

# Une formule (très) simple pour compter les cartes

Guillaume Chapuy, CNRS & LIAFA, Université Paris Diderot

basé sur un travail en collaboration avec

Sean R. Carrell, Université de Waterloo (Canada)

# Aperçu et plan

je vais parler d'énumération de cartes

je vais donner une nouvelle formule vraiment très simple pour compter des cartes

... qui est une conséquence quasiment immédiate de choses bien connues

... mais qui semble être passée inaperçue jusque là

... alors que pourtant elle est remarquable.

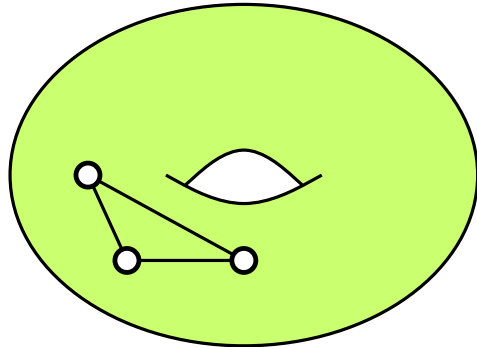
## PLAN:

1. généralités sur les cartes et sélection de résultats d'énumération classiques
2. une boîte noire (la hiérarchie KP) pour obtenir notre nouvelle formule
3. sur la boîte noire – crash course sur la hiérarchie KP (expérience)
4. perspectives, notamment bijectives et/ou probabilistes

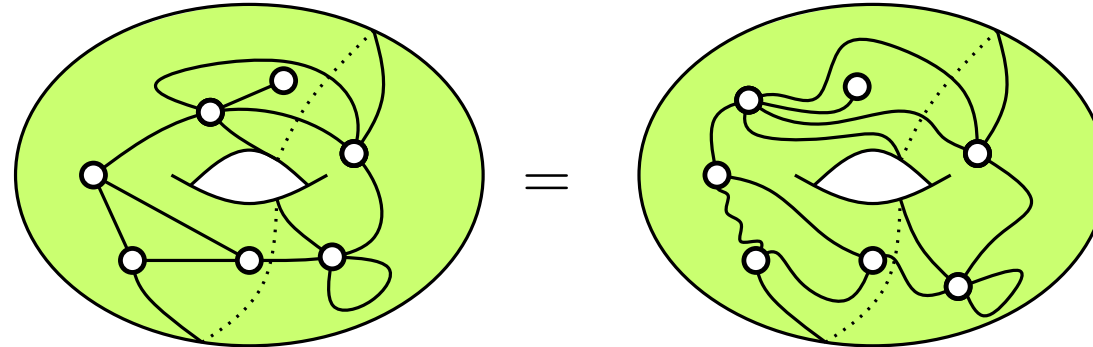
# I. Cartes

## Carte de genre $g$

= graphe dessiné (sans croisement) sur la surface orientable de genre  $g$ , de telle sorte que chaque face soit homéomorphe à un disque.



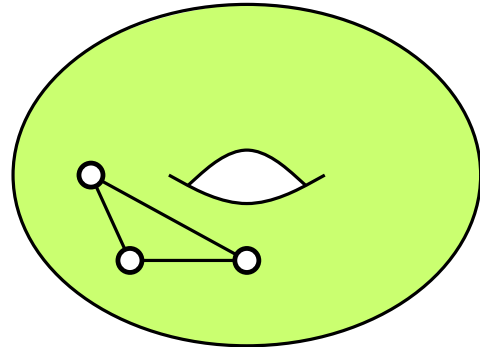
pas une carte !



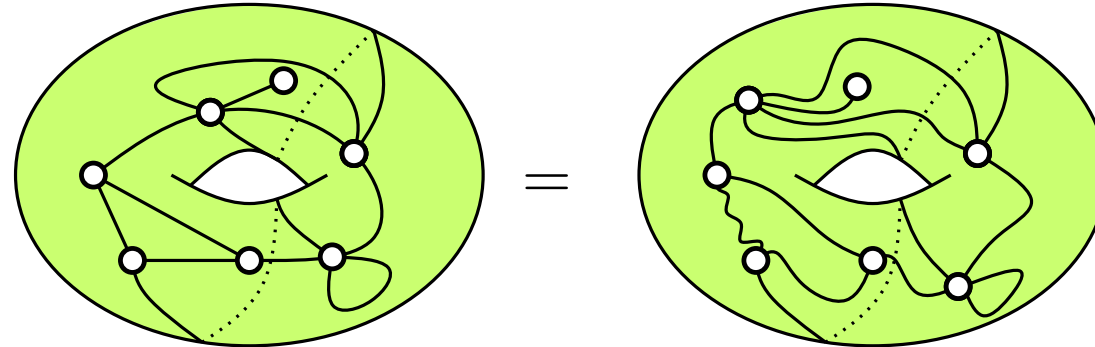
(les cartes sont considérées à homéomorphisme orienté près)

# Carte de genre $g$

= graphe dessiné (sans croisement) sur la **surface orientable de genre  $g$** , de telle sorte que chaque **face** soit homéomorphe à un disque.



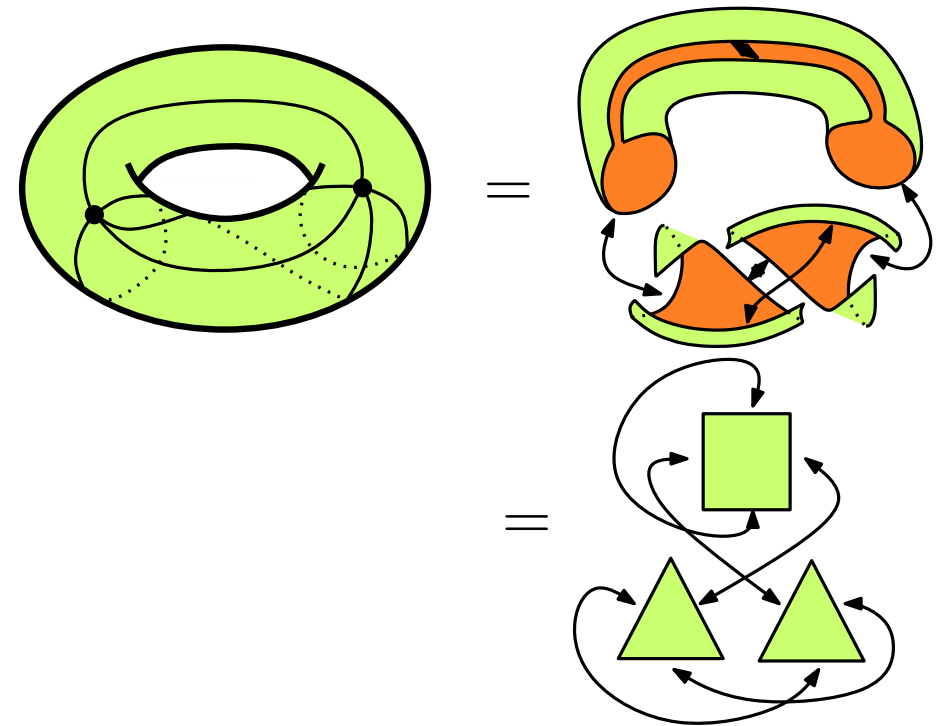
pas une carte !



(les cartes sont considérées à homéomorphisme orienté près)

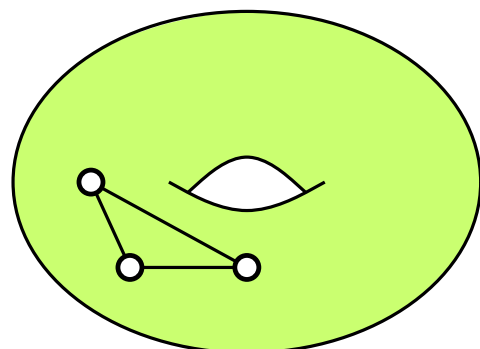
On peut voir une carte comme une **surface** formée du **recollement** d'un nombre fini de **polygones**.

(ici tous les recollements sont "orientables")

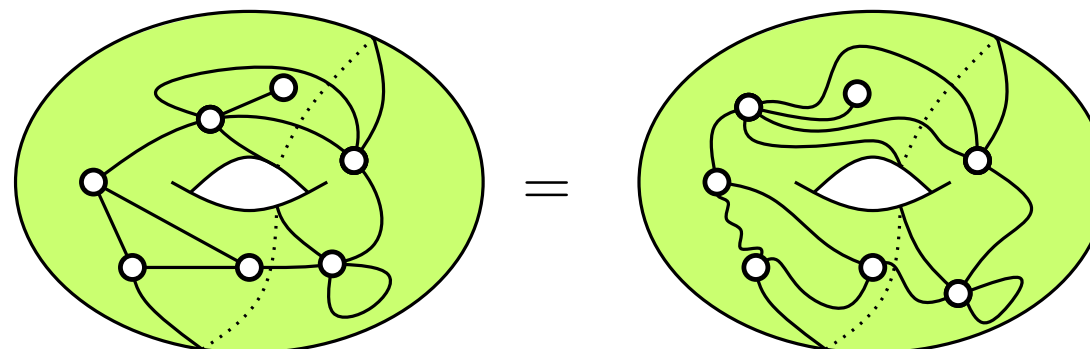


# Carte de genre $g$

= graphe dessiné (sans croisement) sur la **surface orientable de genre  $g$** , de telle sorte que chaque **face** soit homéomorphe à un disque.



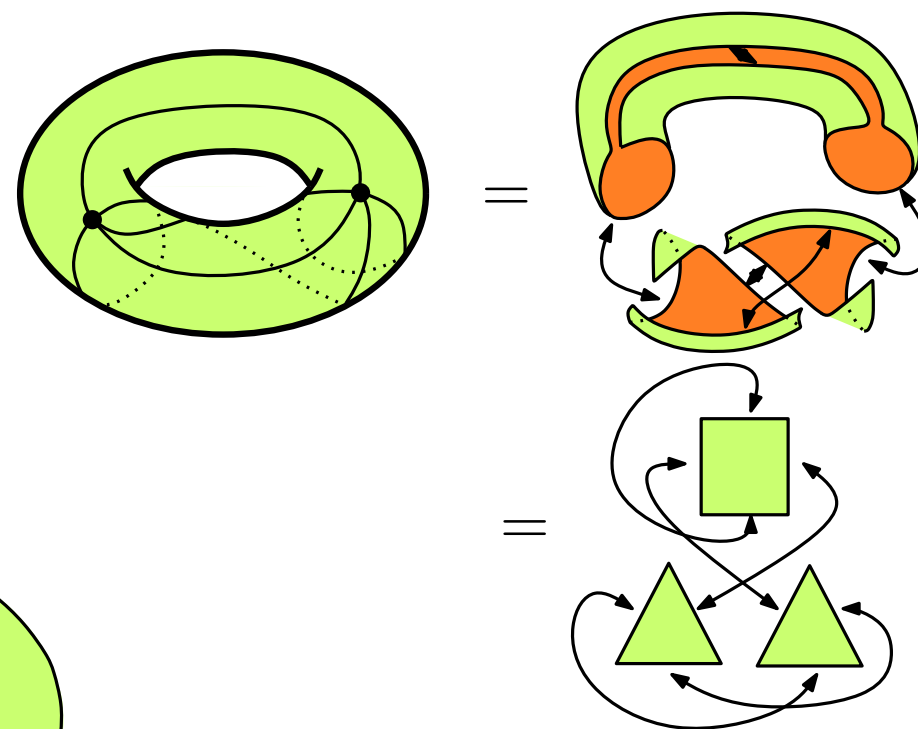
pas une carte !



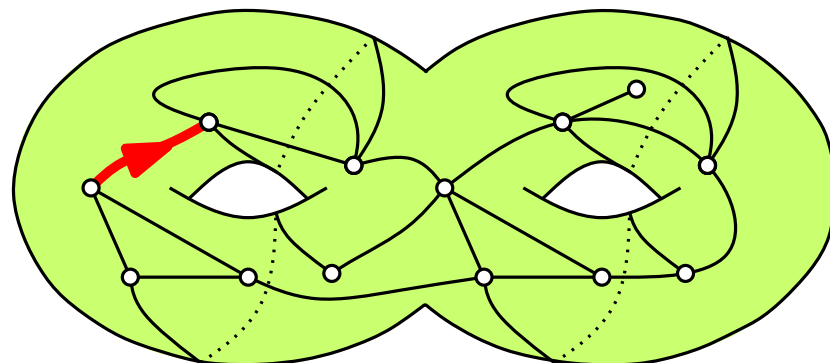
(les cartes sont considérées à homéomorphisme orienté près)

On peut voir une carte comme une **surface** formée du **recollement** d'un nombre fini de **polygones**.

(ici tous les recollements sont "orientables")

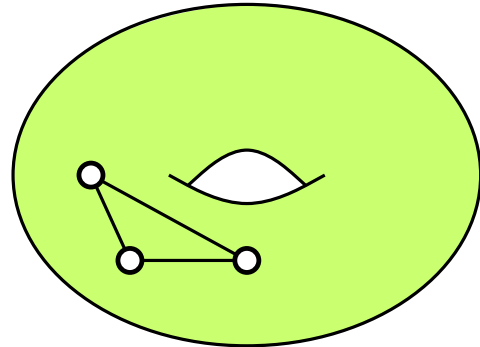


Pour l'énumération: **cartes enracinées**,  
*i.e.* une **arête** est distinguée est orientée.

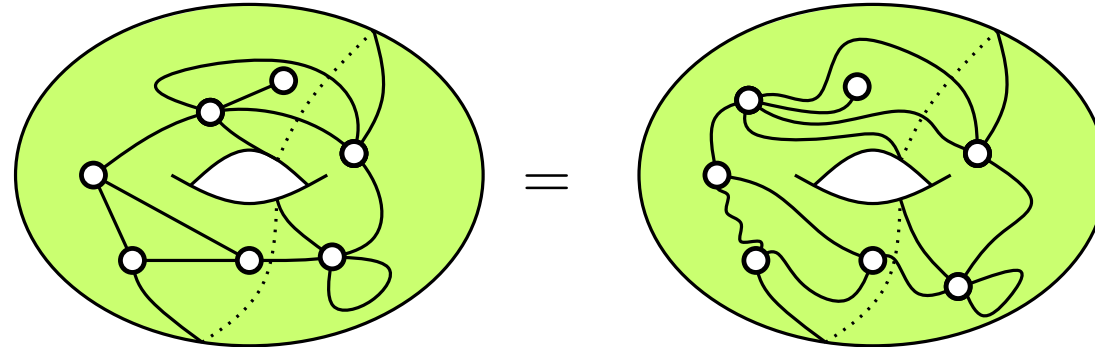


# Carte de genre $g$

= graphe dessiné (sans croisement) sur la **surface orientable de genre  $g$** , de telle sorte que chaque **face** soit homéomorphe à un disque.



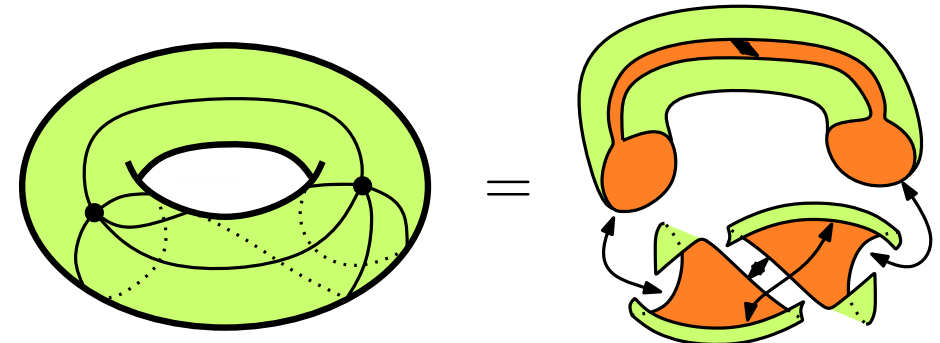
pas une carte !



