_n = \int x^n \mu(dx)$$

Récurrence à trois termes:

$$P_{n+1}(z) = (a_n z + b_n)P_n(z) + c_n P_{n-1}(z)$$

$$\int \frac{1}{z-x} \mu(dx) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n z^{-n-1}$$

$$= \frac{a_0}{a_0 z + b_0 - \frac{c_1}{a_1 z + b_1 - \frac{c_2}{a_2 z + b_2 - \dots}}} \quad (1)$$

Souvent les coefficients  $m_n$  et  $a_n, b_n, c_n$  ont des interprétations combinatoires, et la formule (1) peut d'interpréter de façon bijective.

cf

P. Flajolet, P. Combinatorial aspects of continued fractions.

Discrete Math. 32 (1980), no. 2, 125–161.

X. Viennot, Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux

et beaucoup d'autres....

## Exemples

Polynômes de Tchebychev:

$$m_{2n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, m_{2n+1} = 0 \quad a_n = 1, b_n = 0, c_n = 1$$

moments=nombre de Catalan

$$\mu(dx) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} dx, x \in [-2, 2] = \text{loi du demi-cercle}$$

Polynômes d'Hermite:

$$m_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}, m_{2n+1} = 0 \quad a_n = 1, b_n = 0, c_n = n$$

moments=nombre d'appariements

$$\mu(dx) = \frac{\exp -\frac{x^2}{2}}{\sqrt{2\pi}} = \text{loi de Gauss}$$

La plupart des polynômes orthogonaux “intéressants” rentrent dans le *schéma d’Askey*:

ils peuvent être déduits des **polynômes d’Askey-Wilson** par des spécialisations de paramètres et des passages à la limite.

## Polynômes d'Askey-Wilson

$$\mu(dx) = \left| \frac{(e^{2i\theta}, q)_\infty}{(ae^{i\theta}, q)_\infty (be^{i\theta}, q)_\infty (ce^{i\theta}, q)_\infty (de^{i\theta}, q)_\infty} \right|^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$x = \cos \theta$$

$$(z, q)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty} (1 - zq^j)$$

Les coefficients de récurrence et les moments sont connus explicitement.

Interprétation combinatoire: en progrès:

(cf Corteel, Sylvie; Williams, Lauren K. Staircase tableaux, the asymmetric exclusion process, and Askey-Wilson polynomials. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 107 (2010), no. 15, 6726–6730.)

## Polynômes orthogonaux sur le cercle unité.

$\mu$  = mesure positive sur le cercle unité.

Gram-Schmidt de  $1, z, z^2, \dots \longrightarrow \phi_n(z)$  (polynômes orthogonaux pour  $\mu$ ).

La relation de récurrence est dûe à Szegö : il existe  $\alpha_n \in \mathbf{C}$  tels que

$$\phi_n^*(z) = z^n \bar{\phi}_n(1/z)$$

$$\begin{cases} \phi_{n+1}(z) &= z\phi_n(z) + \alpha_{n+1}\phi_n^*(z) \\ \phi_{n+1}^*(z) &= \bar{\alpha}_{n+1}z\phi_n(z) + \phi_n^*(z) \end{cases}$$

Soit

$$d\mu(e^{i\theta}) = w(e^{i\theta})d\theta$$

$$w(e^{i\theta}) = \left| \frac{(ae^{i\theta}, q)_\infty}{(be^{i\theta}, q)_\infty} \right|^2$$

$$(z, q)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty} (1 - zq^j)$$

Pourquoi étudier ces polynômes?

Ils interviennent quand on essaie de comprendre les liens entre addition et multiplication au moyen de la transformation de Fourier...



