

Des boucles sur les cartes aléatoires

Jérémie Bouttier

Travail en commun avec Gaëtan Borot et Emmanuel Guitter

Institut de Physique Théorique, CEA Saclay &
LIAFA, CNRS et Université Paris Diderot

Séminaire Philippe Flajolet
20 octobre 2011

Plan

- 1 Introduction
- 2 Le modèle de boucles $O(n)$ sur les quadrangulations
- 3 Principe des poupées russes
- 4 Classification des limites d'échelles possibles
- 5 Solution exacte du modèle rigide

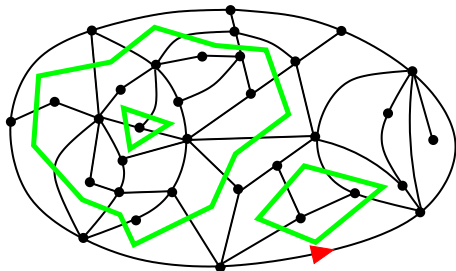
Plan

- 1 Introduction
- 2 Le modèle de boucles $O(n)$ sur les quadrangulations
- 3 Principe des poupées russes
- 4 Classification des limites d'échelles possibles
- 5 Solution exacte du modèle rigide

Introduction : modèles de boucles

De nombreux problèmes de physique statistique se ramènent à l'étude des "gaz de boucles" :

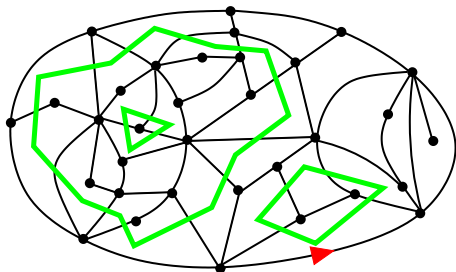
- polymères, marches auto-évitantes (SAW) [Flory]
- interfaces entre domaines : percolation, modèles d'Ising, SOS...
- développement haute-température des modèles à symétrie $O(n)$ [Domany *et al.*], du modèle de Potts [Nienhuis]...
- plus récemment : FPL, ASM, TSSCPP...



Introduction : modèles de boucles

De nombreux problèmes de physique statistique se ramènent à l'étude des "gaz de boucles" :

- polymères, marches auto-évitantes (SAW) [Flory]
- interfaces entre domaines : percolation, modèles d'Ising, SOS...
- développement haute-température des modèles à symétrie $O(n)$ [Domany *et al.*], du modèle de Potts [Nienhuis]...
- plus récemment : FPL, ASM, TSSCPP...

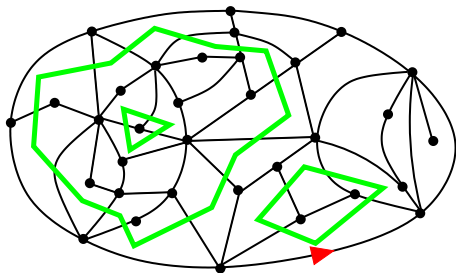


Par "modèle de boucles $O(n)$ ", on entend un modèle où n est la fugacité (poids) par boucle.

Introduction : modèles de boucles

De nombreux problèmes de physique statistique se ramènent à l'étude des "gaz de boucles" :

- polymères, marches auto-évitantes (SAW) [Flory]
- interfaces entre domaines : percolation, modèles d'Ising, SOS...
- développement haute-température des modèles à symétrie $O(n)$ [Domany *et al.*], du modèle de Potts [Nienhuis]...
- plus récemment : FPL, ASM, TSSCPP...



Par "modèle de boucles $O(n)$ ", on entend un modèle où n est la fugacité (poids) par boucle. n peut prendre des valeurs non-entières! En 2D, le régime "intéressant" est $n \in [-2, 2]$ (SAW : $n \rightarrow 0$, perco/Ising : $n = 1$, Potts $n = \sqrt{q}$).

Sur un réseau régulier de dimension 2, le modèle présente un riche comportement critique pour $n \in [-2, 2]$ [Nienhuis]. Les exposants critiques sont des fonctions simples d'un paramètre $e \in [-1, 1]$ où

$$n = 2 \cos \pi e$$

p.ex. la charge centrale est $c = 1 - \frac{6e^2}{1-e}$. À n fixé il y a deux valeurs possibles de e ($e \geq 0$: point dilué, $e \leq 0$: phase dense).

Sur un réseau régulier de dimension 2, le modèle présente un riche comportement critique pour $n \in [-2, 2]$ [Nienhuis]. Les exposants critiques sont des fonctions simples d'un paramètre $e \in [-1, 1]$ où

$$n = 2 \cos \pi e$$

p.ex. la charge centrale est $c = 1 - \frac{6e^2}{1-e}$. À n fixé il y a deux valeurs possibles de e ($e \geq 0$: point dilué, $e \leq 0$: phase dense). Une description géométrique de la limite d'échelle est donnée par le Conformal Loop Ensemble [Sheffield–Werner].