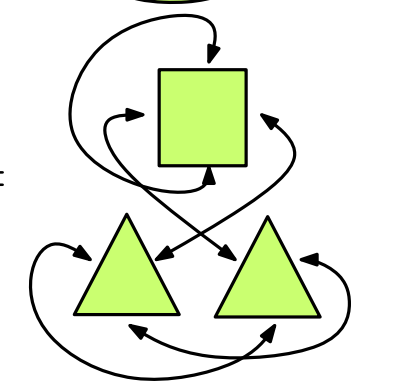
(les cartes sont considérées à homéomorphisme orienté près)

On peut voir une carte comme une **surface** formée du **recollement** d'un nombre fini de **polygones**.

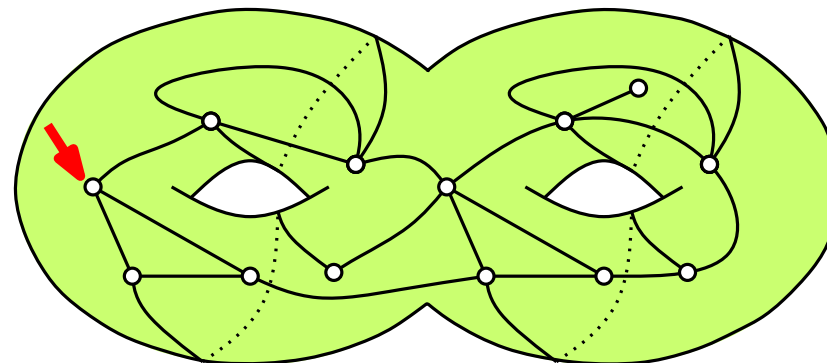
(ici tous les recollements sont "orientables")



Pour l'énumération: **cartes enracinées**,  
*i.e.* une **arête** est distinguée est orientée.



(ou alors un **coin** est distingué)



# Quelques paramètres et quelques exemples

- La relation d'Euler relie les principaux paramètres:

$$\text{sommets} + \text{faces} = \text{arêtes} + 2 - 2g.$$

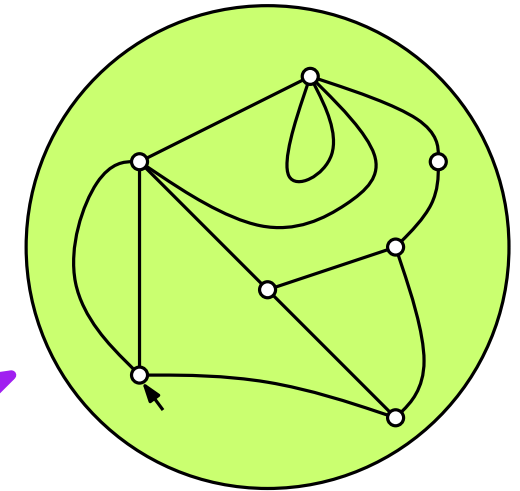


## Quelques paramètres et quelques exemples

- La **relation d'Euler** relie les principaux paramètres:

$$\text{sommets} + \text{faces} = \text{arêtes} + 2 - 2g.$$

- En genre **zéro** on parle de **carte planeaire**.

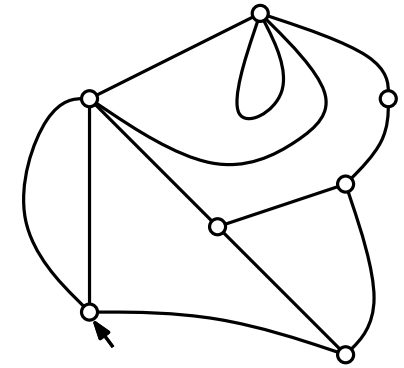


# Quelques paramètres et quelques exemples

- La **relation d'Euler** relie les principaux paramètres:

$$\text{sommets} + \text{faces} = \text{arêtes} + 2 - 2g.$$

- En genre **zéro** on parle de **carte planeaire**.

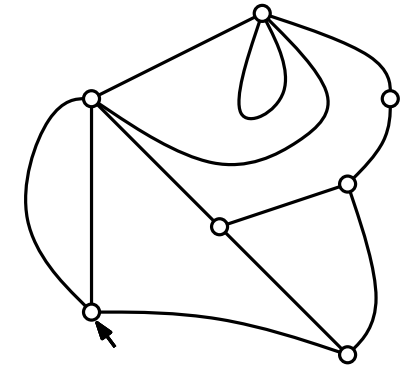


# Quelques paramètres et quelques exemples

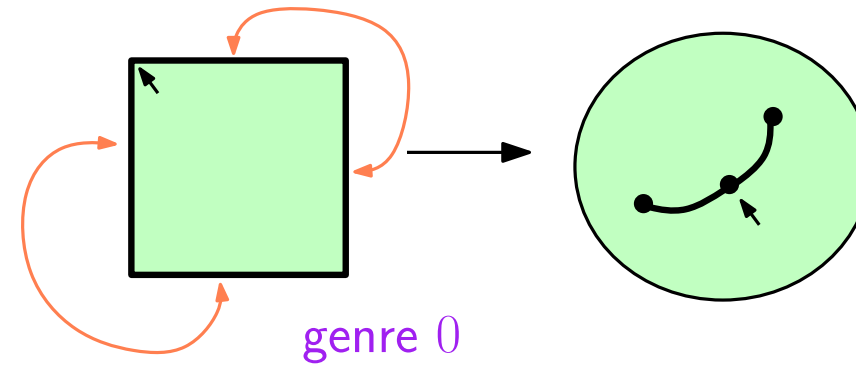
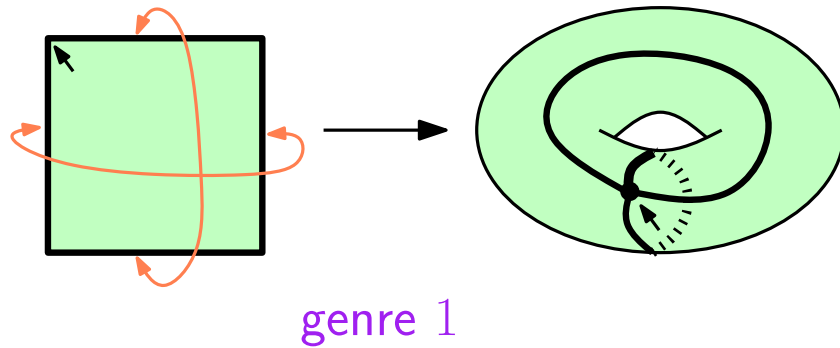
- La **relation d'Euler** relie les principaux paramètres:

$$\text{sommets} + \text{faces} = \text{arêtes} + 2 - 2g.$$

- En genre **zéro** on parle de **carte planeaire**.



- Si l'on recolle les bords **d'un seul polygone** on obtient une **carte à une face**:

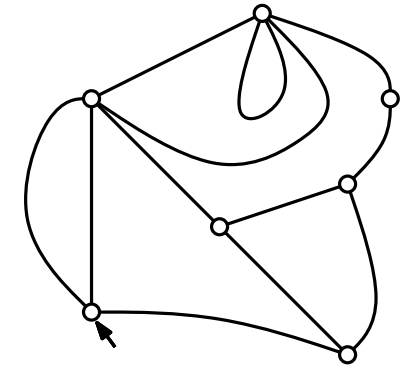


# Quelques paramètres et quelques exemples

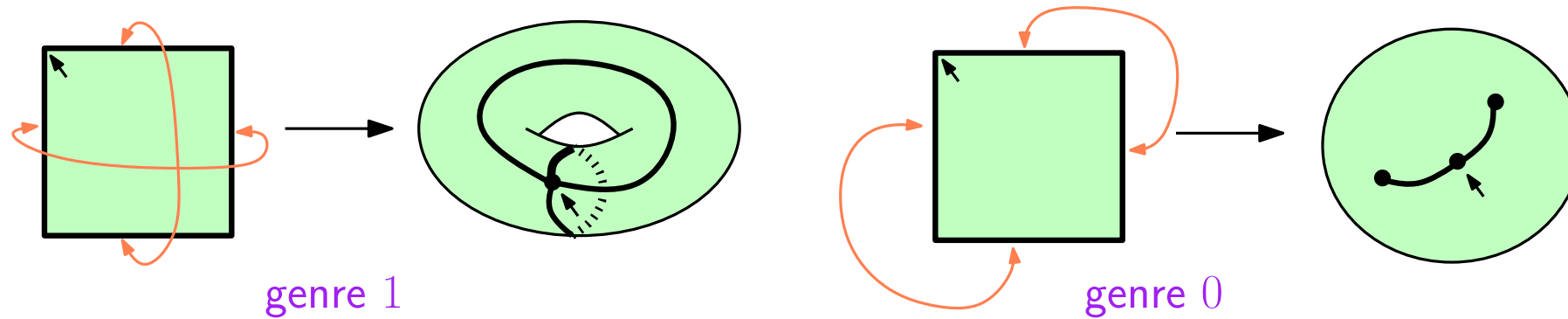
- La **relation d'Euler** relie les principaux paramètres:

$$\text{sommets} + \text{faces} = \text{arêtes} + 2 - 2g.$$

- En genre **zéro** on parle de **carte planeaire**.

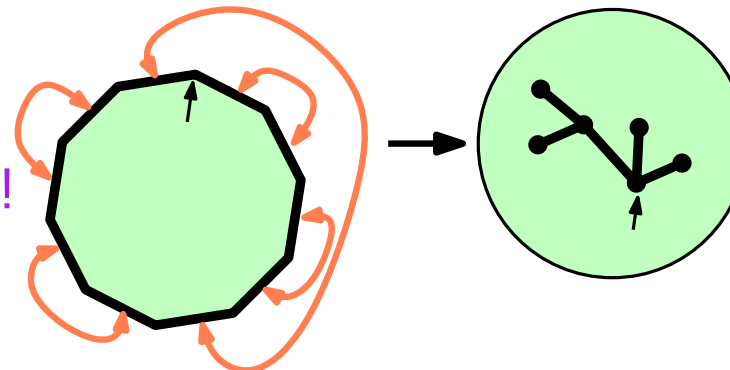


- Si l'on recolle les bords **d'un seul polygone** on obtient une **carte à une face**:



Une carte à une face à  $n$  arêtes a  $n + 1 - 2g$  sommets.

Et donc une carte à une face planeaire... est un arbre de Catalan!

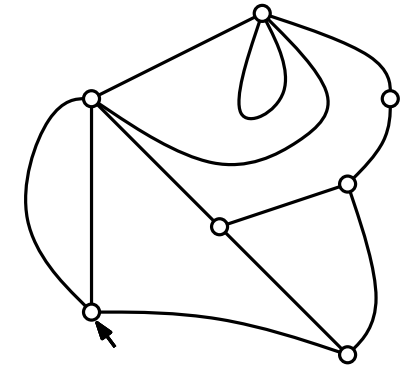


# Quelques paramètres et quelques exemples

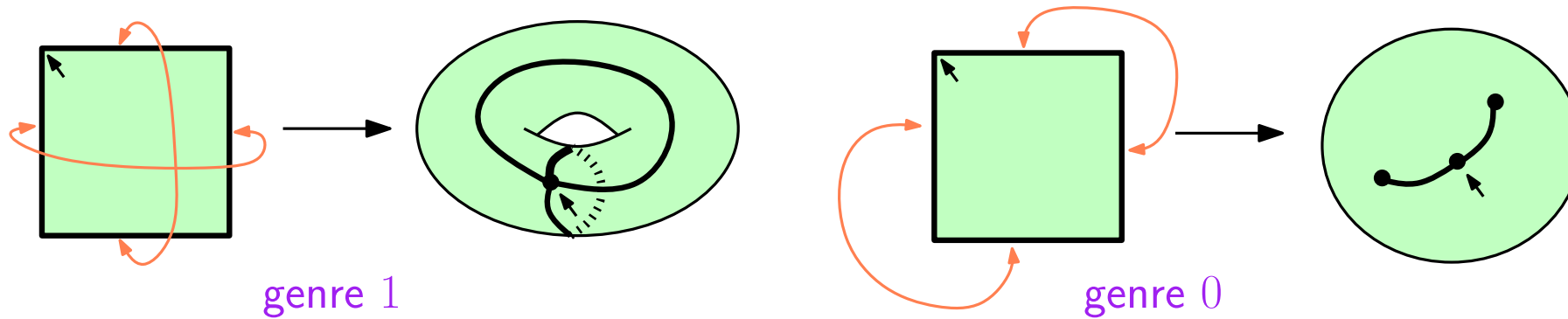
- La **relation d'Euler** relie les principaux paramètres:

$$\text{sommets} + \text{faces} = \text{arêtes} + 2 - 2g.$$

- En genre **zéro** on parle de **carte planeaire**.

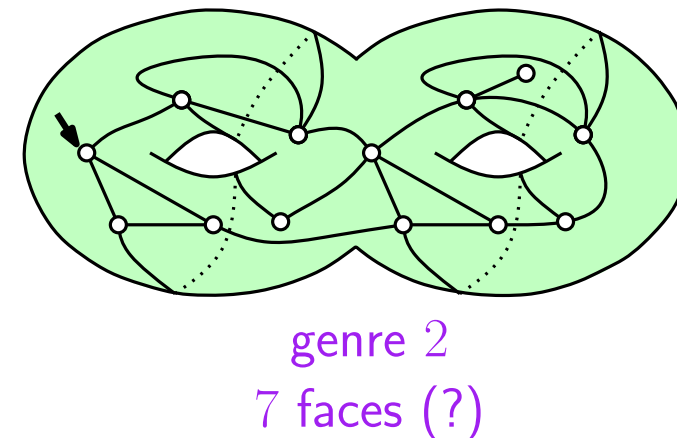
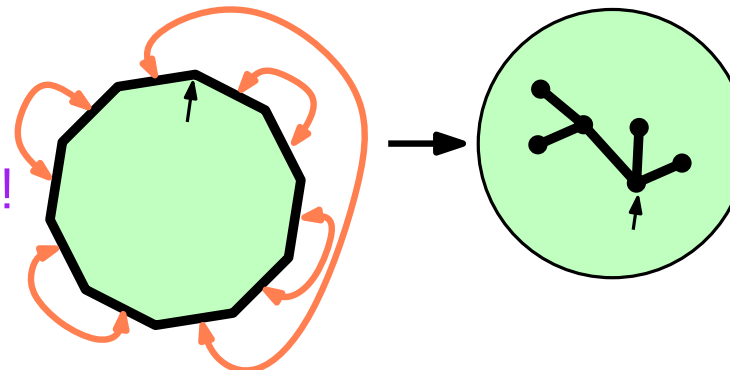


- Si l'on recolle les bords **d'un seul polygone** on obtient une **carte à une face**:



Une carte à une face à  $n$  arêtes a  $n + 1 - 2g$  sommets.

Et donc une carte à une face planeaire... est un arbre de Catalan!