$w$  a un prolongement holomorphe qui satisfait

$$w(qz) = \frac{(qz - \bar{a})(1 - bz)}{(qz - \bar{b})(1 - az)} w(z),$$

Cela implique pour les polynômes orthogonaux:

$$\begin{cases} \phi_n(qz) &= P_n(z)\phi_n(z) + Q_n(z)\phi_n^*(z) \\ \phi_n^*(qz) &= R_n(z)\phi_n(z) + S_n(z)\phi_n^*(z) \end{cases}$$

$P, Q, R, S$  = polynômes

Rappel:

$$\begin{cases} \phi_{n+1}(z) &= z\phi_n(z) + \alpha_{n+1}\phi_n^*(z) \\ \phi_{n+1}^*(z) &= \bar{\alpha}_{n+1}z\phi_n(z) + \phi_n^*(z) \end{cases}$$

On peut mettre les relations de récurrence sous la forme

$$Y_n(z) = \begin{pmatrix} \phi_n(z) \\ \phi_n^*(z) \end{pmatrix}$$

$$Y_{n+1}(z) = B_n(z)Y_n(z). \quad (2)$$

$$Y_n(qz) = A_n(z)Y_n(z) \quad (3)$$

où

$$B_n(z) = \begin{pmatrix} z & \alpha_{n+1} \\ z\bar{\alpha}_{n+1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_n(z) = \begin{pmatrix} P_n(z) & Q_n(z) \\ R_n(z) & S_n(z) \end{pmatrix}$$

La compatibilité entre (2) et (3) donne

$$A_{n+1}(z)B_n(z) = B_n(qz)A_n(z).$$

On reprend l'équation

$$\tilde{A}(z) = B(qz)A(z)B^{-1}(z).$$

avec

$$B(z) = \begin{pmatrix} z & \alpha \\ z\bar{\alpha} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(z) = \begin{pmatrix} \kappa_1 z^2 + az + \theta_1 & z - y \\ cz(z - w) & \kappa_2 z^2 + bz + \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}(z) = \begin{pmatrix} \tilde{\kappa}_1 z^2 + \tilde{a}z + \tilde{\theta}_1 & z - \tilde{y} \\ \tilde{c}z(z - \tilde{w}) & \tilde{\kappa}_2 z^2 + \tilde{b}z + \tilde{\theta}_2 \end{pmatrix}$$

$$A(z) = \begin{pmatrix} \kappa_1 z^2 + az + \theta_1 & z - y \\ cz(z - w) & \kappa_2 z^2 + bz + \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}(z) = \begin{pmatrix} \tilde{\kappa}_1 z^2 + \tilde{a}z + \tilde{\theta}_1 & z - \tilde{y} \\ \tilde{c}z(z - \tilde{w}) & \tilde{\kappa}_2 z^2 + \tilde{b}z + \tilde{\theta}_2 \end{pmatrix}$$

satisfont:

$$\det A(z) = \kappa_1 \kappa_2 (z - c_1)(z - c_2)(z - c_3)(z - c_4)$$

$$\det \tilde{A}(z) = q \kappa_1 \kappa_2 (z - c_1)(z - c_2)(z - c_3)(z - c_4)$$

$$\tilde{\kappa}_1 = q \kappa_1, \quad \tilde{\kappa}_2 = \kappa_2$$

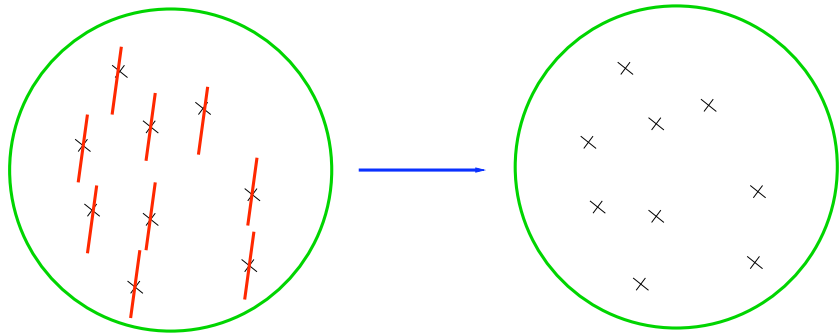
$$\tilde{\theta}_1 = q \theta_1, \quad \tilde{\theta}_2 = \theta_2$$

L'espace des matrices

$$A(z) = \begin{pmatrix} \kappa_1 z^2 + az + \theta_1 & z - y \\ cz(z - w) & \kappa_2 z^2 + bz + \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\det A(z) = \kappa_1 \kappa_2 (z - c_1)(z - c_2)(z - c_3)(z - c_4)$$

est une variété algébrique  $X_{c_1, c_2, c_3, c_4, \kappa_1, \kappa_2, \theta_1, \theta_2}$ , isomorphe à  $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$  éclaté en 9 points.