Sur un réseau régulier de dimension 2, le modèle présente un riche comportement critique pour $n \in [-2, 2]$ [Nienhuis]. Les exposants critiques sont des fonctions simples d'un paramètre $e \in [-1, 1]$ où

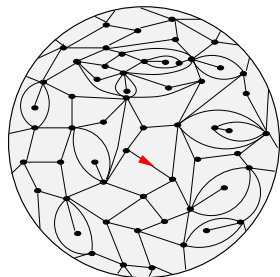
$$n = 2 \cos \pi e$$

p.ex. la charge centrale est $c = 1 - \frac{6e^2}{1-e}$. À n fixé il y a deux valeurs possibles de e ($e \geq 0$: point dilué, $e \leq 0$: phase dense). Une description géométrique de la limite d'échelle est donnée par le Conformal Loop Ensemble [Sheffield–Werner].

Le modèle s'étend naturellement aux réseaux (cartes) aléatoires et a été étudié (sur les triangulations) par la méthode des intégrales matricielles [Kostov, Eynard, Kristjansen...]. Mais cette approche est peu géométrique...

Introduction : cartes aléatoires

- Une **carte planeaire** est un graphe connexe dessiné sur la sphère (sans croisement d'arêtes, à déformation près).
- Les **faces** sont les composantes connexes du complémentaire du graphe (lui-même constitué de sommets et d'arêtes).
- Si chaque face a un nombre pair de côtés, la carte planeaire est **bipartie**.
- Si chaque face a quatre côtés, la carte est une **quadrangulation**.
- Une carte **enracinée** est une carte munie d'une arête distinguée et orientée.



Une quadrangulation planeaire enracinée (seul un hémisphère est visible).

L'ensemble des cartes planaires est muni de plusieurs mesures de probabilité naturelles :

- triangulation ou quadrangulation uniforme à m faces
- distribution de Boltzmann : fugacité g_k par face de degré k

L'ensemble des cartes planaires est muni de plusieurs mesures de probabilité naturelles :

- triangulation ou quadrangulation uniforme à m faces
- distribution de Boltzmann : fugacité g_k par face de degré $2k$ (cas biparti).

L'ensemble des cartes planaires est muni de plusieurs mesures de probabilité naturelles :

- triangulation ou quadrangulation uniforme à m faces
- distribution de Boltzmann : fugacité g_k par face de degré $2k$ (cas biparti).

On s'intéresse ici à la *limite d'échelle* des cartes aléatoires (vues comme espace métrique pour la distance de graphe). La limite générique est la *carte brownienne* [Le Gall, Miermont, Marckert–Mokkadem...].

L'ensemble des cartes planaires est muni de plusieurs mesures de probabilité naturelles :

- triangulation ou quadrangulation uniforme à m faces
- distribution de Boltzmann : fugacité g_k par face de degré $2k$ (cas biparti).

On s'intéresse ici à la *limite d'échelle* des cartes aléatoires (vues comme espace métrique pour la distance de graphe). La limite générique est la *carte brownienne* [Le Gall, Miermont, Marckert–Mokkadem...]. Une limite non-générique (*carte à "trous"*) peut être obtenue avec une distribution de Boltzmann et des poids de la forme

$$g_k = c(\beta/4)^{k-1} g_k^\circ \quad \text{où } g_k^\circ \sim k^{-a}, \quad a \in (3/2, 5/2)$$

[Le Gall–Miermont 2009]

L'ensemble des cartes planaires est muni de plusieurs mesures de probabilité naturelles :

- triangulation ou quadrangulation uniforme à m faces
- distribution de Boltzmann : fugacité g_k par face de degré $2k$ (cas biparti).

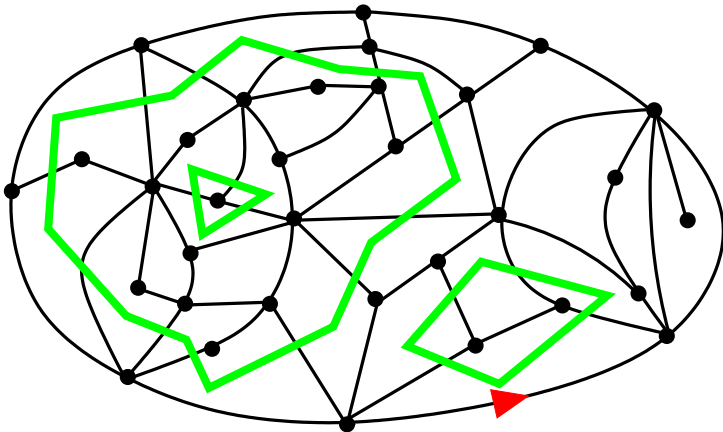
On s'intéresse ici à la *limite d'échelle* des cartes aléatoires (vues comme espace métrique pour la distance de graphe). La limite générique est la *carte brownienne* [Le Gall, Miermont, Marckert–Mokkadem...]. Une limite non-générique (*carte à "trous"*) peut être obtenue avec une distribution de Boltzmann et des poids de la forme

$$g_k = c(\beta/4)^{k-1} g_k^\circ \quad \text{où } g_k^\circ \sim k^{-a}, \quad a \in (3/2, 5/2)$$

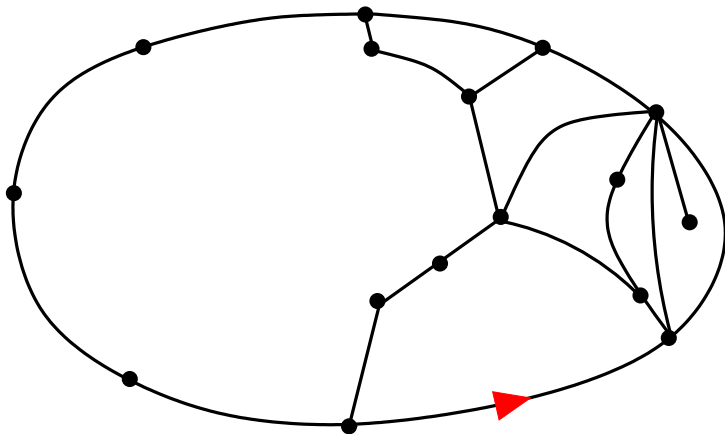
[Le Gall–Miermont 2009]

Nous allons voir que la carte à trous est liée au modèle $O(n)$ sur les quadrangulations aléatoires, pour $n = 2 \cos \pi a \in (0, 2)$ i.e. $a = 2 + e$.