# Quelques résultats classiques d'énumération de cartes (I)

[Tutte 1960] Nombre de cartes planaires

à  $n$  arêtes:

$$Q_0^n = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+2)(n+1)} \binom{2n}{n}$$

| $n \backslash g$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|------------------|---|---|---|---|---|-----|
| 0                |   |   |   |   |   |     |
| 1                |   |   |   |   |   |     |
| 2                |   |   |   |   |   |     |
| 3                |   |   |   |   |   |     |
| 4                |   |   |   |   |   |     |
| ⋮                |   |   |   |   |   |     |



# Quelques résultats classiques d'énumération de cartes (I)

[Tutte 1960] Nombre de cartes planaires

à  $n$  arêtes:

$$Q_0^n = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+2)(n+1)} \binom{2n}{n}$$

[Lehman Walsh 1972] Nombre de cartes de genre  $g$  à  $2g$  arêtes (=1 face et 1 sommet)

$$Q_g^{2g} = \frac{(4g-1)!!}{2g+1}$$

| $n \backslash g$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|------------------|---|---|---|---|---|-----|
| 0                |   |   |   |   |   |     |
| 1                |   |   |   |   |   |     |
| 2                |   |   |   |   |   |     |
| 3                |   |   |   |   |   |     |
| 4                |   |   |   |   |   |     |
| ⋮                |   |   |   |   |   |     |

# Quelques résultats classiques d'énumération de cartes (I)

[Tutte 1960] Nombre de cartes planaires à  $n$  arêtes:

$$Q_0^n = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+2)(n+1)} \binom{2n}{n}$$

[Lehman Walsh 1972] Nombre de cartes de genre  $g$  à  $2g$  arêtes (=1 face et 1 sommet)

$$Q_g^{2g} = \frac{(4g-1)!!}{2g+1}$$

[Bender et Canfield 1986:] Cartes de genre  $g$  à  $n$  arêtes:

$$F_g(z) = \sum_{n \geq 0} Q_g^n z^n = R_g(\sqrt{1-12z}) \text{ où } R_g \text{ fraction rationnelle.}$$

$$R_1(\rho) = \frac{(\rho-1)^2}{12(\rho+2)\rho^2}, \quad R_2(\rho) = \frac{1}{2304} \frac{(49\rho^4 + 122\rho^3 + 225\rho^2 + 248\rho + 112)(\rho+1)^2(\rho-1)^4}{\rho^7(\rho+2)^4}, \dots$$

Très compliqué de calculer  $R_g$  avec cette méthode sauf pour  $g$  tout petit.

| $n \backslash g$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|------------------|---|---|---|---|---|-----|
| 0                |   |   |   |   |   |     |
| 1                |   |   |   |   |   |     |
| 2                |   |   |   |   |   |     |
| 3                |   |   |   |   |   |     |
| 4                |   |   |   |   |   |     |
| ⋮                |   |   |   |   |   |     |



# Quelques résultats classiques d'énumération de cartes (I)

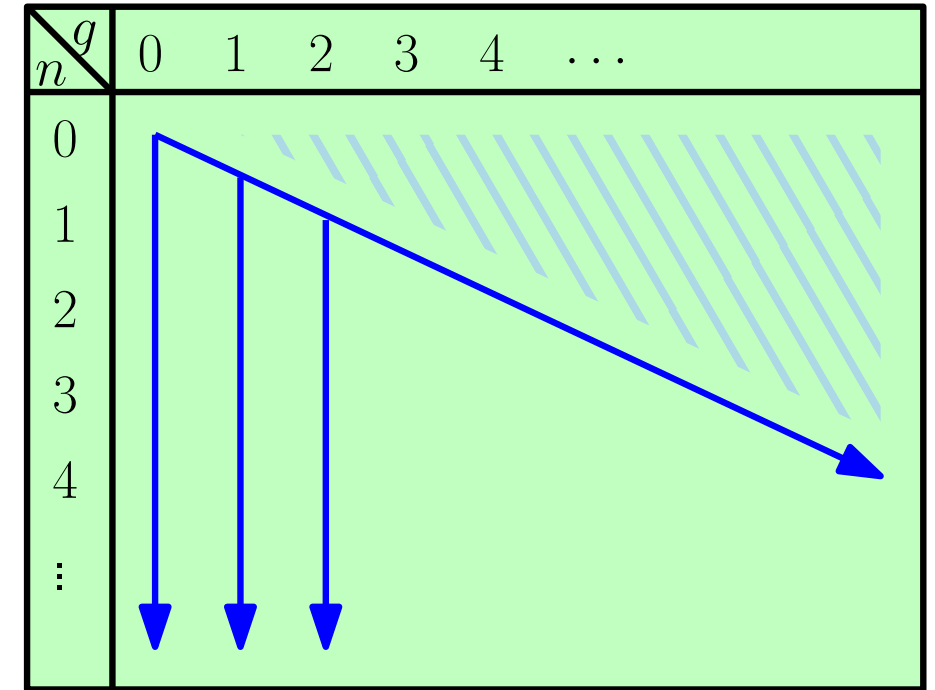
[Tutte 1960] Nombre de cartes planaires

à  $n$  arêtes:

$$Q_0^n = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+2)(n+1)} \binom{2n}{n}$$

[Lehman Walsh 1972] Nombre de cartes de genre  $g$  à  $2g$  arêtes (=1 face et 1 sommet)

$$Q_g^{2g} = \frac{(4g-1)!!}{2g+1}$$



[Bender et Canfield 1986:] Cartes de genre  $g$  à  $n$  arêtes:

$$F_g(z) = \sum_{n \geq 0} Q_g^n z^n = R_g(\sqrt{1-12z}) \text{ où } R_g \text{ fraction rationnelle.}$$

$$R_1(\rho) = \frac{(\rho-1)^2}{12(\rho+2)\rho^2}, \quad R_2(\rho) = \frac{1}{2304} \frac{(49\rho^4 + 122\rho^3 + 225\rho^2 + 248\rho + 112)(\rho+1)^2(\rho-1)^4}{\rho^7(\rho+2)^4}, \dots$$

Très compliqué de calculer  $R_g$  avec cette méthode sauf pour  $g$  tout petit.

# Quelques résultats classiques d'énumération de cartes (I)

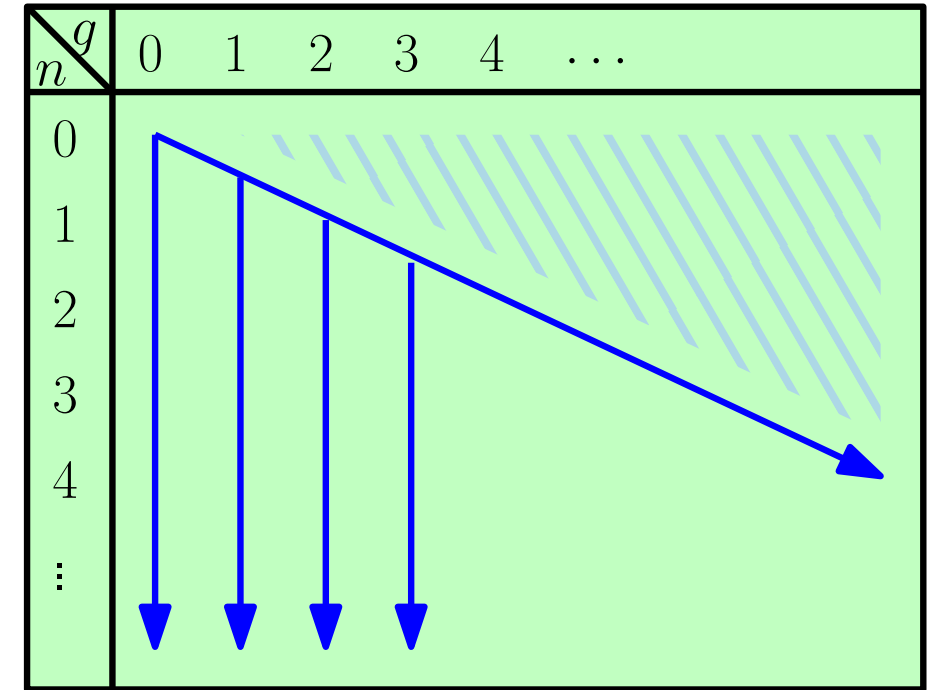
[Tutte 1960] Nombre de cartes planaires

à  $n$  arêtes:

$$Q_0^n = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+2)(n+1)} \binom{2n}{n}$$

[Lehman Walsh 1972] Nombre de cartes de genre  $g$  à  $2g$  arêtes (=1 face et 1 sommet)

$$Q_g^{2g} = \frac{(4g-1)!!}{2g+1}$$



[Bender et Canfield 1986:] Cartes de genre  $g$  à  $n$  arêtes:

$$F_g(z) = \sum_{n \geq 0} Q_g^n z^n = R_g(\sqrt{1-12z}) \text{ où } R_g \text{ fraction rationnelle.}$$

$$R_1(\rho) = \frac{(\rho-1)^2}{12(\rho+2)\rho^2}, \quad R_2(\rho) = \frac{1}{2304} \frac{(49\rho^4 + 122\rho^3 + 225\rho^2 + 248\rho + 112)(\rho+1)^2(\rho-1)^4}{\rho^7(\rho+2)^4}, \dots$$

Très compliqué de calculer  $R_g$  avec cette méthode sauf pour  $g$  tout petit.

# Quelques résultats classiques d'énumération de cartes (I)

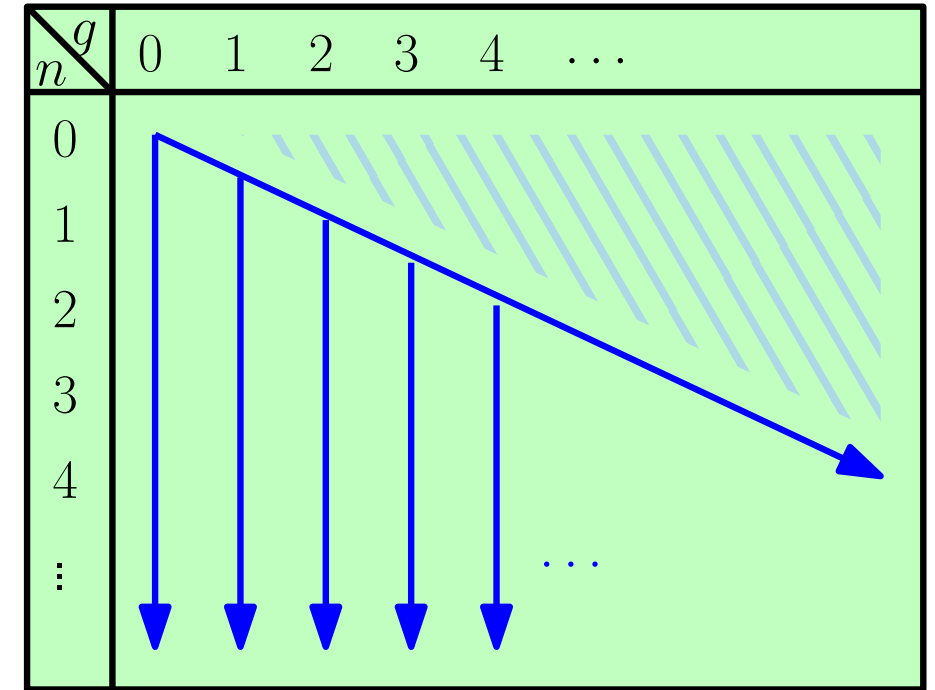
[Tutte 1960] Nombre de cartes planaires

à  $n$  arêtes:

$$Q_0^n = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+2)(n+1)} \binom{2n}{n}$$

[Lehman Walsh 1972] Nombre de cartes de genre  $g$  à  $2g$  arêtes (=1 face et 1 sommet)

$$Q_g^{2g} = \frac{(4g-1)!!}{2g+1}$$



[Bender et Canfield 1986:] Cartes de genre  $g$  à  $n$  arêtes:

$$F_g(z) = \sum_{n \geq 0} Q_g^n z^n = R_g(\sqrt{1-12z}) \text{ où } R_g \text{ fraction rationnelle.}$$

$$R_1(\rho) = \frac{(\rho-1)^2}{12(\rho+2)\rho^2}, \quad R_2(\rho) = \frac{1}{2304} \frac{(49\rho^4 + 122\rho^3 + 225\rho^2 + 248\rho + 112)(\rho+1)^2(\rho-1)^4}{\rho^7(\rho+2)^4}, \dots$$

Très compliqué de calculer  $R_g$  avec cette méthode sauf pour  $g$  tout petit.

# Quelques résultats classiques d'énumération de cartes (I)

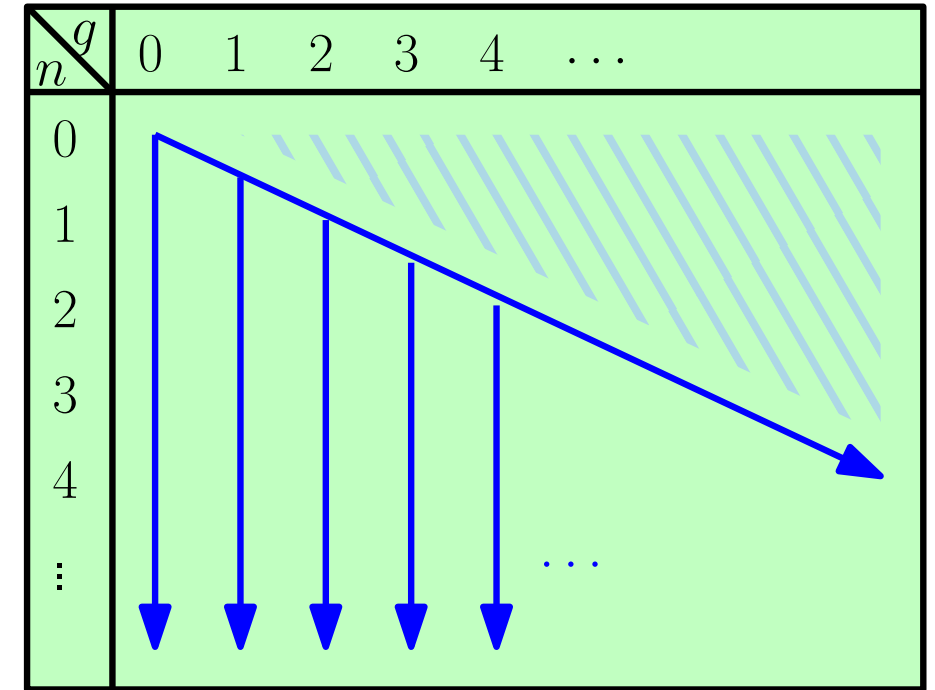
[Tutte 1960] Nombre de cartes planaires

à  $n$  arêtes:

$$Q_0^n = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+2)(n+1)} \binom{2n}{n}$$

[Lehman Walsh 1972] Nombre de cartes de genre  $g$  à  $2g$  arêtes (=1 face et 1 sommet)

$$Q_g^{2g} = \frac{(4g-1)!!}{2g+1}$$



[Bender et Canfield 1986:] Cartes de genre  $g$  à  $n$  arêtes:

$$F_g(z) = \sum_{n \geq 0} Q_g^n z^n = R_g(\sqrt{1-12z}) \text{ où } R_g \text{ fraction rationnelle.}$$

$$R_1(\rho) = \frac{(\rho-1)^2}{12(\rho+2)\rho^2}, \quad R_2(\rho) = \frac{1}{2304} \frac{(49\rho^4 + 122\rho^3 + 225\rho^2 + 248\rho + 112)(\rho+1)^2(\rho-1)^4}{\rho^7(\rho+2)^4}, \dots$$

Très compliqué de calculer  $R_g$  avec cette méthode sauf pour  $g$  tout petit.