Blowing up  $P^2(\mathbb{C})$  at nine points

l'application

$$A(z) \rightarrow \tilde{A}(z)$$

est une transformation birationnelle de  $\mathbf{P}^2(C)$  qui donne un isomorphisme entre

$$X_{c_1, c_2, c_3, c_4, \kappa_1, \kappa_2, \theta_1, \theta_2}$$

et

$$X_{c_1, c_2, c_3, c_4, q\kappa_1, \kappa_2, q\theta_1, \theta_2}$$

$$A(z) = \begin{pmatrix} \kappa_1 z^2 + az + \theta_1 & z - y \\ cz(z - w) & \kappa_2 z^2 + bz + \theta_2 \end{pmatrix}$$

Introduisons des coordonnées sur ces variétés  
 $y$  est l'unique racine du coefficient 12 de  $A$ ,

$$\xi = (y - c_1)(y - c_2)/(\kappa_1 y^2 + ay + \theta_1)$$



Dans ces coordonnées la transformation est:

$$\tilde{y} = \frac{S}{T} \quad \text{avec}$$

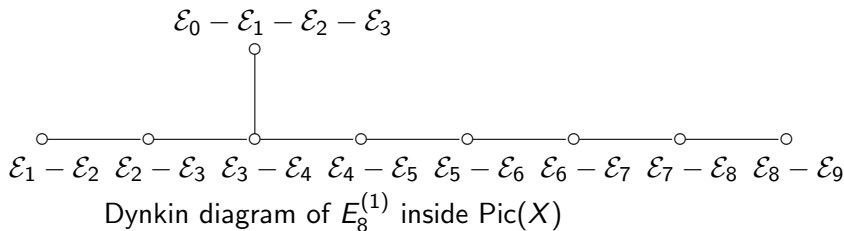
$$S = -q\kappa_1\kappa_2\theta_1\xi^2(y - c_3)(y - c_4) - q\theta_2(y - c_1)(y - c_2) + \xi((q^2\kappa_1\theta_1 + \kappa_2\theta_2)y^2 - q\kappa_1\kappa_2\sigma_3y + 2q\theta_1\theta_2)$$

$$T = -\kappa_1\kappa_2^2\xi^2y(y - c_3)(y - c_4) - q^2\kappa_1y(y - c_1)(y - c_2) + \xi y(2q\kappa_1\kappa_2y^2 - q\kappa_1\kappa_2\sigma_1y + (q^2\kappa_1\theta_1 + \kappa_2\theta_2))$$

$$\tilde{\xi} = \frac{c_1c_2}{\kappa_1\theta_1\xi} \frac{(\xi(y - \frac{q\theta_1}{c_1\kappa_2}) - \frac{q}{\kappa_2}(y - c_2))(\xi(y - \frac{q\theta_1}{c_2\kappa_2}) - \frac{q}{\kappa_2}(y - c_1))}{(\xi(y - c_4) - \frac{q}{\kappa_2}(y - \frac{\theta_2}{qc_3\kappa_1}))(\xi(y - c_3) - \frac{q}{\kappa_2}(y - \frac{\theta_2}{qc_4\kappa_1}))}$$

## Une vision plus conceptuelle de cette transformation

Neuf points sur  $\mathbf{P}^2(C)$  déterminent une unique cubique. Le groupe de Picard de  $\mathbf{P}^2(C)$  éclaté en neuf points est de dimension 10, et contient un réseau  $E_8^{(1)}$ , orthogonal à la cubique.



$\mathcal{E}_0$  = droite générique dans  $\mathbf{P}^2(C)$ ,  $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_9$  = droite passant par un point éclaté.