Aperçu



Aperçu



Plan

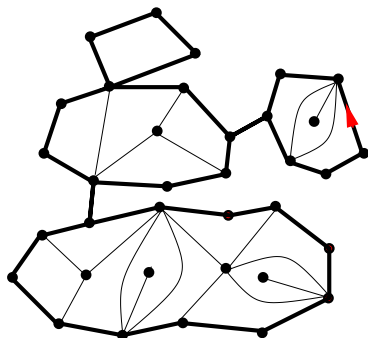
- 1 Introduction
- 2 Le modèle de boucles $O(n)$ sur les quadrangulations
- 3 Principe des poupées russes
- 4 Classification des limites d'échelles possibles
- 5 Solution exacte du modèle rigide

Quadrangulations à bord

Dans une carte planaire enracinée, la **face externe** est celle à droite de la racine. Si toutes les autres faces (dites internes) ont quatre côtés, la carte est une **quadrangulation à bord**.

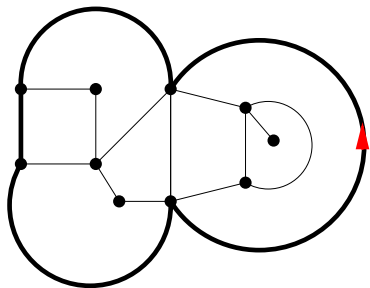
Remarques :

- le bord est de longueur paire, i.e la carte est bipartie
- il peut y avoir des sommets séparants et des arêtes multiples, y compris sur le bord.



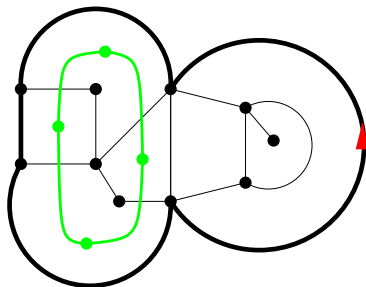
Une quadrangulation à bord

Boucles



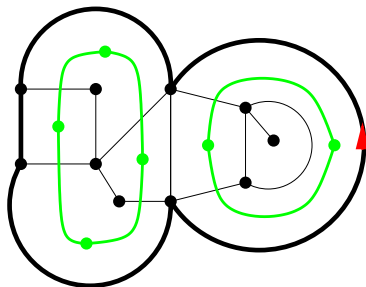
Boucles

- On appelle **boucle** un cocycle (cycle sur la carte duale) simple.



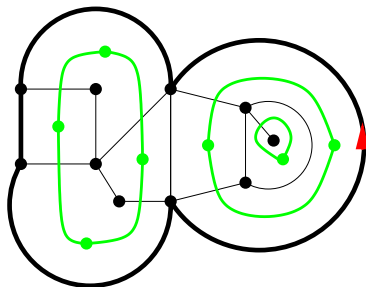
Boucles

- On appelle **boucle** un cocycle (cycle sur la carte duale) simple.
- Une **configuration** du modèle est une quadrangulation à bord munie d'un ensemble de boucles disjointes où, par convention, la face externe n'est pas visitée.



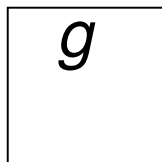
Boucles

- On appelle **boucle** un cocycle (cycle sur la carte duale) simple.
- Une **configuration** du modèle est une quadrangulation à bord munie d'un ensemble de boucles disjointes où, par convention, la face externe n'est pas visitée.
- Les boucles peuvent être emboîtées.

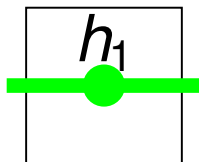


Modèle de boucles $O(n)$ sur quadrangulations

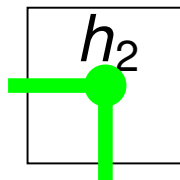
Dans une configuration, il existe trois types de faces :



(a)



(b)

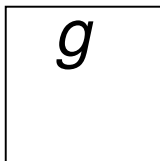


(c)

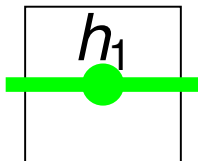
auxquelles on associe respectivement des poids “locaux” g, h_1, h_2 . On associe de plus un poids “non-local” n à chaque boucle.

Modèle de boucles $O(n)$ sur quadrangulations

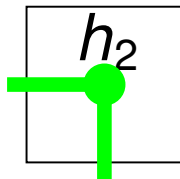
Dans une configuration, il existe trois types de faces :



(a)



(b)



(c)

auxquelles on associe respectivement des poids “locaux” g, h_1, h_2 . On associe de plus un poids “non-local” n à chaque boucle.

Le modèle **rigide** correspond au cas $h_2 = 0$.

