

# Synthèses du Séminaire Flajolet

## Table des matières par orateur

Variables échangeables, martingales et mesures non-destructives en mécanique quantique. MICHEL BAUER, séance du 27/09/2012.....	5
Combinatoire de Catalan et espaces de polynômes harmoniques diagonaux. FRANÇOIS BERGERON, séance du 2/12/2010.....	9
Polynômes orthogonaux et équations de Painlevé discrètes. PHILIPPE BIANE, séance du 7/10/2010.....	11
Computer Algebra for Lattice Path Combinatorics. ALIN BOSTAN, séance du 28/03/2013.....	15
Algèbres de Hopf combinatoires. PIERRE CARTIER, séance du 26/05/2011.....	19
Des arbres dans les urnes de Pólya et réciproquement. BRIGITTE CHAUVIN, séance du 6/12/2012.....	26
The height of the Lyndon tree. PHILIPPE CHASSAING, séance du 31/01/2013.....	23
Développements récents dans le modèle combinatoire du tas de sable sur un graphe. ROBERT CORI, séance du 3/11/2011.....	31
L'analyse en hauteur des arbres. PHILIPPE FLAJOLET, séance du 7/10/2010.....	35
Bijections autour des bois de Schnyder. ÉRIC FUSY, séance du 31/01/2013.....	46
Crible cyclique pour les partitions non-croisées généralisées associées aux groupes de réflexion complexes. CHRISTIAN KRATTENTHALER, séance du 24/05/2012.....	52
Law of large numbers for matchings, extension and applications. MARC LELARGE, séance du 28/03/2013.....	56
Animaux dirigés, systèmes quadratiques et systèmes de réécritures. JEAN-FRANÇOIS MARCKERT, séance du 27/01/2012.....	60
Combinatoire des automates. CYRILLE NICAUD, séance du 7/04/2011.....	66
Catching the k-NAESAT Threshold. KONSTANTINOS PANAGIOTOU, séance du 27/09/2012.....	68
Polytopes, shuffles, quivers and flags. ARUN RAM, séance du 3/01/2011.....	71

Preuves automatiques d'identités. BRUNO SALVY, séance du 26/05/2011 .....	79
Mots, chemins, arbres et cartes. GILLES SCHAEFFER, séance du 2/12/2010 .....	87
Autour de la conjecture de Razumov-Stroganov. ANDREA SPORTIELLO, séance du 2/12/2010 .....	91
Réalisations polynomiales d'algèbres de Hopf combinatoires. JEAN-YVES THIBON, séance du 27/01/2012 .....	93
Continuation analytique de polytopes. MICHÈLE VERGNE, séance du 6/12/2012 .....	96

# Table des matières chronologique

## Séance du 7/10/2010

L'analyse en hauteur des arbres. PHILIPPE FLAJOLET .....	35
---	----

Polynômes orthogonaux et équations de Painlevé discrètes. PHILIPPE BIANE .....	11
---	----

## Séance du 2/12/2010

Combinatoire de Catalan et espaces de polynômes harmoniques diagonaux. FRANÇOIS BERGERON .....	9
---	---

Autour de la conjecture de Razumov-Stroganov. ANDREA SPORTIELLO .....	91
--	----

Mots, chemins, arbres et cartes. GILLES SCHAEFFER .....	87
--	----

## Séance du 3/01/2011

Polytopes, shuffles, quivers and flags. ARUN RAM .....	71
---	----

Développements récents dans le modèle combinatoire du tas de sable sur un graphe. ROBERT CORI .....	31
--	----

## Séance du 7/04/2011

Combinatoire des automates. CYRILLE NICAUD .....	66
---	----

## Séance du 26/05/2011

Algèbres de Hopf combinatoires. PIERRE CARTIER .....	19
---	----

Preuves automatiques d'identités. BRUNO SALVY .....	79
--	----

## Séance du 27/01/2012

Réalisations polynomiales d'algèbres de Hopf combinatoires. JEAN-YVES THIBON .....	93
---	----

Animaux dirigés, systèmes quadratiques et systèmes de réécritures. JEAN-FRANÇOIS MARCKERT .....	60
--	----

## Séance du 24/05/2012

Crible cyclique pour des partitions non-croisées généralisées associées aux groupes de réflexion complexes. CHRISTIAN KRATTENTHALER .....	52
--	----

## Séance du 27/09/2012

Catching the k-NAESAT Threshold. KONSTANTINOS PANAGIOTOU .....	68
---	----

Variables échangeables, martingales et mesures non-destructives en mécanique quantique. MICHEL BAUER.....	5
<b>Séance du 6/12/2012</b>	
Des arbres dans les urnes de Pólya et réciproquement. BRIGITTE CHAUVIN.....	26
Continuation analytique de polytopes. MICHÈLE VERGNE.....	96
<b>Séance du 31/01/2013</b>	
The height of the Lyndon tree. PHILIPPE CHASSAING.....	23
Bijections autour des bois de Schnyder. ÉRIC FUSY.....	46
<b>Séance du 28/03/2013</b>	
Law of large numbers for matchings, extension and applications. MARC LELARGE.....	56
Computer Algebra for Lattice Path Combinatorics. ALIN BOSTAN.....	15

# Variables échangeables, martingales et mesures non-destructives en mécanique quantique

MICHEL BAUER

Résumé par PHILIPPE BIANE

*Séminaire de Combinatoire Philippe Flajolet  
Institut Henri Poincaré, séance du 27 septembre 2012*