Asymptotique à  $g$  fixé:  $Q_g^n \sim t_g n^{\frac{5}{2}(g-1)} 12^n$  où  $t_g > 0$ .

# Quelques résultats classiques d'énumération de cartes (I)

[Tutte 1960] Nombre de cartes planaires

à  $n$  arêtes:

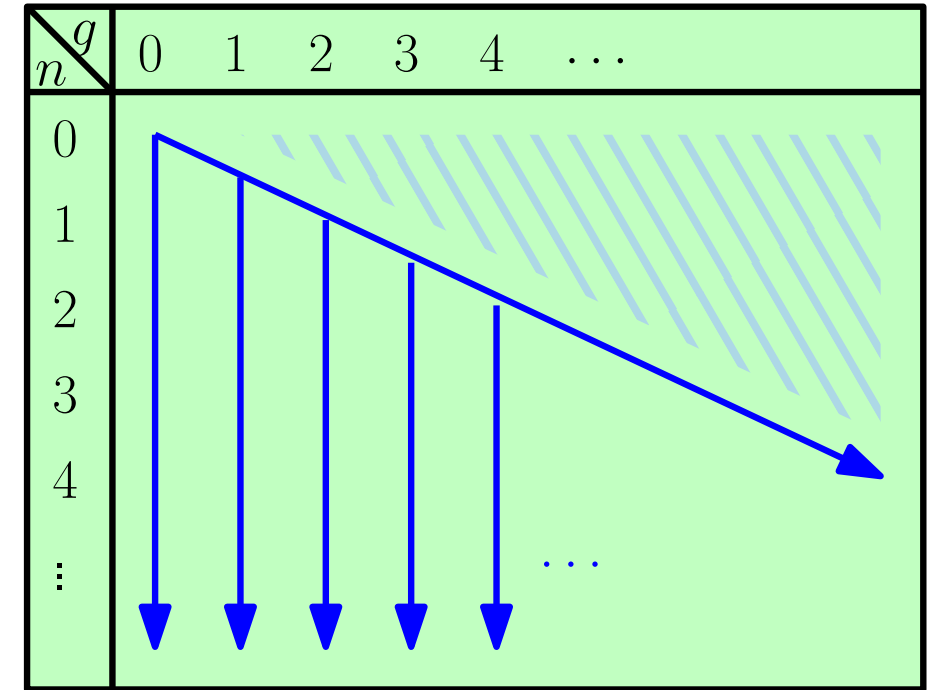
$$Q_0^n = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+2)(n+1)} \binom{2n}{n}$$

bijection [Schaeffer 97, Poulalhon, Fusy, Bouttier, Di Francesco, Guitter...]

[Lehman Walsh 1972] Nombre de cartes de genre  $g$  à  $2g$  arêtes (=1 face et 1 sommet)

$$Q_g^{2g} = \frac{(4g-1)!!}{2g+1}$$

bijection [C. 09]



[Bender et Canfield 1986:] Cartes de genre  $g$  à  $n$  arêtes:

explications bijectives partielles [C., Marcus, Schaeffer 07]

$$F_g(z) = \sum_{n \geq 0} Q_g^n z^n = R_g(\sqrt{1-12z}) \text{ où } R_g \text{ fraction rationnelle.}$$

$$R_1(\rho) = \frac{(\rho-1)^2}{12(\rho+2)\rho^2}, \quad R_2(\rho) = \frac{1}{2304} \frac{(49\rho^4 + 122\rho^3 + 225\rho^2 + 248\rho + 112)(\rho+1)^2(\rho-1)^4}{\rho^7(\rho+2)^4}, \dots$$

Très compliqué de calculer  $R_g$  avec cette méthode sauf pour  $g$  tout petit.

Asymptotique à  $g$  fixé:  $Q_g^n \sim t_g n^{\frac{5}{2}(g-1)} 12^n$  où  $t_a > 0$ .

bijection [C., Marcus, Schaeffer 07]

## Quelques résultats classiques d'énumération de cartes (II)

[années 1980/90s, preuves satisfaisantes depuis les années 2000]

Certaines fonctions génératrices de cartes sont des tau-fonctions de hiérarchies intégrables comme KP ou 2-Toda (!?).

Jolies applications à l'asymptotique

$$\tau_g = \frac{1}{3}(5g-4)(5g-6)\tau_{g-1} + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{g-1} \tau_h \tau_{g-h},$$

pas de bijection!!!

$$\text{où } Q_g^n \sim t_g n^{\frac{5}{2}(g-1)} 12^n \text{ et } \tau_g = 2^{5g-2} \Gamma\left(\frac{5g-1}{2}\right) t_g.$$

# Quelques résultats classiques d'énumération de cartes (II)

[années 1980/90s, preuves satisfaisantes depuis les années 2000]

Certaines fonctions génératrices de cartes sont des tau-fonctions de hiérarchies intégrables comme KP ou 2-Toda (!?).

Jolies applications à l'asymptotique

$$\tau_g = \frac{1}{3}(5g-4)(5g-6)\tau_{g-1} + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{g-1} \tau_h \tau_{g-h},$$

pas de bijection!!!

$$\text{où } Q_g^n \sim t_g n^{\frac{5}{2}(g-1)} 12^n \text{ et } \tau_g = 2^{5g-2} \Gamma\left(\frac{5g-1}{2}\right) t_g.$$

[Harer-Zagier 1986] Le nombre de cartes à une face de genre  $g$  à  $n$  arêtes satisfait:

$$(n+1)\epsilon_g^n = 2(2n-1)\epsilon_g^{n-1} + (2n-1)(n-1)(2n-3)\epsilon_{g-1}^{n-2}$$

bijection [C.-Féray-Fusy 12]

$$\text{par exemple } \epsilon_0^n = \text{Cat}(n)$$

$$\text{en général } \epsilon_g^n = P_g(n) \times \text{Cat}(n)$$

bijection [C. 09]

# Nouveau (?!) – une formule de récurrence (très) simple

- **Théorème** [Carrell-C. 14] Le nombre  $Q_g^n$  de cartes de genre  $g$  à  $n$  arêtes satisfait la formule de récurrence simple:

$$\frac{n+1}{6} Q_g^n = \frac{4n-2}{3} Q_g^{n-1} + \frac{(2n-3)(2n-2)(2n-1)}{12} Q_{g-1}^{n-2} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k+l=n \\ k, l \geq 1}} \sum_{\substack{i+j=g \\ i, j \geq 0}} (2k-1)(2l-1) Q_i^{k-1} Q_j^{\ell-1}.$$



# Nouveau (?!) – une formule de récurrence (très) simple

- **Théorème** [Carrell-C. 14] Le nombre  $Q_g^n$  de cartes de genre  $g$  à  $n$  arêtes satisfait la formule de récurrence simple:

$$\frac{n+1}{6} Q_g^n = \frac{4n-2}{3} Q_g^{n-1} + \frac{(2n-3)(2n-2)(2n-1)}{12} Q_{g-1}^{n-2} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k+\ell=n \\ k,\ell \geq 1}} \sum_{\substack{i+j=g \\ i,j \geq 0}} (2k-1)(2\ell-1) Q_i^{k-1} Q_j^{\ell-1}.$$

- donne une **formule de récurrence SIMPLE** pour calculer les fonctions génératrices:

$$\frac{d}{dT} \left( \frac{(T-1)(T+2)}{3T} S_g(T) \right) = \frac{(T-1)^2}{18T^4} (2D+1)(2D+2)(2D+3) S_{g-1}(T) + \frac{(T-1)^2}{3T^4} \sum_{\substack{i+j=g \\ i,j \geq 1}} ((2D+1)S_i(T)) ((2D+1)S_j(T)),$$

où  $D = \frac{T(1-T)}{T-2} \frac{d}{dT}$ ,  $T = 1 + 3zT^2$  et  $F_g(z) = S_g(T)$ .

# Nouveau (?!) – une formule de récurrence (très) simple

- **Théorème [Carrell-C. 14]** Le nombre  $Q_g^n$  de cartes de genre  $g$  à  $n$  arêtes satisfait la formule de récurrence simple:

$$\frac{n+1}{6} Q_g^n = \frac{4n-2}{3} Q_g^{n-1} + \frac{(2n-3)(2n-2)(2n-1)}{12} Q_{g-1}^{n-2} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k+\ell=n \\ k,\ell \geq 1}} \sum_{\substack{i+j=g \\ i,j \geq 0}} (2k-1)(2\ell-1) Q_i^{k-1} Q_j^{\ell-1}.$$

- donne une **formule de récurrence SIMPLE** pour calculer les fonctions génératrices:

$$\frac{d}{dT} \left( \frac{(T-1)(T+2)}{3T} S_g(T) \right) = \frac{(T-1)^2}{18T^4} (2D+1)(2D+2)(2D+3) S_{g-1}(T) + \frac{(T-1)^2}{3T^4} \sum_{\substack{i+j=g \\ i,j \geq 1}} ((2D+1)S_i(T)) ((2D+1)S_j(T)),$$

où  $D = \frac{T(1-T)}{T-2} \frac{d}{dT}$ ,  $T = 1 + 3zT^2$  et  $F_g(z) = S_g(T)$ .

- ici “simple” = seulement **deux variables** (juste  $n$  et  $g$ , ou  $z$  et  $g$ ).
- Pour calculer  $F_g$  les méthodes à base **d'équations de Tutte/boucles** requièrent de calculer les **fonctions multivariées**  $F_h(z; x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$  pour  $0 \leq h+k \leq g$  où  $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$  marquent les degrés de  $(k+1)$  faces racines.

# Nouveau (?!) – une formule de récurrence (très) simple

- **Théorème** [Carrell-C. 14] Le nombre  $Q_g^n$  de cartes de genre  $g$  à  $n$  arêtes satisfait la formule de récurrence simple:

$$\frac{n+1}{6} Q_g^n = \frac{4n-2}{3} Q_g^{n-1} + \frac{(2n-3)(2n-2)(2n-1)}{12} Q_{g-1}^{n-2} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k+\ell=n \\ k,\ell \geq 1}} \sum_{\substack{i+j=g \\ i,j \geq 0}} (2k-1)(2\ell-1) Q_i^{k-1} Q_j^{\ell-1}.$$

- donne une **formule de récurrence SIMPLE** pour calculer les fonctions génératrices:

$$\frac{d}{dT} \left( \frac{(T-1)(T+2)}{3T} S_g(T) \right) = \frac{(T-1)^2}{18T^4} (2D+1)(2D+2)(2D+3) S_{g-1}(T) + \frac{(T-1)^2}{3T^4} \sum_{\substack{i+j=g \\ i,j \geq 1}} ((2D+1)S_i(T)) ((2D+1)S_j(T)),$$

où  $D = \frac{T(1-T)}{T-2} \frac{d}{dT}$ ,  $T = 1 + 3zT^2$  et  $F_g(z) = S_g(T)$ .

- ici “simple” = seulement **deux variables** (juste  $n$  et  $g$ , ou  $z$  et  $g$ ).
- Pour calculer  $F_g$  les méthodes à base **d'équations de Tutte/boucles** requièrent de calculer les **fonctions multivariées**  $F_h(z; x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$  pour  $0 \leq h+k \leq g$  où  $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$  marquent les degrés de  $(k+1)$  faces racines.
- “simple” se réfère aussi à l'allure très combinatoire!

Par exemple Maple me dit en trois minutes que:

$Q_{80}^{250} = 34481171440424790073577540139584299940598038451292598915073402$   
73687077594769403257836925421291143022282673091300878649350968  
86478977424937817500082723356370047571970901810884281261725178  
47881189499546610081273297579925811167493312899269398918456543  
49376617149338330285762079206869015574164674901642353126827394  
62278601800327950896065519706386957768862080537499580134737907  
27758110486010784870721621868641637805822587034734898627431990  
78485451935190253385478026008536577007666435192027672624614237  
24544845406398880

Par exemple Maple me dit en trois minutes que:

$Q_{80}^{250} = 34481171440424790073577540139584299940598038451292598915073402$   
73687077594769403257836925421291143022282673091300878649350968  
86478977424937817500082723356370047571970901810884281261725178  
47881189499546610081273297579925811167493312899269398918456543  
49376617149338330285762079206869015574164674901642353126827394  
62278601800327950896065519706386957768862080537499580134737907  
27758110486010784870721621868641637805822587034734898627431990  
78485451935190253385478026008536577007666435192027672624614237  
24544845406398880

ce qui est tout à fait intéressant (?)

# Nouveau (?!) – une formule de récurrence (très) simple (II)

Nous avons aussi une version à **trois paramètres** (genre/sommets/faces)

• **Théorème** [Carrell-C. 14] Le nombre  $M_g^{i,j}$  de cartes de genre  $g$  à  $i$  sommets et  $j$  faces satisfait:

$$\frac{n+1}{6} M_g^{i,j} = \frac{(2n-1)}{3} \left( M_g^{i-1,j} + M_g^{i,j-1} + \frac{(2n-3)(2n-2)}{4} M_{g-1}^{i,j} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i_1+i_2=i \\ i_1, i_2 \geq 1}} \sum_{\substack{j_1+j_2=j \\ j_1, j_2 \geq 1}} \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ g_1, g_2 \geq 0}} (2n_1-1)(2n_2-1) M_{g_1}^{i_1, j_1} M_{g_2}^{i_2, j_2},$$

merci Éric Fusy d'avoir  
posé la question des  
trois paramètres!

$$n = i + j + 2g - 2$$

$$n_1 = i_1 + j_1 + 2g_1 - 1$$

$$n_2 = i_2 + j_2 + 2g_2 - 1$$

# Nouveau (?!) – une formule de récurrence (très) simple (II)

Nous avons aussi une version à **trois paramètres** (genre/sommets/faces)

• **Théorème [Carrell-C. 14]** Le nombre  $M_g^{i,j}$  de cartes de genre  $g$  à  $i$  sommets et  $j$  faces satisfait:

$$\frac{n+1}{6} M_g^{i,j} = \frac{(2n-1)}{3} \left( M_g^{i-1,j} + M_g^{i,j-1} + \frac{(2n-3)(2n-2)}{4} M_{g-1}^{i,j} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i_1+i_2=i \\ i_1, i_2 \geq 1}} \sum_{\substack{j_1+j_2=j \\ j_1, j_2 \geq 1}} \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ g_1, g_2 \geq 0}} (2n_1-1)(2n_2-1) M_{g_1}^{i_1, j_1} M_{g_2}^{i_2, j_2},$$

merci Éric Fusy d'avoir  
posé la question des  
trois paramètres!

• Dans le cas des cartes à **une seule face** ( $j = 1$ ) ce n'est autre que la **formule de récurrence de Harer et Zagier**.

$$\begin{aligned} n &= i + j + 2g - 2 \\ n_1 &= i_1 + j_1 + 2g_1 - 1 \\ n_2 &= i_2 + j_2 + 2g_2 - 1 \end{aligned}$$

$$(n+1)\epsilon_g^n = 2(2n-1)\epsilon_g^{n-1} + (2n-1)(n-1)(2n-3)\epsilon_{g-1}^{n-2}$$

- Or: -  $\exists$  de nombreuses preuves de cette formule, toutes spécifiques aux cartes à une seule face. C'est donc assez surprenant.
- depuis [C.-Féray-Fusy 2012] on sait démontrer bijectivement la récurrence de HZ... c'est donc plutôt encourageant.