Précisément, à une configuration C on associe un poids

$$w(C) = n^{B(C)} g^{N_a(C)} h_1^{N_b(C)} h_2^{N_c(C)}$$

avec $B(C)$ nombre de boucles, $N_{a,b,c}(C)$ nombres de faces a,b,c.
Soit \mathcal{C}_p l'ensemble des configurations avec un bord de longueur $2p$, on définit la **série génératrice du modèle de boucles $O(n)$** par

$$F_p = \sum_{C \in \mathcal{C}_p} w(C).$$

Par convention, $F_0 = 1$ (carte-sommet).

Si $n, g, h_1, h_2 \geq 0$ sont tels que $0 < F_p < \infty$, on peut normaliser les poids et définir une mesure de probabilité discrète sur \mathcal{C}_p .

Remarques : pour $n, g, h_1, h_2 \geq 0$,

- \mathcal{C}_p contient les arbres plans enracinés à p arêtes (cartes à une face), d'où

$$F_p \geq \frac{(2p)!}{p!(p+1)!} > 0$$

- Le nombre de quadrangulations à f faces étant $o(12^f)$, on a

$$g + \max(n, 1)(2h_1 + 4h_2) < \frac{1}{12} \implies F_p < \infty$$

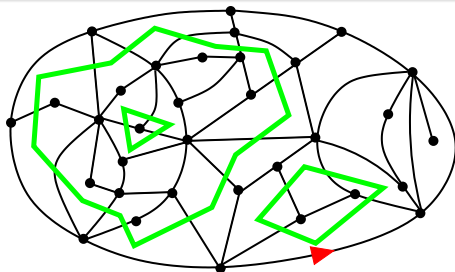
Plan

- 1 Introduction
- 2 Le modèle de boucles $O(n)$ sur les quadrangulations
- 3 Principe des poupées russes**
- 4 Classification des limites d'échelles possibles
- 5 Solution exacte du modèle rigide

Principe des poupées russes

Intuition

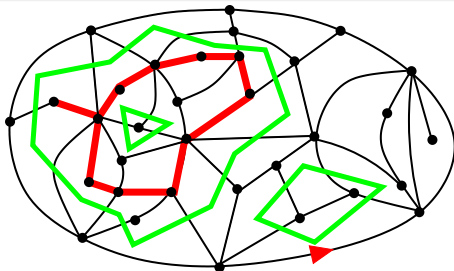
Dans une configuration du modèle de boucles $O(n)$, ce qu'on découvre à l'intérieur d'une boucle est soi-même une configuration.



Principe des poupées russes

Intuition

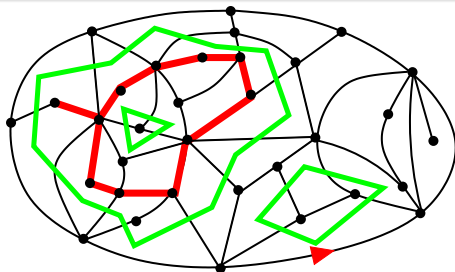
Dans une configuration du modèle de boucles $O(n)$, ce qu'on découvre à l'intérieur d'une boucle est soi-même une configuration.



Principe des poupées russes

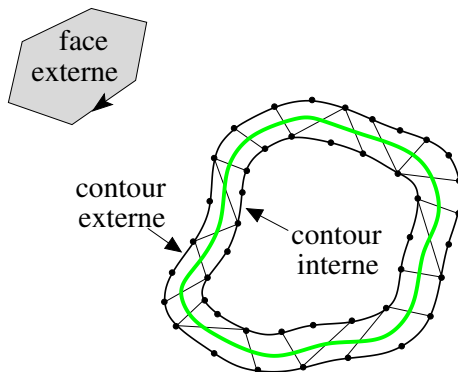
Intuition

Dans une configuration du modèle de boucles $O(n)$, ce qu'on découvre à l'intérieur d'une boucle est soi-même une configuration.



Cette intuition peut être rendue précise, et traduite en une décomposition récursive des configurations.

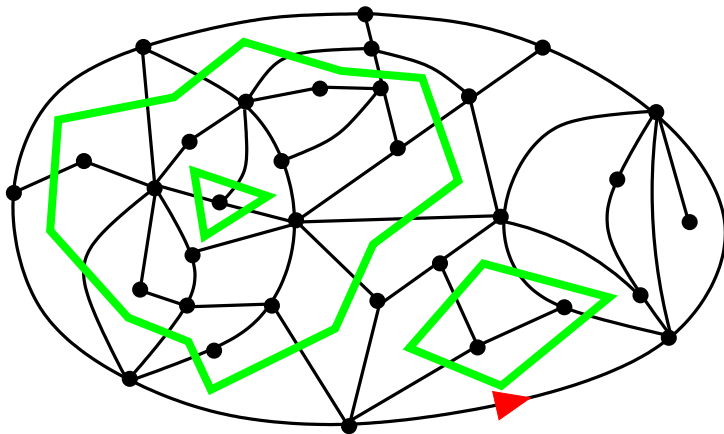
Contours d'une boucle



- Les contours ont longueur paire (car cycles d'une carte bipartie).
- Ils peuvent passer plusieurs fois par un même sommet .
- Le contour interne peut être réduit à un sommet (longueur 0).