La transformation birationnelle de  $(\xi, y)$  induit sur ce groupe de Picard une transformation de matrice:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est un élément du groupe de Weyl affine  $E_8^{(1)}$  (une translation), qui se décompose en réflexions élémentaires

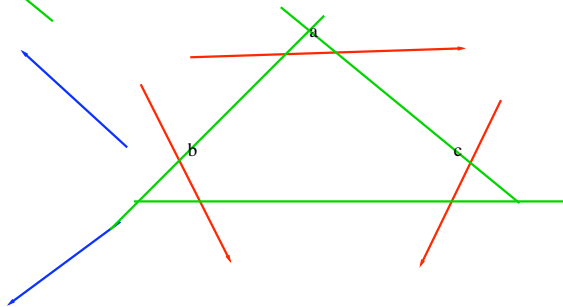
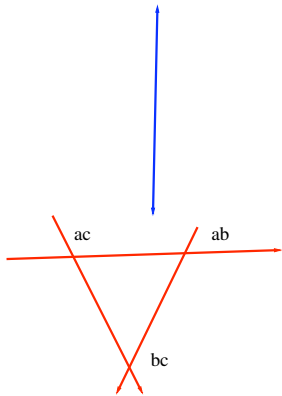
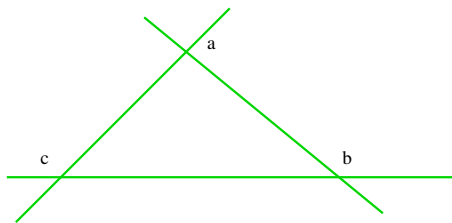
$$\phi = \sigma w_4 w_3 w_2 w_0 w_1 w_2 w_3 w_4$$

Ces transformations correspondent à des transformations élémentaires

on éclate trois points  $a, b, c$ , puis on "compresse" les trois droites  $ab, bc, ca$ .

$$a = (1 : 0 : 0), \quad b = (0 : 1 : 0), \quad c = (0 : 0 : 1)$$

$$\mathbf{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbb{C}); \quad (x : y : z) \rightarrow (yz : xz : xy) \sim (1/x : 1/y : 1/z)$$



Elementary Cremona transformation

## Polynômes orthogonaux et transformation de Fourier

La transformée de Fourier "additive" d'un caractère multiplicatif est

$$\mathcal{F} x^{1/2+it} = \frac{\Gamma(1/4 - it/2)}{\Gamma(1/4 + it/2)} x^{1/2-it}$$

Si on interprète  $x^{1/2+it}$  et  $x^{1/2-it}$  comme deux ondes dans des sens opposés, et alors

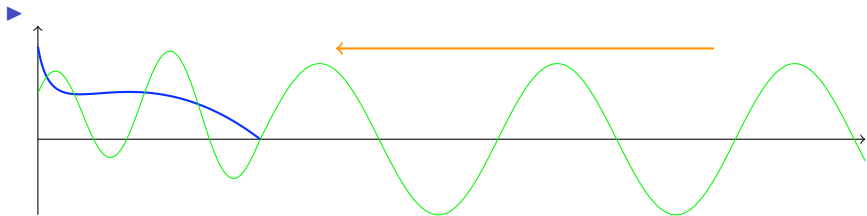
$$\frac{\Gamma(1/4 - it/2)}{\Gamma(1/4 + it/2)}$$

est un décalage de phase.

Cela suggère de considérer la transformation de Fourier comme une dispersion ("scattering").

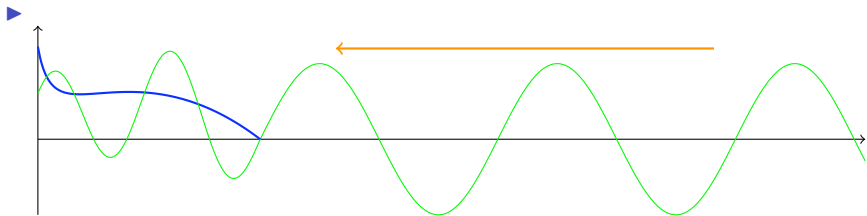
## Théorie de la dispersion ("scattering")

On envoie une onde sur un obstacle.