## **II. Des manipulations simples sur les cartes (avec KP comme boîte noire)**



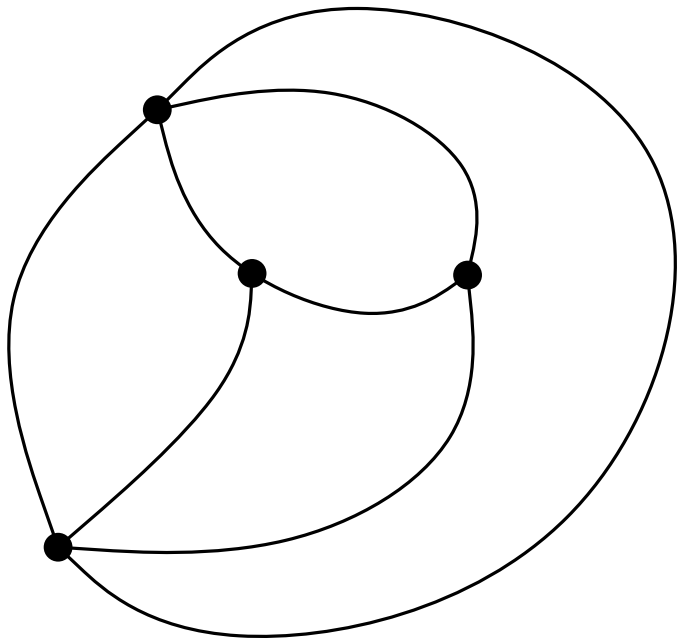
# Échauffement combinatoire: la bijection classique de Tutte

# Échauffement combinatoire: la bijection classique de Tutte

{ cartes à  $n$  arêtes }

$\leftrightarrow$

{ quadrangulations biparties à  $n$  faces (et  $2n$  arêtes) }

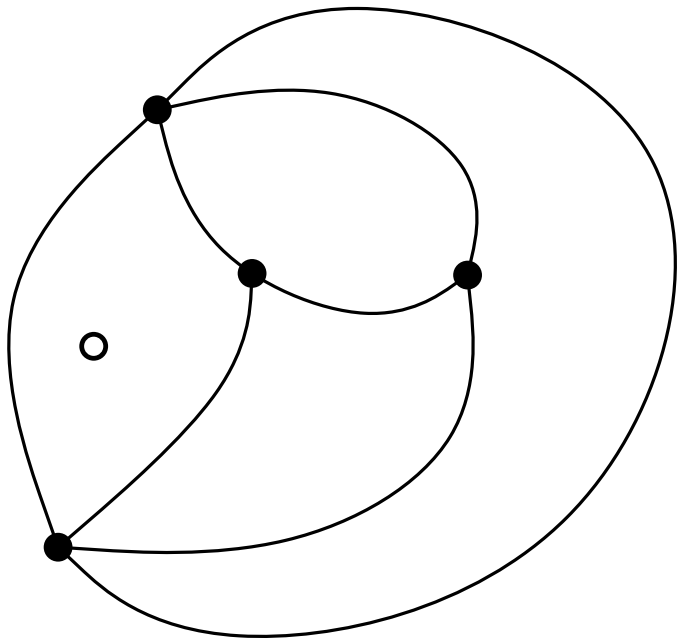


# Échauffement combinatoire: la bijection classique de Tutte

{ cartes à  $n$  arêtes }

$\leftrightarrow$

{ quadrangulations biparties à  $n$  faces (et  $2n$  arêtes) }

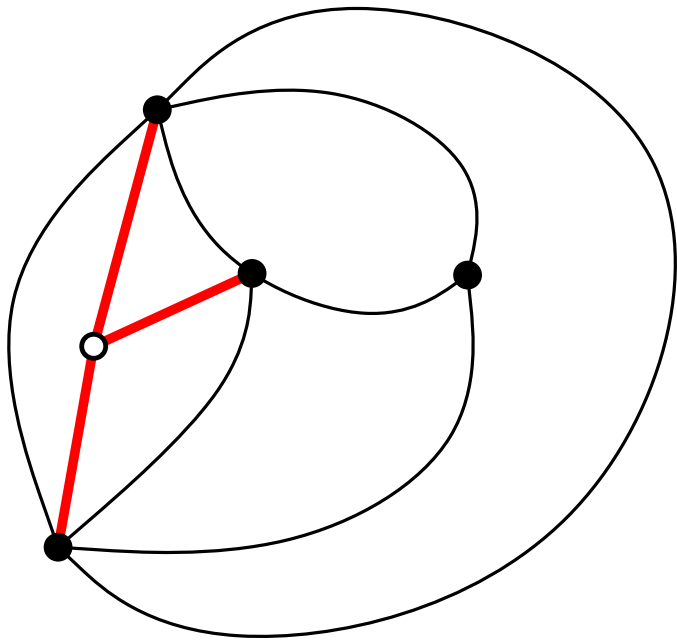


# Échauffement combinatoire: la bijection classique de Tutte

{ cartes à  $n$  arêtes }

$\leftrightarrow$

{ quadrangulations biparties à  $n$  faces (et  $2n$  arêtes) }

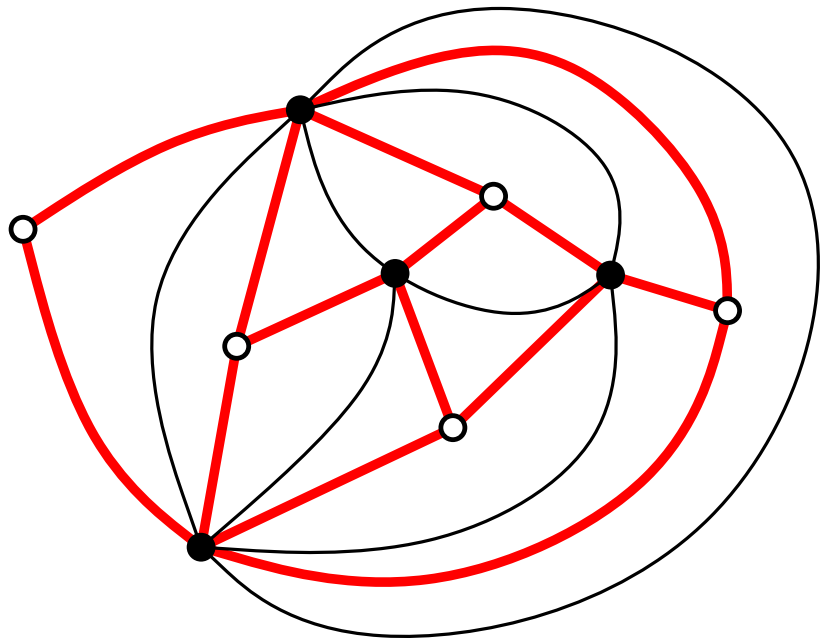


# Échauffement combinatoire: la bijection classique de Tutte

{ cartes à  $n$  arêtes }

$\leftrightarrow$

{ quadrangulations biparties à  $n$  faces (et  $2n$  arêtes) }

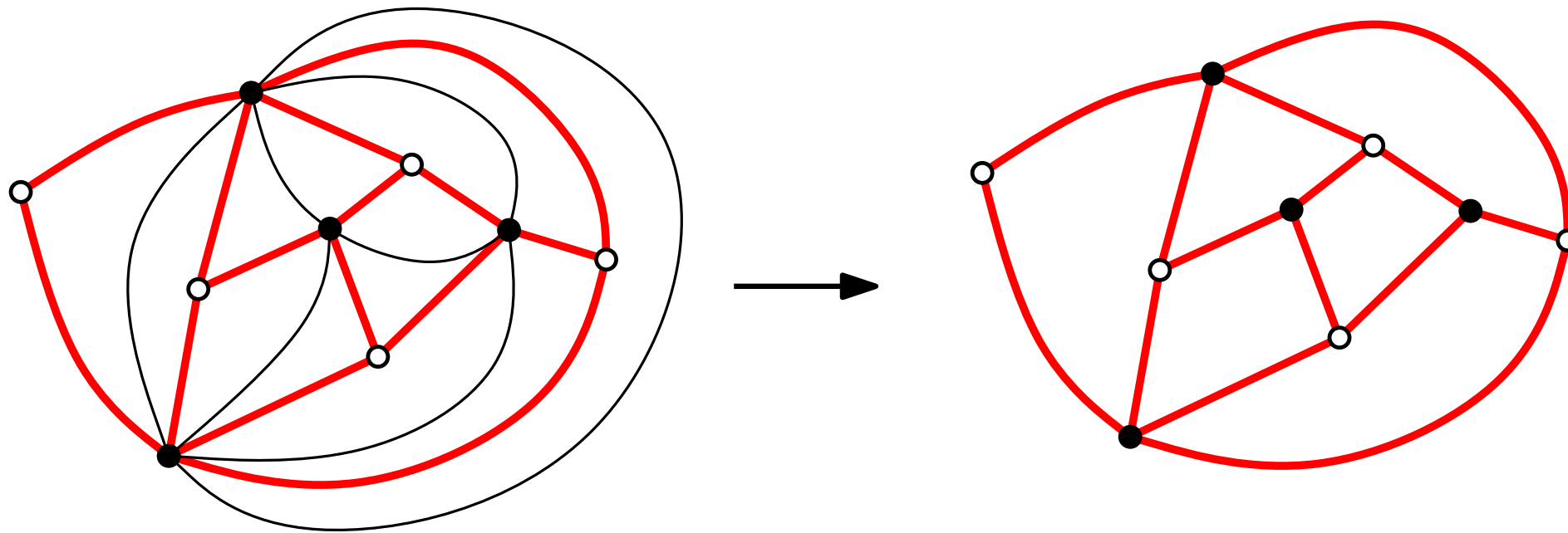


# Échauffement combinatoire: la bijection classique de Tutte

{ cartes à  $n$  arêtes }

$\leftrightarrow$

{ quadrangulations biparties à  $n$  faces (et  $2n$  arêtes) }



## Un énoncé “boîte noire”

- Soit  $F(z, w; \mathbf{p}) = F(z, w; p_1, p_2, p_3, \dots)$  la série génératrice de toutes les cartes biparties où:
  - $z$  marque les arêtes,  $w$  marque les sommets
  - $p_i$  marque les faces de degré  $2i$

$$F(z, w; \mathbf{p}) := 1 + \sum_{\text{cartes bip.}} \frac{z^{\#\text{arêtes}}}{\#\text{arêtes}} w^{\#\text{sommets}} \prod_i p_i^{\#\text{faces de deg. } 2i}$$

### • Théorème [??? - Goulden-Jackson'08]

La fonction  $F(z, w; \mathbf{p})$  est solution d'un système infini d'équations aux dérivées partielles en les variables  $p_i$  appelée la hiérarchie KP.

Quelques équations:  $F_{2,2} - F_{3,1} + \frac{1}{12}F_{1^4} + \frac{1}{2}F_{1^2}^2 = 0$  (KP)

$$F_{3,2} - F_{4,1} + \frac{1}{6}F_{2,1^3} + F_{1,1}F_{2,1} = 0$$

$$F_{4,2} - F_{5,1} + \frac{1}{4}F_{3,1^3} - \frac{1}{120}F_{1^6} + F_{1^2}F_{3,1} - \frac{1}{2}F_{2,1}^2 - \frac{1}{8}F_{3,1}^2 - \frac{1}{12}F_{1^2}F_{1^4} = 0$$

...

- Dans la suite je vais
- dire que notre formule est une conséquence directe de cela
  - essayer de donner une idée d'où ça vient

**Notre (nouvelle) formule est directe à partir de l'éq. KP (I)**

$$F_{2,2} - F_{3,1} + \frac{1}{12}F_{1^4} + \frac{1}{2}(F_{1^2})^2 = 0 \quad (KP)$$



# Notre (nouvelle) formule est directe à partir de l'éq. KP (I)

$$F_{2,2} - F_{3,1} + \frac{1}{12}F_{1^4} + \frac{1}{2}(F_{1^2})^2 = 0 \quad (KP)$$

Pour compter les **quadrangulations** on met  $p_2 = 1$  et  $p_i = 0$  pour  $i \neq 2$ .

**Notre observation:** chaque terme compte des **quadrangulations biparties** d'une certaine sorte.

● Par exemple  $F_{2,2} \Big|_{\substack{p_2=1 \\ p_i=0}}$  compte des quadrangulations avec deux faces marquées...

$$[z^{2n} w^{n+2-2g}] F_{2,2} \Big|_{\substack{p_2=1 \\ p_i=0}} = \frac{n(n-1)}{2n} Q_g^n.$$

# Notre (nouvelle) formule est directe à partir de l'éq. KP (I)

$$F_{2,2} - F_{3,1} + \frac{1}{12}F_{1^4} + \frac{1}{2}(F_{1^2})^2 = 0 \quad (KP)$$

Pour compter les **quadrangulations** on met  $p_2 = 1$  et  $p_i = 0$  pour  $i \neq 2$ .

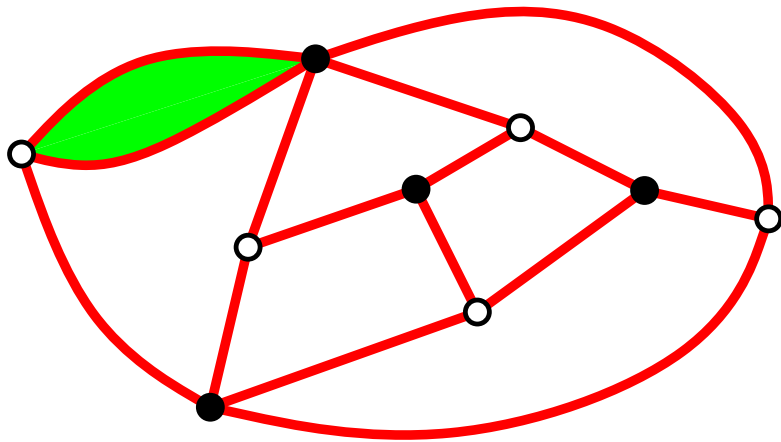
**Notre observation:** chaque terme compte des **quadrangulations biparties** d'une certaine sorte.

• Par exemple  $F_{2,2} \Big|_{\substack{p_2=1 \\ p_i=0}}$  compte des quadrangulations avec deux faces marquées...

$$[z^{2n} w^{n+2-2g}] F_{2,2} \Big|_{\substack{p_2=1 \\ p_i=0}} = \frac{n(n-1)}{2n} Q_g^n.$$

•  $F_{1,1} \Big|_{\substack{p_2=1 \\ p_i=0}}$  compte des quadrangulations avec deux “faces additionnelles” de degré 2.

MAIS une face marquée de degré 2 c'est la même chose qu'une **arête marquée**



# Notre (nouvelle) formule est directe à partir de l'éq. KP (I)

$$F_{2,2} - F_{3,1} + \frac{1}{12}F_{1^4} + \frac{1}{2}(F_{1^2})^2 = 0 \quad (KP)$$

Pour compter les **quadrangulations** on met  $p_2 = 1$  et  $p_i = 0$  pour  $i \neq 2$ .

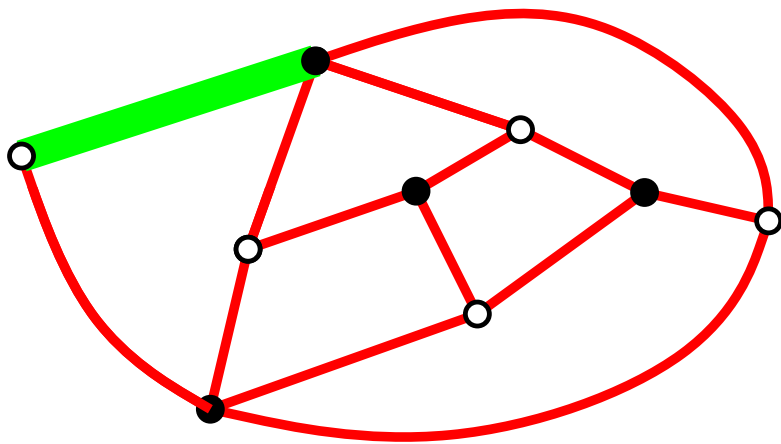
**Notre observation:** chaque terme compte des **quadrangulations biparties** d'une certaine sorte.