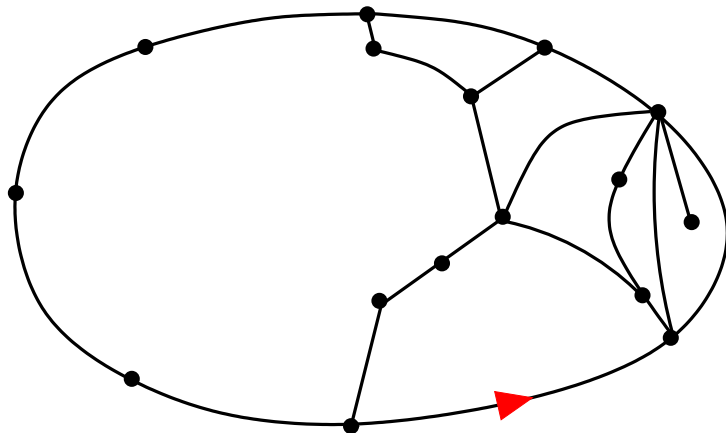
Tamis associé à une configuration

Le **tamis** est la carte constituée des arêtes extérieures à toutes les boucles.



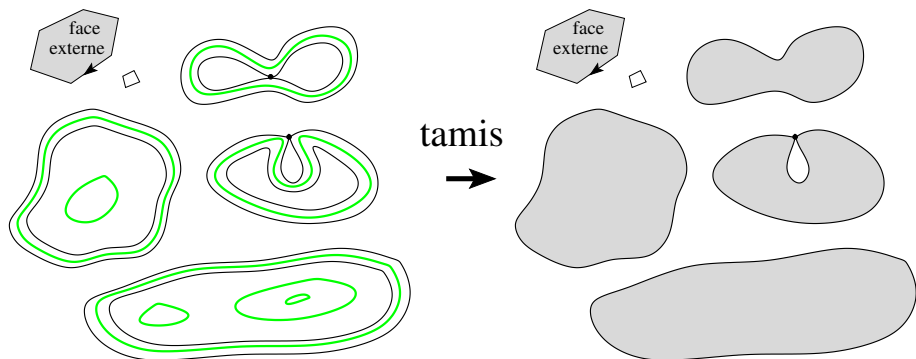
Tamis associé à une configuration

Le **tamis** est la carte constituée des arêtes extérieures à toutes les boucles.



Tamis associé à une configuration

Le **tamis** est la carte constituée des arêtes extérieures à toutes les boucles.



Propriétés du tamis

Le tamis est une carte bipartie enracinée dont les faces sont :

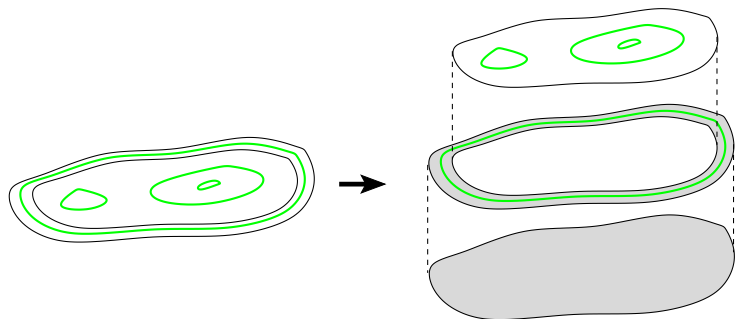
- la face externe (inchangée),
- des faces carrées **ordinaires** venant de la quadrangulation,
- des **trous** associés aux boucles maximales.

Un trou :

- a pour degré la longueur (paire) du contour externe de la boucle correspondante,
- peut être incident plusieurs fois à un même sommet.

Pour obtenir une décomposition bijective, il faut garder trace du **contenu** des trous.

Contenu d'un trou

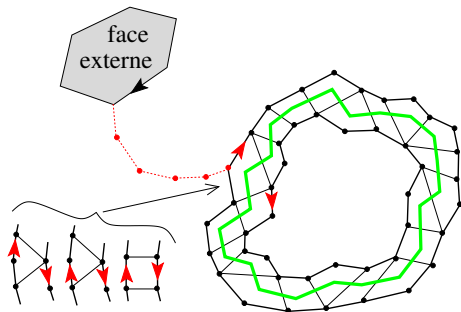


Une boucle maximale ayant un contour externe de longueur $2k$ ($k \geq 1$) et un contour interne de longueur $2k'$ ($k' \geq 0$) donne :

- un trou de degré $2k$,
- une configuration **interne** avec bord de longueur $2k'$,
- un **collier** (formé des carrés visités par la boucle, de types b/c).

Quelques remarques :

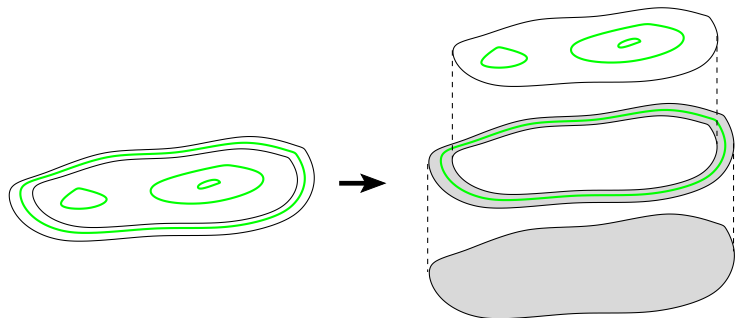
- la configuration interne peut être enracinée par une procédure bien définie,
- son bord peut avoir des sommets multiples (mais pas les bords du collier),
- à k, k' fixés, il existe un nombre fini de colliers ($\sum_j \frac{2k}{k+k'} \binom{k+k'}{2j, k-j, k'-j}$).