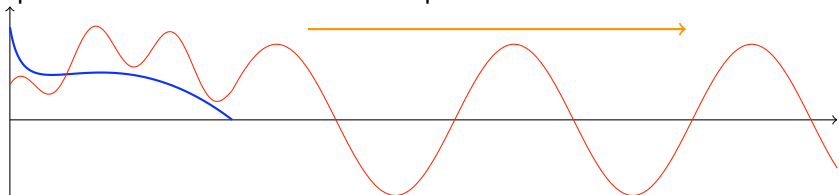


## Théorie de la dispersion ("scattering")

On envoie une onde sur un obstacle.

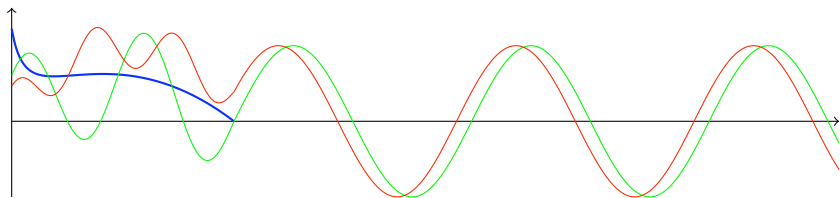


qui est réfléchi avec la même fréquence:





et un décalage de phase:



Ce décalage dépend de la fréquence de l'onde entrante.

Le problème inverse consiste à déduire la forme de l'obstacle connaissant le décalage.

## Traitement mathématique

L'équation des ondes stationnaire est:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi(x, k) + q(x)\psi(x, k) = k^2\psi(x, k) \quad x \in [0, +\infty[$$

$$\psi(0, k) = 0, \quad \frac{d}{dx}\psi(0, k) = 1$$

Quand  $x \rightarrow \infty$ ,

$$\psi(x, k) = \frac{|M(k)|}{k} \sin(kx - \eta(k)) + o(1)$$

$\eta(k) = \arg M(k)$  est le décalage de phase créé par le potentiel  $q$ .

Problème inverse:

retrouver  $q(x)$  à partir de  $\eta(k)$ .

On veut réaliser le décalage

$$\exp(i\eta(k)) = \frac{\Gamma(a + ik/2)}{\Gamma(a - ik/2)}$$

Théorème de Burnol.

Le potentiel pour le décalage

$$\frac{\Gamma(a + it/2)\Gamma(b - it/2)}{\Gamma(a - it/2)\Gamma(b + it/2)}$$

s'exprime en terme de la solution d'une équation différentielle de Painlevé VI..

La limite

$$\frac{\Gamma(a + it/2)\Gamma(b - it/2)}{\Gamma(a - it/2)\Gamma(b + it/2)} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(a + it/2)}{\Gamma(a - it/2)}$$

donne une équation de Painlevé III.

L'équation de récurrence pour les polynômes orthogonaux sur le cercle unité

$$\begin{cases} \phi_{n+1}(z) &= z\phi_n(z) + \alpha_{n+1}z^n\bar{\phi}_n(z) \\ \bar{\phi}_{n+1}(z) &= z^{-n}\phi_n(z) + \bar{\alpha}_{n+1}z^{-1}\bar{\phi}_n(z) \end{cases}$$

est une version discrète de l'équation des ondes.

Théorème: (Case-Kac, Case-Geronimo): résoudre le problème inverse pour le décalage

$$f(e^{i\theta})/\bar{f}(e^{i\theta})$$

est équivalent à trouver les coefficients de récurrence pour

$$d\mu(\theta) = \frac{d\theta}{|f(e^{i\theta})|^2}$$

( $f$  analytique dans le disque unité)

Dans notre cas,

$$w(e^{i\theta}) = \left| \frac{(ae^{i\theta}, q)_\infty}{(be^{i\theta}, q)_\infty} \right|^2$$

est une approximation de la fonction Gamma. On retrouve le résultat pour la transformation de Fourier par un passage à la limite.