• Par exemple  $F_{2,2} \Big|_{\substack{p_2=1 \\ p_i=0}}$  compte des quadrangulations avec deux faces marquées...

$$[z^{2n} w^{n+2-2g}] F_{2,2} \Big|_{\substack{p_2=1 \\ p_i=0}} = \frac{n(n-1)}{2n} Q_g^n.$$

•  $F_{1,1} \Big|_{\substack{p_2=1 \\ p_i=0}}$  compte des quadrangulations avec deux "faces additionnelles" de degré 2.

MAIS une face marquée de degré 2 c'est la même chose qu'une **arête marquée**



$$[z^{2n} w^{n+1-2g}] F_{1,1} \Big|_{\substack{p_2=1 \\ p_i=0}} = \frac{2n(2n-1)}{2n} Q_g^{n-1}$$

# Notre (nouvelle) formule est directe à partir de l'éq. KP (I)

$$F_{2,2} - F_{3,1} + \frac{1}{12}F_{1^4} + \frac{1}{2}(F_{1^2})^2 = 0 \quad (KP)$$

Pour compter les **quadrangulations** on met  $p_2 = 1$  et  $p_i = 0$  pour  $i \neq 2$ .

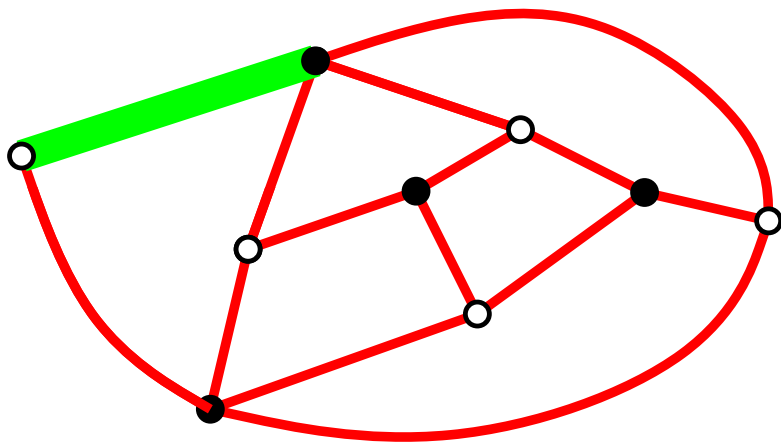
**Notre observation:** chaque terme compte des **quadrangulations biparties** d'une certaine sorte.

• Par exemple  $F_{2,2} \Big|_{\substack{p_2=1 \\ p_i=0}}$  compte des quadrangulations avec deux faces marquées...

$$[z^{2n} w^{n+2-2g}] F_{2,2} \Big|_{\substack{p_2=1 \\ p_i=0}} = \frac{n(n-1)}{2n} Q_g^n.$$

•  $F_{1,1} \Big|_{\substack{p_2=1 \\ p_i=0}}$  compte des quadrangulations avec deux "faces additionnelles" de degré 2.

MAIS une face marquée de degré 2 c'est la même chose qu'une **arête marquée**



$$[z^{2n} w^{n+1-2g}] F_{1,1} \Big|_{\substack{p_2=1 \\ p_i=0}} = \frac{2n(2n-1)}{2n} Q_g^{n-1}$$

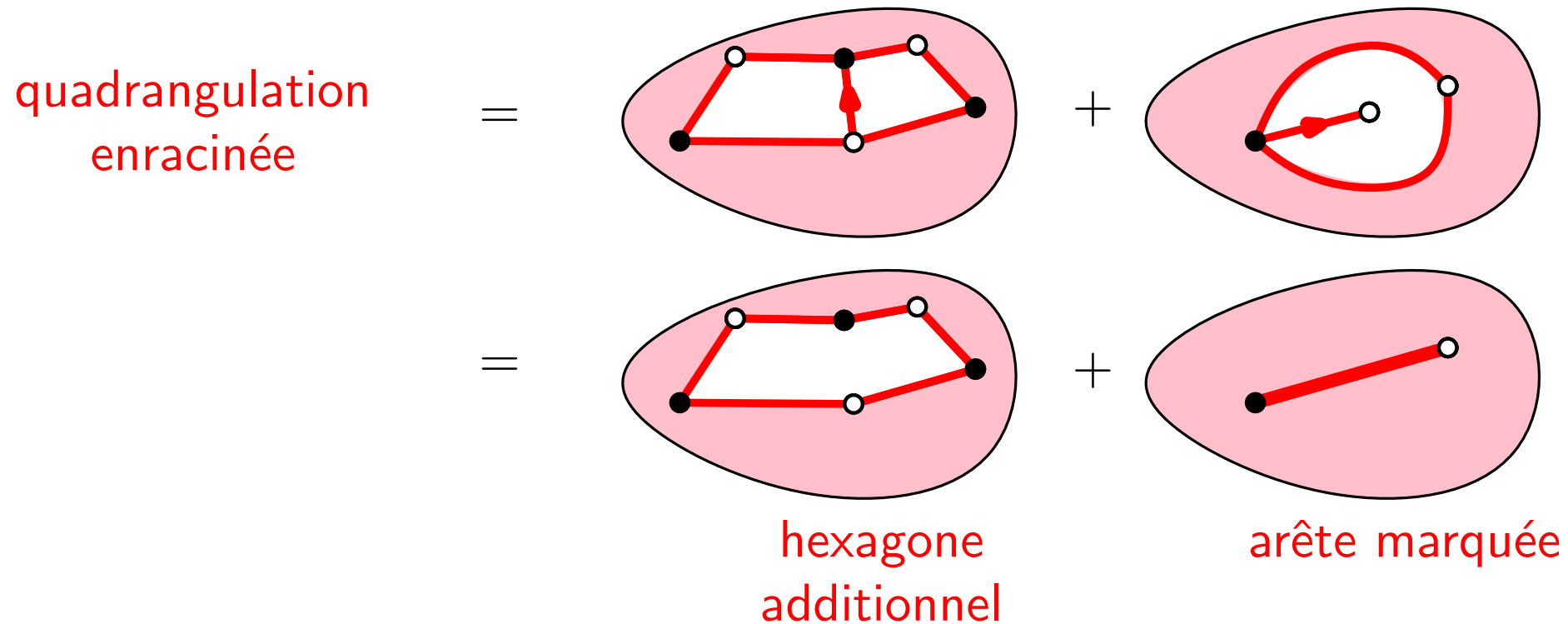
$$[z^{2n} w^{n+2-2g}] F_{1^4} \Big|_{\substack{p_2=1 \\ p_i=0}} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{2n} Q_g^{n-1}$$

# Notre (nouvelle) formule est directe à partir de l'éq. KP (II)

$$F_{2,2} - F_{3,1} + \frac{1}{12}F_{1^4} + \frac{1}{2}(F_{1^2})^2 = 0$$

- $F_3 \Big|_{\substack{p_2=1 \\ p_i=0}}$  compte des **quadrangulations** avec un **hexagone additionnel**.

Par **chance (?)** cela s'exprime aussi en terme de **quadrangulations**:



$$[z^{2n} w^{n+2-2g}] F_{3,1} \Big|_{\substack{p_2=1 \\ p_i=0}} = \frac{(2n)(2n-1)}{3 \cdot 2n} (Q_g^n - 2Q_g^{n-1}).$$

# Notre (nouvelle) formule est directe à partir de l'éq. KP (III)

$$F_{2,2} - F_{3,1} + \frac{1}{12}F_{1^4} + \frac{1}{2}(F_{1^2})^2 = 0$$

$$[z^{2n}w^{n+2-2g}]F_{2,2} \Big|_{\substack{p_2=1 \\ p_i=0}} = \frac{n(n-1)}{2n}Q_g^n. \quad [z^{2n}w^{n+2-2g}]F_{1,1} \Big|_{\substack{p_2=1 \\ p_i=0}} = \frac{2n(2n-1)}{2n}Q_g^{n-1}$$

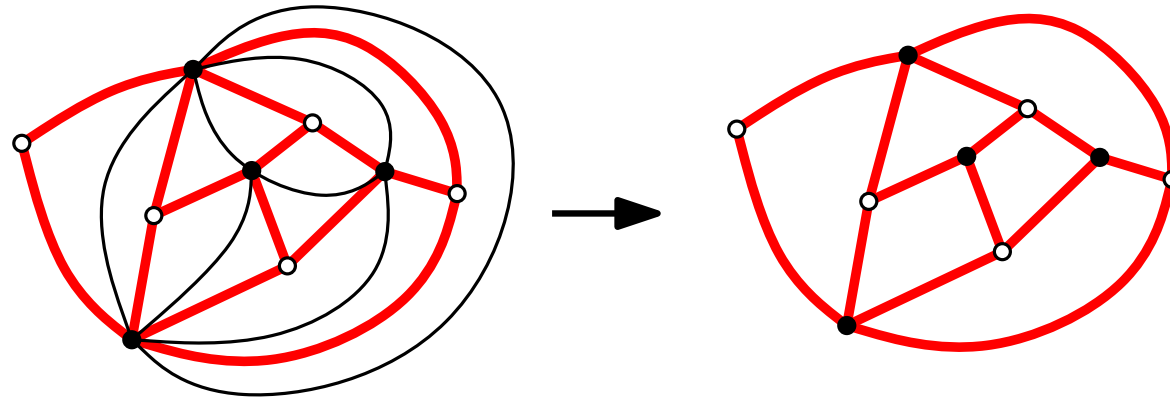
$$[z^{2n}w^{n+2-2g}]F_{1^4} \Big|_{\substack{p_2=1 \\ p_i=0}} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{2n}Q_g^{n-1}$$

$$[z^{2n}w^{n+2-2g}]F_{3,1} \Big|_{\substack{p_2=1 \\ p_i=0}} = \frac{2n-1}{3}(Q_g^n - 2Q_g^{n-1}).$$

● **Théorème** [Carrell-C. 14] Le nombre  $Q_g^n$  de cartes de genre  $g$  à  $n$  arêtes satisfait la formule de récurrence simple:

$$\frac{n+1}{6}Q_g^n = \frac{4n-2}{3}Q_g^{n-1} + \frac{(2n-3)(2n-2)(2n-1)}{12}Q_{g-1}^{n-2} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k+l=n \\ k, l \geq 1}} \sum_{\substack{i+j=g \\ i, j \geq 0}} (2k-1)(2l-1)Q_i^{k-1}Q_j^{\ell-1}.$$

- Pour la version à trois paramètres on se rappelle la **bijection de Tutte**



et on se rend compte que dans nos manipulations on peut contrôler le nombre de **sommets blancs** de la quadrangulation (=nombre de **faces** de la carte). On obtient de la même façon le second théorème:

• **Théorème [Carrell-C. 14]** Le nombre  $M_g^{i,j}$  de cartes de genre  $g$  à  $i$  sommets et  $j$  faces satisfait:

$$\frac{n+1}{6} M_g^{i,j} = \frac{(2n-1)}{3} \left( M_g^{i-1,j} + M_g^{i,j-1} + \frac{(2n-3)(2n-2)}{4} M_{g-1}^{i,j} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i_1+i_2=i \\ i_1, i_2 \geq 1}} \sum_{\substack{j_1+j_2=j \\ j_1, j_2 \geq 1}} \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ g_1, g_2 \geq 0}} (2n_1-1)(2n_2-1) M_{g_1}^{i_1, j_1} M_{g_2}^{i_2, j_2}.$$

### **III. Formules de caractères et hiérarchie KP?**

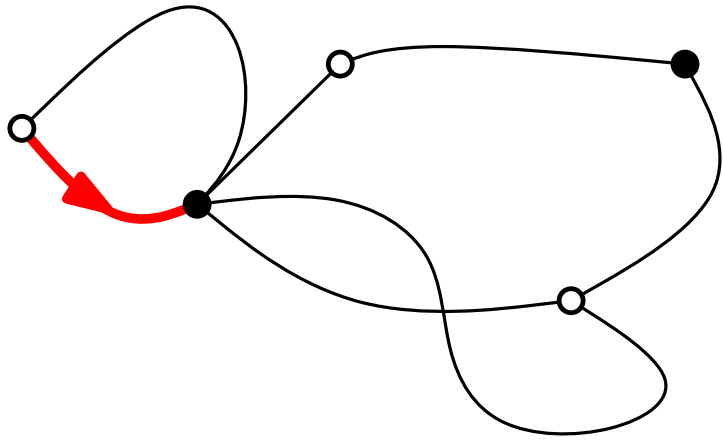
**...quelques éléments épars pour donner une idée d'où ça vient...**

**...et peut-être susciter une envie d'en apprendre plus...**



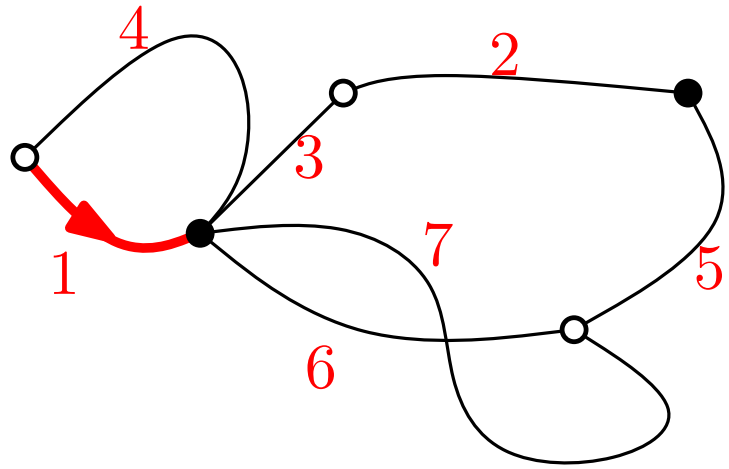
# Cartes biparties et permutations (I)

- Il y a une correspondance 1-à-1 entre les cartes biparties à  $n$  arêtes et les paires de permutations  $(\sigma_{\circ}, \sigma_{\bullet})$  telles que le sous-groupe  $\langle \sigma_{\circ}, \sigma_{\bullet} \rangle \subset \mathfrak{S}_n$  agisse transitivement sur  $[1..n]$ .

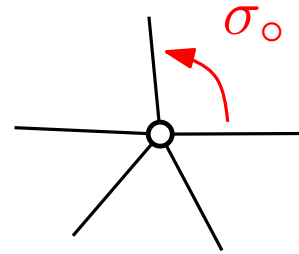


# Cartes biparties et permutations (I)

- Il y a une correspondance 1-à-1 entre les cartes biparties à  $n$  arêtes et les paires de permutations  $(\sigma_{\circ}, \sigma_{\bullet})$  telles que le sous-groupe  $\langle \sigma_{\circ}, \sigma_{\bullet} \rangle \subset \mathfrak{S}_n$  agisse transitivement sur  $[1..n]$ .