En résumé, à toute configuration on associe son tamis muni des contenus de chaque trou.

Réciproque de la décomposition

Toute configuration est obtenue à partir d'une carte planaire bipartie enracinée, en **substituant** dans chaque face soit un carré ordinaire (si la face est un carré), soit une paire formée d'un collier et d'une configuration interne ayant des bords de longueurs compatibles.



Traduction en terme de séries génératrices

On note $B_p(t_1, t_2, \dots)$ la série génératrice multivariée des cartes planaires biparties enracinées à bord de longueur $2p$, avec poids t_k par face interne de degré $2k$. Par convention $B_0 = 1$.

Théorème [BBG]

La famille $(F_p)_{p \geq 0}$ est solution du système récursif

$$F_p = B_p(g_1, g_2, \dots) \quad p \geq 0$$

$$g_k = g \delta_{k,2} + n \sum_{k' \geq 0} A_{k,k'}(h_1, h_2) F_{k'} \quad k \geq 0$$

où $A_{k,k'}(h_1, h_2)$ est la série génératrice des colliers

$$A_{k,k'}(h_1, h_2) = \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \frac{2k}{k+k'} \frac{(k+k')!}{(2j)!(k-j)!(k'-j)!} h_1^{2j} h_2^{k+k'-2j}$$

Les équations sont plus simples dans le cas rigide, $h_2 = 0$

$$F_p = B_p(g_1, g_2, \dots) \quad p \geq 0$$

$$g_k = g \delta_{k,2} + n h_1^{2k} F_k \quad k \geq 0$$

car

$$A_{k,k'}(h_1, 0) = h_1^{2k} \delta_{k,k'}$$

(il n'existe qu'un collier ayant un contour externe de longueur $2k$).

Plan

- 1 Introduction
- 2 Le modèle de boucles $O(n)$ sur les quadrangulations
- 3 Principe des poupées russes
- 4 Classification des limites d'échelles possibles**
- 5 Solution exacte du modèle rigide

Classification des comportements asymptotiques

On traite dorénavant n, g, h_1, h_2 comme des réels positifs. La condition de point fixe permet de classifier les comportements asymptotiques possibles de $F_p = B_p(g_1, g_2, \dots)$ pour $p \rightarrow \infty$.

On emploie pour cela des résultats connus sur les cartes biparties.

Soit $R(u)$ la plus petite solution positive de

$$R(u) = u + \sum_{k \geq 1} \binom{2k-1}{k} t_k R(u)^k.$$

Alors $B_p(t_1, t_2, \dots) < \infty$ ssi $R(1) < \infty$, et

$$B_p(t_1, t_2, \dots) = \binom{2p}{p} \int_0^1 R(u)^p du.$$

Le comportement pour $p \rightarrow \infty$ s'estime par la **méthode de Laplace**.

Grossièrement, $B_p(t_1, t_2, \dots)^{1/p} \rightarrow 4R(1)$.

Des estimations plus fines dépendent du développement de $R(u)$ autour de $u = 1$.

Stratégie

$R(u)$ est la fonction réciproque de

$$u(R) = R - \varphi(R), \quad \varphi(R) := \sum_{k \geq 1} \binom{2k-1}{k} t_k R^k$$

Il s'agit alors d'inverser le développement autour de $R(1)$.

Des estimations plus fines dépendent du développement de $R(u)$ autour de $u = 1$.

Stratégie

$R(u)$ est la fonction réciproque de

$$u(R) = R - \varphi(R), \quad \varphi(R) := \sum_{k \geq 1} \binom{2k-1}{k} t_k R^k$$

Il s'agit alors d'inverser le développement autour de $R(1)$.

$R(1) = \infty$ nécessite $\varphi'(R(1)) \leq 1$.

- **Cas sous-critique** : $\varphi'(R(1)) < 1$, d'où $R(1) - R(u) \propto 1 - u$
- **Cas critique générique** : $\varphi'(R(1)) = 1$ et $\varphi''(R(1)) < \infty$, d'où $R(1) - R(u) \propto \sqrt{1 - u}$
- **Cas critique non-générique** : $\varphi'(R(1)) = 1$ et $\varphi''(R(1)) = \infty$, le développement dépend de la nature de la singularité de φ .

- Cas **sous-critique**, $\varphi'(R(1)) < 1$:

$$B_p(t_1, t_2, \dots) \sim \frac{R(1)(1 - \varphi'(R(1))) (4R(1))^p}{\sqrt{\pi} p^{3/2}}$$

Interprétation : la limite d'échelle est l'arbre brownien (dimension 2).

- Cas **critique générique**, $\varphi'(R(1)) = 1$ et $\varphi''(R(1)) < \infty$:

$$B_p(t_1, t_2, \dots) \sim \frac{R(1)^2 \varphi''(R(1)) (4R(1))^p}{\sqrt{\pi} p^{5/2}}$$

Interprétation : la limite d'échelle est la carte brownienne à bord (dimension 4).