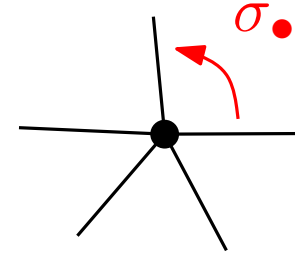


sommets blancs



cycles de  $\sigma_{\circ}$

sommets noirs



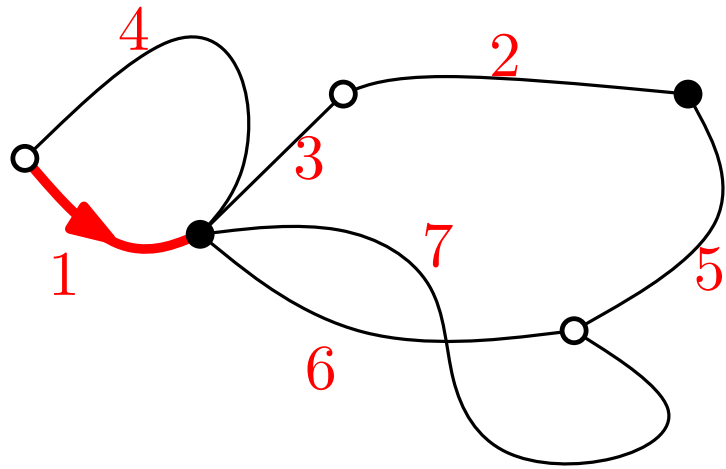
cycles de  $\sigma_{\bullet}$

$$\sigma_{\circ} = (1, 4)(2, 3)(5, 6, 7)$$

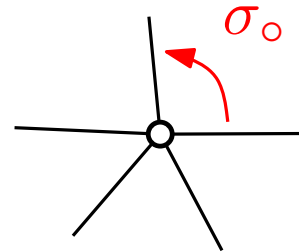
$$\sigma_{\bullet} = (1, 6, 7, 3, 4)(2, 5)$$

# Cartes biparties et permutations (I)

- Il y a une correspondance 1-à-1 entre les cartes biparties à  $n$  arêtes et les paires de permutations  $(\sigma_{\circ}, \sigma_{\bullet})$  telles que le sous-groupe  $\langle \sigma_{\circ}, \sigma_{\bullet} \rangle \subset \mathfrak{S}_n$  agisse transitivement sur  $[1..n]$ .

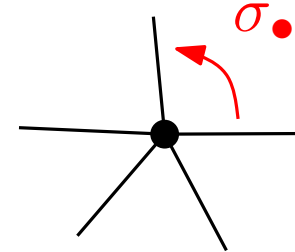


sommets blancs



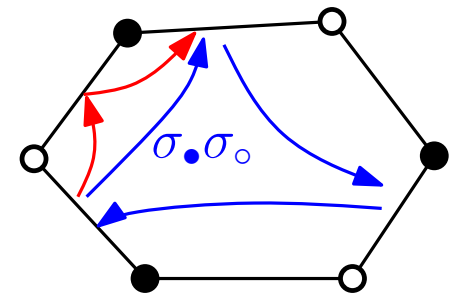
cycles de  $\sigma_{\circ}$

sommets noirs



cycles de  $\sigma_{\bullet}$

faces



cycles de  $\sigma_{\bullet}\sigma_{\circ}$

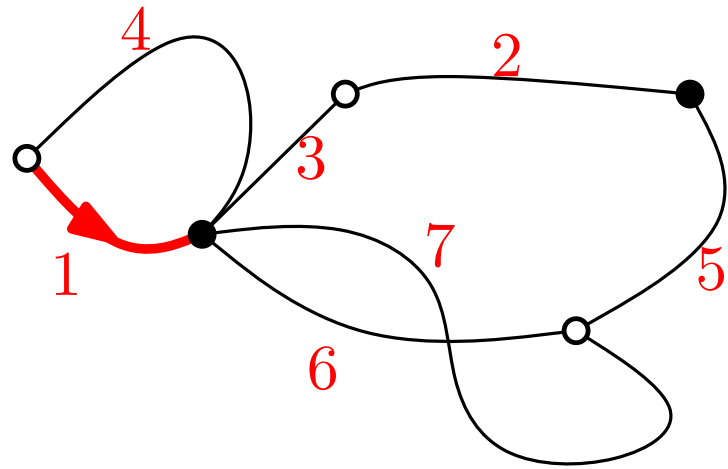
$$\sigma_{\circ} = (1, 4)(2, 3)(5, 6, 7)$$

$$\sigma_{\bullet} = (1, 6, 7, 3, 4)(2, 5)$$

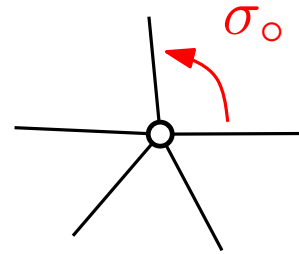
$$\sigma_{\bullet}\sigma_{\circ} = (1)(2, 4, 6, 3, 5, 7)$$

# Cartes biparties et permutations (I)

- Il y a une correspondance 1-à-1 entre les cartes biparties à  $n$  arêtes et les paires de permutations  $(\sigma_{\circ}, \sigma_{\bullet})$  telles que le sous-groupe  $\langle \sigma_{\circ}, \sigma_{\bullet} \rangle \subset \mathfrak{S}_n$  agisse transitivement sur  $[1..n]$ .

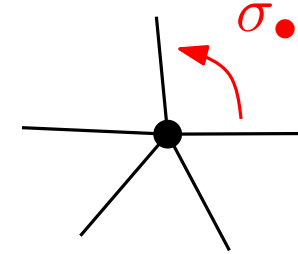


sommets blancs



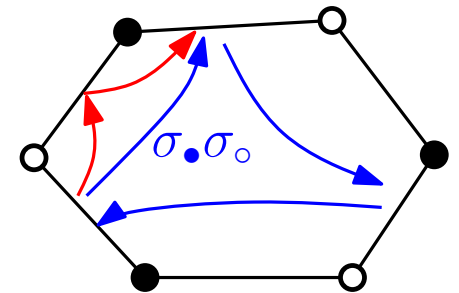
cycles de  $\sigma_{\circ}$

sommets noirs



cycles de  $\sigma_{\bullet}$

faces



cycles de  $\sigma_{\bullet}\sigma_{\circ}$

$$\sigma_{\circ} = (1, 4)(2, 3)(5, 6, 7)$$

$$\sigma_{\bullet} = (1, 6, 7, 3, 4)(2, 5)$$

$$\sigma_{\bullet}\sigma_{\circ} = (1)(2, 4, 6, 3, 5, 7)$$

La formule d'Euler's donne le genre:

$$c(\sigma_{\circ}) + c(\sigma_{\bullet}) + c(\sigma_{\circ}\sigma_{\bullet}) = n + 2 - 2g$$

# L'algèbre du groupe symétrique

- On fixe  $\lambda^\circ, \lambda^\bullet, \lambda^\diamond$  trois partitions de  $n$  alors pour compter les cartes biparties on voudrait compter le nombre de triplets  $(\sigma_\circ, \sigma_\bullet, \sigma_\diamond) \in K_{\lambda^\circ} \times K_{\lambda^\bullet} \times K_{\lambda^\diamond}$  tels que

$$\sigma_\circ \sigma_\bullet \sigma_\diamond = 1$$

où  $K_\lambda = \{\text{permutations de type cyclique } \lambda\}$

# L'algèbre du groupe symétrique

- On fixe  $\lambda^\circ, \lambda^\bullet, \lambda^\diamond$  trois partitions de  $n$  alors pour compter les cartes biparties on voudrait compter le nombre de triplets  $(\sigma_\circ, \sigma_\bullet, \sigma_\diamond) \in K_{\lambda^\circ} \times K_{\lambda^\bullet} \times K_{\lambda^\diamond}$  tels que

$$\sigma_\circ \sigma_\bullet \sigma_\diamond = 1$$

où  $K_\lambda = \{\text{permutations de type cyclique } \lambda\}$

- On regarde l'algèbre du groupe symétrique  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] = \text{combinaisons linéaires formelles de permutations}$ . On remarque que

ce nombre = coeff. de **1** dans  $\left( \sum_{\sigma \in K^\circ} \sigma \right) \left( \sum_{\sigma \in K^\bullet} \sigma \right) \left( \sum_{\sigma \in K^\diamond} \sigma \right)$

$$= \frac{1}{n!} \text{Tr} \left( \sum_{\sigma \in K^\circ} \sigma \right) \left( \sum_{\sigma \in K^\bullet} \sigma \right) \left( \sum_{\sigma \in K^\diamond} \sigma \right)$$

car si  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , alors  $\text{Tr } \sigma = \begin{cases} n! & \text{si } \sigma = 1 \\ 0 & \text{si } \sigma \neq 1 \end{cases}$

# L'algèbre du groupe symétrique

- On fixe  $\lambda^\circ, \lambda^\bullet, \lambda^\diamond$  trois partitions de  $n$  alors pour compter les cartes biparties on voudrait compter le nombre de triplets  $(\sigma_\circ, \sigma_\bullet, \sigma_\diamond) \in K_{\lambda^\circ} \times K_{\lambda^\bullet} \times K_{\lambda^\diamond}$  tels que

$$\sigma_\circ \sigma_\bullet \sigma_\diamond = 1$$

où  $K_\lambda = \{\text{permutations de type cyclique } \lambda\}$

- On regarde l'algèbre du groupe symétrique  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$  = combinaisons linéaires formelles de permutations. On remarque que

ce nombre = coeff. de **1** dans  $\left( \sum_{\sigma \in K^\circ} \sigma \right) \left( \sum_{\sigma \in K^\bullet} \sigma \right) \left( \sum_{\sigma \in K^\diamond} \sigma \right)$

$$= \frac{1}{n!} \text{Tr} \left( \sum_{\sigma \in K^\circ} \sigma \right) \left( \sum_{\sigma \in K^\bullet} \sigma \right) \left( \sum_{\sigma \in K^\diamond} \sigma \right)$$

car si  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , alors  $\text{Tr } \sigma = \begin{cases} n! & \text{si } \sigma = 1 \\ 0 & \text{si } \sigma \neq 1 \end{cases}$

Or: - on sait décomposer  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$  comme  $\mathfrak{S}_n$ -module:  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] = \bigoplus_{\lambda \vdash n} (\dim V^\lambda) V^\lambda$

- un élément comme  $(\sum_{\sigma \in K^\bullet} \sigma)$  est central et agit comme un scalaire sur chaque  $V^\lambda$ .

# Formule de Frobenius

- Formule de Frobenius

$$\begin{aligned} \# \left\{ (\sigma_{\circ}, \sigma_{\bullet}, \sigma_{\diamond}) \in K_{\lambda^{\circ}} \times K_{\lambda^{\bullet}} \times K_{\lambda^{\diamond}} : \sigma_{\circ} \sigma_{\bullet} \sigma_{\diamond} = 1 \right\} \\ = \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{\dim V^{\lambda}} \chi^{\lambda}(K_{\lambda^{\circ}}) \chi^{\lambda}(K_{\lambda^{\bullet}}) \chi^{\lambda}(K_{\lambda^{\diamond}}) \end{aligned}$$

où  $\chi^{\lambda} = \text{Tr}_{V^{\lambda}}$  est le **caractère irréductible du groupe symétrique** indexé par  $\lambda$ .

on a admis pas mal de chose ici – en gros le début de la théorie des représentations des groupes finis (orthogonalité des caractères). Et aussi on n'a pas du tout explicité les  $\chi^{\lambda}$  ni les  $V^{\lambda}$ .



# Fonctions de Schur et fonctions puissances (I)

- Si  $\lambda$  est une partition, un **tableau semistandard de forme  $\lambda$  (SSYT)** est un remplissage de  $\lambda$  qui est  $\leq$  en lignes et  $\vee$  en colonnes.

$$\lambda = (4, 4, 2, 1)$$

$T =$

|   |    |   |   |
|---|----|---|---|
| 7 |    |   |   |
| 5 | 12 |   |   |
| 3 | 9  | 9 | 9 |
| 2 | 2  | 3 | 7 |

# Fonctions de Schur et fonctions puissances (I)

- Si  $\lambda$  est une partition, un **tableau semistandard de forme  $\lambda$  (SSYT)** est un remplissage de  $\lambda$  qui est  $\leq$  en lignes et  $\vee$  en colonnes.

$$\lambda = (4, 4, 2, 1)$$

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & & & \\ \hline 5 & 12 & & \\ \hline 3 & 9 & 9 & 9 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 7 \\ \hline \end{array}$$

$$x^T = x_2^2 x_3^2 x_5 x_7^2 x_9^3 x_{12}$$

- On se donne une infinité de variables  $x_1, x_2, \dots$  et une partition  $\lambda$ . La **fonction de Schur**  $s_\lambda$  est la série génératrice des tableaux semistandard de forme  $\lambda$

$$s_\lambda(x) = \sum_{T:SSYT(\lambda)} x^T$$

# Fonctions de Schur et fonctions puissances (I)

- Si  $\lambda$  est une partition, un **tableau semistandard de forme  $\lambda$  (SSYT)** est un remplissage de  $\lambda$  qui est  $\leq$  en lignes et  $\vee$  en colonnes.

$$\lambda = (4, 4, 2, 1)$$

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & & & \\ \hline 5 & 12 & & \\ \hline 3 & 9 & 9 & 9 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 7 \\ \hline \end{array}$$

$$x^T = x_2^2 x_3^2 x_5 x_7^2 x_9^3 x_{12}$$

- On se donne une infinité de variables  $x_1, x_2, \dots$  et une partition  $\lambda$ . La **fonction de Schur**  $s_\lambda$  est la série génératrice des tableaux semistandard de forme  $\lambda$

$$s_\lambda(x) = \sum_{T:SSYT(\lambda)} x^T$$

# Fonctions de Schur et fonctions puissances (I)

- Si  $\lambda$  est une partition, un **tableau semistandard de forme  $\lambda$  (SSYT)** est un remplissage de  $\lambda$  qui est  $\leq$  en lignes et  $\vee$  en colonnes.

$$\lambda = (4, 4, 2, 1)$$

$$T =$$

|   |    |   |   |
|---|----|---|---|
| 7 |    |   |   |
| 5 | 12 |   |   |
| 3 | 9  | 9 | 9 |
| 2 | 2  | 3 | 7 |

$$x^T = x_2^2 x_3^2 x_5 x_7^2 x_9^3 x_{12}$$

- On se donne une infinité de variables  $x_1, x_2, \dots$  et une partition  $\lambda$ . La **fonction de Schur**  $s_\lambda$  est la série génératrice des tableaux semistandard de forme  $\lambda$

$$s_\lambda(x) = \sum_{T:SSYT(\lambda)} x^T$$

- Si  $\mu$  est une partition, la **fonction puissance**  $p_\mu$  est définie par:

$$p_\mu(x) = p_{\mu_1}(x)p_{\mu_2}(x)\dots \quad \text{où } p_n(x) = \sum_{i>1} x_i^n$$

- **FAIT:** les coefficients de changement de base des Schur aux puissances sont liés aux caractères du groupe symétrique:

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{1}{n!} \sum_{\mu \vdash n} \chi^\lambda(K_\mu) p_\mu(x).$$

## Fonctions de Schur et fonctions puissances (II)

- **Corollaire:** “Character formula” pour la série génératrice des cartes.

$$F(z, w; \mathbf{p}) = \log \sum_{n \geq 1} z^n \sum_{\lambda \vdash n} \left( \sum_{\lambda^\circ} \frac{\chi^\lambda(K_{\lambda^\circ}) w^{l(\lambda^\circ)}}{\dim V^\lambda} \right) s_\lambda(w, w, \dots) s_\lambda(\mathbf{p})$$

où je note maintenant  $s_\lambda(\mathbf{p})$  pour  $s_\lambda$  exprimée en fonction des fonctions puissances.

- C'est une formule atroce et apparemment inutilisable – aucune chance de resommer...

## Fonctions de Schur et fonctions puissances (II)

- **Corollaire:** “Character formula” pour la série génératrice des cartes.

$$F(z, w; \mathbf{p}) = \log \sum_{n \geq 1} z^n \sum_{\lambda \vdash n} \left( \sum_{\lambda^\circ} \frac{\chi^\lambda(K_{\lambda^\circ}) w^{l(\lambda^\circ)}}{\dim V^\lambda} \right) s_\lambda(w, w, \dots) s_\lambda(\mathbf{p})$$

où je note maintenant  $s_\lambda(\mathbf{p})$  pour  $s_\lambda$  exprimée en fonction des fonctions puissances.

- C’est une formule atroce et apparemment inutilisable – aucune chance de resommer...
- La **combinatoire algébrique** fourmille de propriétés des fonctions de Schur. Par exemple elles ont d’autres expressions équivalentes sous forme de déterminant. On arrive ainsi à montrer que:

$$F(z, w; \mathbf{p}) = \log \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \det(M_{i-\lambda_i, j}) s_\lambda(\mathbf{p})$$

où  $M$  = une certaine matrice biinfinie (triangulaire supérieure avec 1 sur la diagonale)

(membres de combalg: exo)

# (Une approximation de) la hiérarchie KP en un transparent

On a: 
$$\exp F(z, w; \mathbf{p}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \det(M_{i-\lambda_i, j}) s_{\lambda}(\mathbf{p})$$

...de telles combinaisons linéaires de fonctions de Schur avec des coefficients "determinantaux" ont **beaucoup de propriétés**.

1. Les déterminants  $\det(M_{\lambda_i - i + j})$  pour des  $\lambda$  différents satisfont des **relations quadratiques** appelées **relations de Plücker** (étant les mineurs d'une même matrice  $M$ ).
2. si on fait un **shift arbitraire** des variables  $p_i \rightarrow p_i + q_i$  alors la nouvelle fonction est toujours de la même forme (en changeant la matrice  $M$ ). Pour ceux qui connaissent: conséquence directe de Jacobi-Trudi et Cauchy-Binet.
3. En appliquant 1. à la fonction shiftée  $F(p_i + q_i)$ , chaque **relation de Plücker** donne lieu à une **équation aux dérivées partielles** pour  $F(z, w; q_i)$ .  
C'est ça la hiérarchie KP.

**En résumé:** même si on ne peut rien faire directement de cette formule, on peut déduire de sa **forme très particulière** tout plein de **relations**.

## **IV. Perspectives**



- On démontre une formule **simple** avec des outils **non combinatoires** (signes, caractères, etc...). C'est étonnant d'avoir une formule aussi simple et aussi explicite pour des cartes de genre  $g$ ... on va pouvoir essayer de trouver des bijections.

- On démontre une formule **simple** avec des outils **non combinatoires** (signes, caractères, etc...). C'est étonnant d'avoir une formule aussi simple et aussi explicite pour des cartes de genre  $g$ ... on va pouvoir essayer de trouver des bijections.
- en fait j'aurais dû dire avant qu'il y a **un autre cas** où ça marche. En effet Goulden and Jackson ont donné une récurrence similaire pour les **triangulations** en 2008.
- Je ne sais toujours pas si le **miracle** qui a lieu ici marche en plus grande généralité. Par exemple est-ce qu'on peut écrire une récurrence close comptant les hexangulations? pentagulations? avec d'autres "équations de boucles additionnelles" ?

- On démontre une formule **simple** avec des outils **non combinatoires** (signes, caractères, etc...). C'est étonnant d'avoir une formule aussi simple et aussi explicite pour des cartes de genre  $g$ ... on va pouvoir essayer de trouver des bijections.
- en fait j'aurais dû dire avant qu'il y a **un autre cas** où ça marche. En effet Goulden and Jackson ont donné une récurrence similaire pour les **triangulations** en 2008.
- Je ne sais toujours pas si le **miracle** qui a lieu ici marche en plus grande généralité. Par exemple est-ce qu'on peut écrire une récurrence close comptant les hexangulations? pentagulations? avec d'autres "équations de boucles additionnelles" ?

- On démontre une formule **simple** avec des outils **non combinatoires** (signes, caractères, etc...). C'est étonnant d'avoir une formule aussi simple et aussi explicite pour des cartes de genre  $g$ ... on va pouvoir essayer de trouver des bijections.

- en fait j'aurais dû dire avant qu'il y a **un autre cas** où ça marche. En effet Goulden and Jackson ont donné une récurrence similaire pour les **triangulations** en 2008.

- Je ne sais toujours pas si le **miracle** qui a lieu ici marche en plus grande généralité. Par exemple est-ce qu'on peut écrire une récurrence close comptant les hexangulations? pentagulations? avec d'autres "équations de boucles additionnelles" ?

- **Exercice:** trouver un modèle combinatoire simple compté par la récurrence :

$$\frac{n+1}{6} M_g^{i,j} = \frac{(2n-1)}{3} \left( M_g^{i-1,j} + M_g^{i,j-1} + \frac{(2n-3)(2n-2)}{4} M_{g-1}^{i,j} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i_1+i_2=i \\ i_1, i_2 \geq 1}} \sum_{\substack{j_1+j_2=j \\ j_1, j_2 \geq 1}} \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ g_1, g_2 \geq 0}} (2n_1-1)(2n_2-1) M_{g_1}^{i_1, j_1} M_{g_2}^{i_2, j_2}.$$

(note pour  $j = 1$  (Harer-Zagier) on a les arbres  $C$ -décorés de [C.-Féray-Fusy].

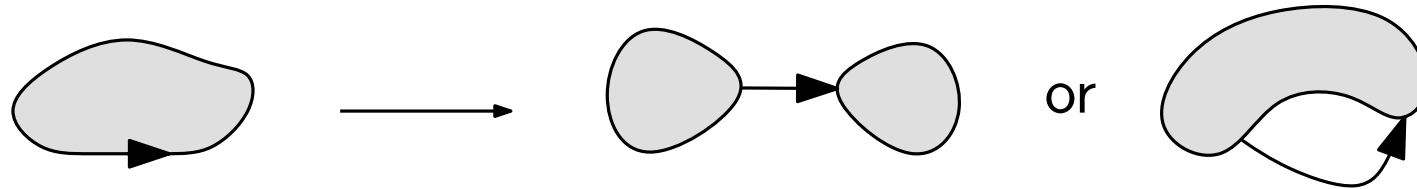
$Q_{150}^{450} = 5689974521343167919979168252107344605562138818742703411$   
1927129422760371062151802923650884799292855434104630039017866  
3093633259884595279209829381021079506440437284162786407110905  
5032765417791342224152177734977820050621538006938581027407228  
0046956728319177582501343666686146362606362935826147461402277  
9670032943336046594089333576513478738258910788907862324135371  
3204912732644438968160394169755104380472864393259620066227053  
3668689631903956834502239864424107784290018847604295807252126  
5852744807657541134828403872355844644187455907462648857871733  
8160778698093151530674010373148501798821519407441893197642135  
8569067689075573730523060764797501075276698472208906285441289  
0555153740706146066793231059797716303023977848987061341135284  
6760066200894248679423843916472039121091892309038746978537152  
6935381548824462040202887144428879132808019264107472315071931  
0198959216720327252209554190307126938838528435977707059799665  
7209097644575924986783065621101524150462625406754573961080851  
0029438694044534082185189560481710061644636800

MERCI!

## **V. Appendice : les méthodes à base d'équations de Tutte/boucles**

# Compter les cartes planaires: Tutte

- On prend une carte plane et on **enlève l'arête racine**:

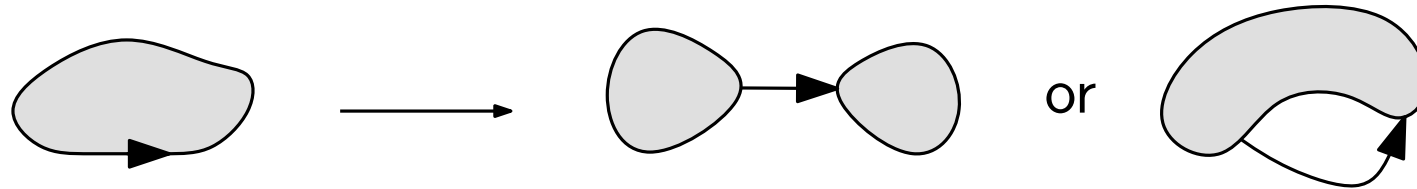


- On introduit la **série bivariée**:  $F(z, u) := \sum_{\text{cartes planaires}} z^{\#\text{arêtes}} u^{\text{degré de la face racine}}$

On obtient 
$$F(z, u) = 1 + u^2 z F(z, u)^2 + uz \frac{F(z, 1) - u F(z, u)}{1 - u}$$

# Compter les cartes planaires: Tutte

- On prend une carte planaire et on **enlève l'arête racine**:



- On introduit la **série bivariée**:  $F(z, u) := \sum_{\text{cartes planaires}} z^{\#\text{arêtes}} u^{\text{degré de la face racine}}$

On obtient 
$$F(z, u) = 1 + u^2 z F(z, u)^2 + uz \frac{F(z, 1) - u F(z, u)}{1 - u}$$

- On peut résoudre par **guess-and-check [Tutte]** ou par des **méthodes évoluées [Tutte, Brown, Bousquet-Mélou Jehanne]** et obtenir

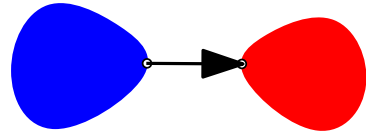
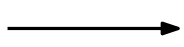
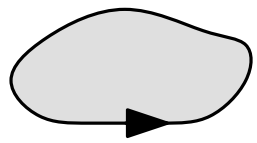
$$F(z, 1) = \frac{1}{54z^2} ((1 - 12z)^{3/2} + 18z - 1) \quad \rightarrow \quad Q_0^n = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+2)(n+1)} \binom{2n}{n}$$

exemple historique "d'équation polynomiale à variable catalytique" (un domaine maintenant bien établi dans lequel il reste beaucoup de choses à éclaircir... par exemple **l'exposant de comptage 3/2 apparemment universel...**).

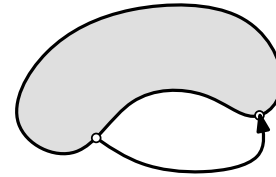


# Équations de Tutte (boucles) : cas général

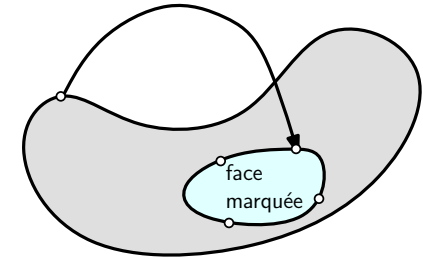
- Enlevons l'arête racine d'une carte et voyons ce qu'il se passe:



ou



ou

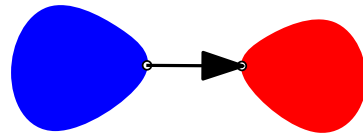
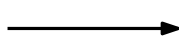


genre  
 $g - 1$ ,  
deux  
"faces  
racines"

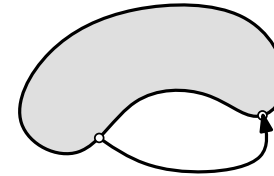
$$F_g(z, u) = u^2 z \sum_{\ell=0}^g F_{\ell}(z, u) F_{g-\ell}(z, u) + uz \frac{F_g(z, 1) - u F_g(z, u)}{1 - u} + u^2 F_{g-1}^{(2)}(z; u, u)$$

# Équations de Tutte (boucles) : cas général

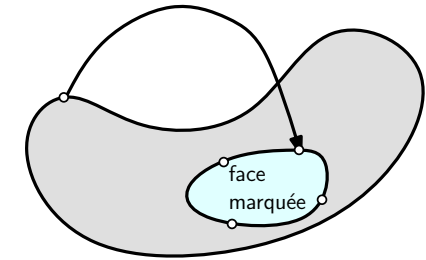
- Enlevons l'arête racine d'une carte et voyons ce qu'il se passe:



ou



ou



genre  
 $g - 1$ ,  
deux  
"faces  
racines"

$$F_g(z, u) = u^2 z \sum_{\ell=0}^g F_{\ell}(z, u) F_{g-\ell}(z, u) + uz \frac{F_g(z, 1) - u F_g(z, u)}{1 - u} + u^2 F_{g-1}^{(2)}(z; u, u)$$

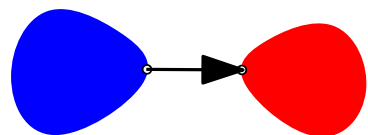
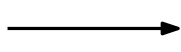
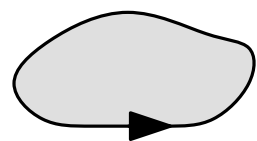
- **Théorème** [Bender-Canfield'86]: Pour tout  $g \geq 0$  il existe une **fraction rationnelle**  $R_g$  telle que:

$$F_g(z, 1) = R_g(\sqrt{1 - 12z})$$

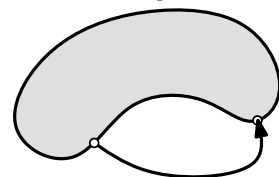
$$Q_g^n \sim t_g n^{\frac{5}{2}(g-1)} 12^n. \quad (\text{the main singularity is (more or less) tractable})$$

# Équations de Tutte (boucles) : cas général

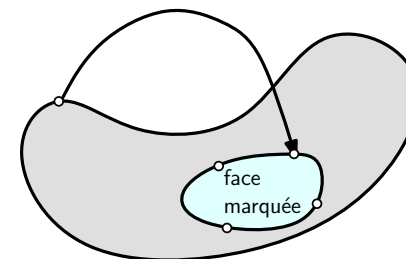
- Enlevons l'arête racine d'une carte et voyons ce qu'il se passe:



ou



ou



genre  
 $g - 1$ ,  
deux  
"faces  
racines"

$$F_g(z, u) = u^2 z \sum_{\ell=0}^g F_\ell(z, u) F_{g-\ell}(z, u) + uz \frac{F_g(z, 1) - u F_g(z, u)}{1-u} + u^2 F_{g-1}^{(2)}(z; u, u)$$

- **Théorème** [Bender-Canfield'86]: Pour tout  $g \geq 0$  il existe une **fraction rationnelle**  $R_g$  telle que:

$$F_g(z, 1) = R_g(\sqrt{1 - 12z})$$

$$Q_g^n \sim t_g n^{\frac{5}{2}(g-1)} 12^n. \quad (\text{the main singularity is (more or less) tractable})$$

- La démonstration utilise une **méthode de type noyau**:

$$K(z, u) F_g(z, u) = u^2 z \sum_{\ell=1}^{g-1} F_\ell(z, u) F_{g-\ell}(z, u) + uz \frac{F_g(z, 1)}{1-u} + u^2 F_{g-1}^{(2)}(z; u, u)$$

où  $K(z, u) = \left(1 - 2u^2 z F_0(z, u) + \frac{u^2 z}{1-u}\right) = \text{explicitement connu}$

Chercher  $u = u(z)$  tel que  $K(z, u(z)) = 0$ , and utiliser l'induction pour déterminer  $F_g(z, 1)$ .

Pb: Pour faire marcher l'induction on doit écrire l'équation pour chaque  $F_g^{(k)}$  pour  $g, k \geq 0$ .