- Cas **critique non-générique**, $\varphi'(R(1)) = 1$ et $\varphi''(R(1)) = \infty$. Sous des hypothèses de régularité, ce cas est obtenu pour

$$t_k \sim c \frac{(\beta/4)^{k-1}}{k^a}, \quad 3/2 < a < 5/2$$

avec c, β "bien choisis" de sorte que $R(1) = \beta^{-1}$. On trouve alors

$$B_p(t_1, t_2, \dots) \sim \frac{c}{2 \cos \pi a} \frac{(4/\beta)^{p-1}}{p^a}.$$

À la limite d'échelle, on obtient les cartes à trous de dimension $2a - 1 \in (2, 4)$.

Jusqu'ici on a raisonné sur les cartes biparties. Quels cas sont compatibles avec l'équation de point fixe du modèle $O(n)$? Concentrons-nous sur le cas rigide ($h_2 = 0$) :

$$g_k \sim n h_1^{2k} F_k, \quad F_p = B_p(g_1, g_2, \dots).$$

- Les cas sous-critique et critique générique sont possibles, on a alors $4h_1 R(1) < 1$.
- Le cas "intéressant", critique non-générique, est plus contraint :

$$g_k \sim c \frac{(\beta/4)^{k-1}}{k^a} \quad F_k \sim \frac{c}{2 \cos \pi a} \frac{(4/\beta)^{k-1}}{k^a}$$

où $\beta^{-1} = R(1)$, impose

$$4h_1 R(1) = 1, \quad n = 2 \cos \pi a.$$

Autrement dit, pour $n \in (0, 2)$, il existe deux exposants a possibles pour le cas critique non-générique :

$$a = 2 \pm b, \quad \pi b = \arccos(n/2).$$

Les cartes stables correspondantes sont les limites d'échelle possibles du tamis (mais pas de la configuration complète !).

- $a = 2 - b$ est l'exposant **dense**,
- $a = 2 + b$ est l'exposant **dilué**.

Autrement dit, pour $n \in (0, 2)$, il existe deux exposants a possibles pour le cas critique non-générique :

$$a = 2 \pm b, \quad \pi b = \arccos(n/2).$$

Les cartes stables correspondantes sont les limites d'échelle possibles du tamis (mais pas de la configuration complète!).

- $a = 2 - b$ est l'exposant **dense**,
- $a = 2 + b$ est l'exposant **dilué**.

Pour n, g, h_1 donnés, quel comportement observe-t-on ?

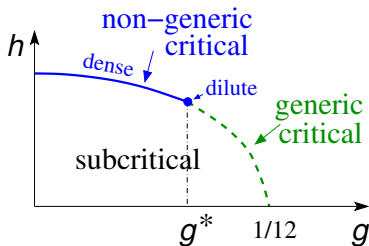


Diagramme de phase attendu

Plan

- 1 Introduction
- 2 Le modèle de boucles $O(n)$ sur les quadrangulations
- 3 Principe des poupées russes
- 4 Classification des limites d'échelles possibles
- 5 Solution exacte du modèle rigide

Solution exacte du modèle rigide

Introduisons la “résolvante”

$$W(\xi) := \sum_{k \geq 0} \frac{F_p}{\xi^{2p+1}}.$$

À partir de la relation $F_p = B_p(g_1, g_2, \dots)$, on obtient

$$W(\xi) = \int_0^{R(1)} \frac{u'(R) dR}{\sqrt{\xi^2 - 4R}}$$

d'où $W(\xi)$ a une coupure sur $[-\gamma, \gamma]$, $\gamma := 2\sqrt{R(1)}$ avec

$$W(\xi + i0) + W(\xi - i0) = \xi - \sum_{k \geq 1} g_k \xi^{2k-1}, \quad \forall \xi \in [-\gamma, \gamma].$$

Solution exacte du modèle rigide

Introduisons la “résolvante”

$$W(\xi) := \sum_{k \geq 0} \frac{F_p}{\xi^{2p+1}}.$$

À partir de la relation $F_p = B_p(g_1, g_2, \dots)$, on obtient

$$W(\xi) = \int_0^{R(1)} \frac{u'(R) dR}{\sqrt{\xi^2 - 4R}}$$

d'où $W(\xi)$ a une coupure sur $[-\gamma, \gamma]$, $\gamma := 2\sqrt{R(1)}$ avec

$$W(\xi + i0) + W(\xi - i0) = \xi - \sum_{k \geq 1} g_k \xi^{2k-1}, \quad \forall \xi \in [-\gamma, \gamma].$$

La condition de point fixe $g_k = g\delta_{k,2} + nh_1^{2k} F_k$ donne

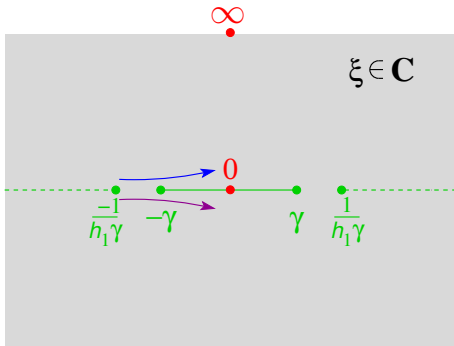
$$W(\xi + i0) + W(\xi - i0) = \xi - g\xi^3 - \frac{n}{h_1\xi^2} W\left(\frac{1}{h_1\xi}\right) + \frac{n}{\xi}.$$

On obtient une équation fonctionnelle analogue à celle du modèle trivalent. On la résoud par une stratégie identique :

$$W(\xi) = W_{\text{part}}(\xi) + W_{\text{hom}}(\xi)$$

où $W_{\text{part}}(\xi)$ est la solution particulière sans coupure et

$$W_{\text{hom}}(\xi + i0) + W_{\text{hom}}(\xi - i0) = -\frac{n}{h_1 \xi^2} W_{\text{hom}}\left(\frac{1}{h_1 \xi}\right), \quad \forall x \in [-\gamma, \gamma].$$



La solution générale d'une telle équation est donnée par des fonctions elliptiques. Elle est fixée par la condition $W(\xi) \sim 1/\xi$ pour $\xi \rightarrow \infty$.

Dans le cas $\gamma = 1/(h_1\gamma) = 1/\sqrt{h_1}$, la solution est particulièrement simple :

$$W_{\text{hom}}(\xi) = A_1(\xi) \left(\frac{\xi - \gamma}{\xi + \gamma} \right)^b + A_2(\xi) \left(\frac{\xi + \gamma}{\xi - \gamma} \right)^b$$

avec $\pi b = \arccos(n/2)$, $A_{1,2}(\xi) = -1/(h_1\xi^2)A_{1,2}(1/(h_1\xi))$.

La condition $W(\xi) \sim 1/\xi$ fixe $A_{1,2}(\xi)$ ainsi qu'une relation entre g et h_1 :

$$g = \frac{3}{2 + b^2} \left(h_1 - \frac{2 - n}{2b^2} h_1^2 \right).$$

On déduit de plus que pour $\xi \rightarrow \gamma^+$

$$W(\xi) \propto \begin{cases} (\xi/\gamma - 1)^{1-b}, & g < g^* \\ (\xi/\gamma - 1)^{1+b}, & g = g^* \end{cases}$$

$$\text{où } g^* = \frac{3b^2(2-b)^2}{2(2-n)(b^2-2b+3)^2}, \quad h_1^* = \frac{b^2(2-b)^2}{(2-n)(b^2-2b+3)}.$$

Dans le cas $\gamma = 1/(h_1\gamma) = 1/\sqrt{h_1}$, la solution est particulièrement simple :

$$W_{\text{hom}}(\xi) = A_1(\xi) \left(\frac{\xi - \gamma}{\xi + \gamma} \right)^b + A_2(\xi) \left(\frac{\xi + \gamma}{\xi - \gamma} \right)^b$$

avec $\pi b = \arccos(n/2)$, $A_{1,2}(\xi) = -1/(h_1\xi^2)A_{1,2}(1/(h_1\xi))$.

La condition $W(\xi) \sim 1/\xi$ fixe $A_{1,2}(\xi)$ ainsi qu'une relation entre g et h_1 :

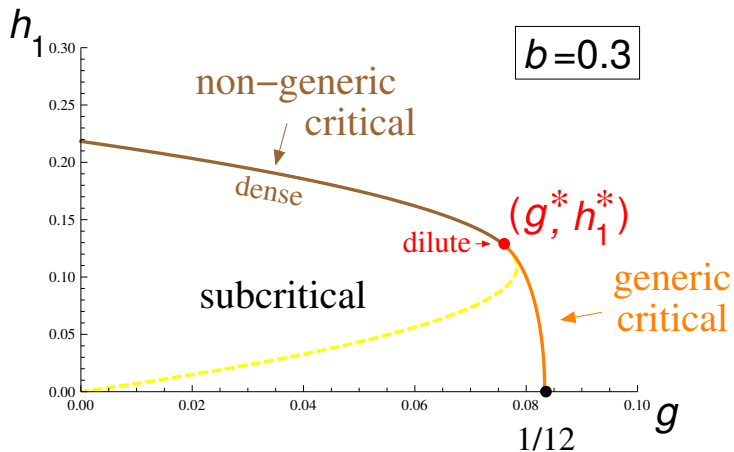
$$g = \frac{3}{2 + b^2} \left(h_1 - \frac{2 - n}{2b^2} h_1^2 \right).$$

On déduit de plus que pour $p \rightarrow \infty$

$$F_p \propto \begin{cases} h_1^{-p}/p^{2-b}, & g < g^* \\ h_1^{-p}/p^{2+b}, & g = g^* \end{cases}$$

$$\text{où } g^* = \frac{3b^2(2-b)^2}{2(2-n)(b^2-2b+3)^2}, \quad h_1^* = \frac{b^2(2-b)^2}{(2-n)(b^2-2b+3)}.$$

Diagramme de phase exact



Conclusion et perspectives

- Nous avons introduit un modèle de boucles $O(n)$ sur les quadrangulations. Il diffère légèrement du modèle “résolu” par Kostov puis Eynard–Kristjansen, défini sur des triangulations.
- Par décomposition récursive, nous avons obtenu une équation de point fixe pour la série génératrice du modèle.
- Nous avons classifié ainsi les limites d'échelle possibles du tamis dans le cas rigide ($h_2 = 0$). Cette classification reste valable essentiellement telle quelle dans le cas général ($h_2 > 0$) et aussi dans des modèles de boucles sur d'autres familles de cartes biparties.
- Nous montrons l'existence de points critiques non-génériques, pour lesquelles la limite d'échelle du tamis correspond aux cartes stables de Le Gall et Miermont.
- Peut-on comprendre la limite d'échelle des configurations complètes ?