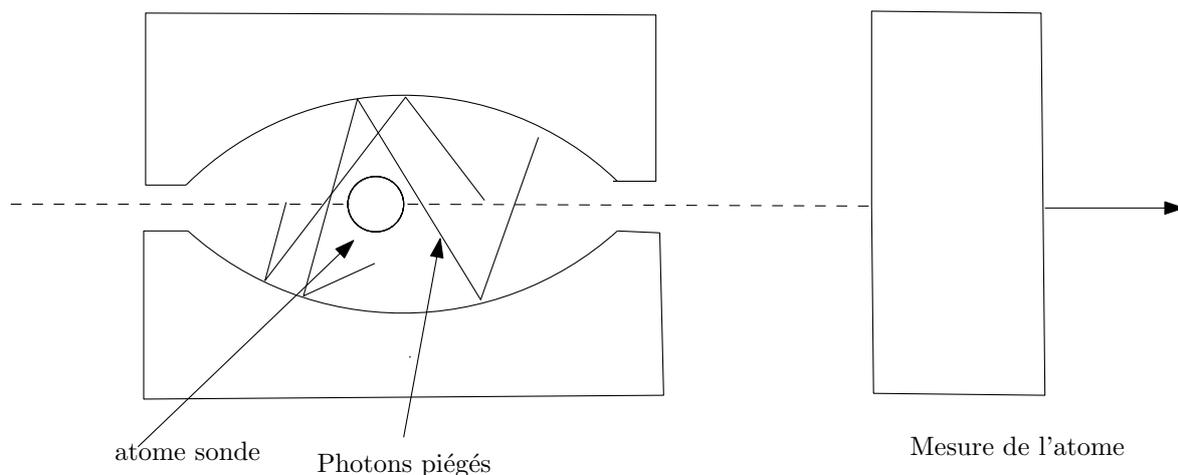
## Résumé

Plus de 80 ans après la découverte des lois de la mécanique quantique, celles-ci continuent de susciter l'étonnement. La notion de mesure en particulier, reste très mystérieuse. Des expériences récentes très simples et belles, que nous décrirons brièvement, permettent de lever légèrement un coin du voile. Après avoir présenté, pour des non-physiciens, les notions de base de la mécanique quantique, nous montrerons pourquoi l'interprétation de ces expériences est étroitement liée à la théorie des variables échangeables, au théorème de de Finetti et au théorème de convergence des martingales.

## 1 Introduction

On sait qu'en mécanique quantique il est impossible de mesurer un système sans interférer avec lui. En fait la plupart des mesures entraînent une destruction du système étudié. Néanmoins, avec un peu d'ingéniosité, on arrive à mettre au point des mesures indirectes qui permettent de préserver le système quantique observé. Un exemple est celui du comptage des photons dans une cavité.

On dispose d'un petit nombre de photons qui sont piégés dans une cavité au moyen de miroirs réfléchissants. Pour compter leur nombre, on envoie des atomes qui pénètrent dans la cavité, interfèrent avec les photons, puis ressortent de la cavité pour être mesurés.



On déduit de ces mesures une loi de probabilités sur les nombres entiers. Lorsque le nombre d'atomes augmente, cette loi de probabilités converge vers une valeur qui donne le nombre de

photons dans la cavité. Nous allons voir que, pour modéliser cette expérience, on a recours à des notions de probabilités qui font intervenir le groupe symétrique.

## 2 Variables échangeables

### 2.1 Origines

Une suite de variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n, \dots$  à valeurs dans  $E$ , indexées par  $\mathbf{N}$ , est dite *échangeable* si pour toute permutation  $\sigma$  des indices la suite  $X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}, \dots$  a même loi que la suite originelle.

On peut décrire complètement l'ensemble des lois échangeables sur un ensemble  $E$ . Cet ensemble forme un convexe fermé dans l'ensemble des lois de probabilités sur  $E^{\mathbf{N}}$ . En fait le théorème de de Finetti (dû au mathématicien et philosophe Bruno de Finetti 1905-1986) dit que les points extrémaux de ce convexe sont les lois produits, de la forme :  $\mu^{\otimes \mathbf{N}}$  où  $\mu$  est une loi de probabilités sur  $E$ , et que de plus ce convexe est un simplexe : toute loi échangeable  $M$  sur  $E^{\mathbf{N}}$  admet une unique représentation intégrale

$$M = \int_{P(E)} \xi^{\otimes \mathbf{N}} d\nu(\xi)$$

où  $P(E)$  est l'ensemble des lois de probabilités sur  $E$ , et  $\nu$  une loi de probabilités sur  $P(E)$ . Voici une façon équivalente de décrire la loi  $M$ . On commence par choisir au hasard (suivant la loi  $\nu$ ) une mesure de probabilités  $\xi$  sur  $E$ , puis on prend une suite de variables aléatoires  $(X_1, \dots, X_n, \dots)$  indépendantes, tirées avec la même loi  $\xi$ . Alors la suite de variables  $(X_1, \dots, X_n, \dots)$  suit la loi  $M$ . D'un point de vue pratique, étant donnée une réalisation  $(X_1, \dots, X_n, \dots)$  de cette loi on peut retrouver la mesure  $\xi$  comme limite des mesures empiriques : si  $B \subset E$ , alors

$$\xi(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1_{X_1 \in B} + \dots + 1_{X_n \in B}}{n}.$$

Cela provient simplement de la loi des grands nombres.

La probabilité que la loi empirique soit proche de  $\mu \neq \xi$  décroît exponentiellement comme  $\exp(-n\mathcal{E}(\mu|\xi))$  où  $\mathcal{E}(\mu|\xi) \geq 0$  est l'*entropie relative* de  $\mu$  par rapport à  $\xi$ , d'après le théorème de Sanov sur les grandes déviations dans la loi des grands nombres (voir [1]). Cette estimation permet de faire des tests statistiques précis. Dans la suite on suppose que  $E$  est un ensemble fini, et que le support de la mesure  $\nu$  est fini : il n'y a qu'un nombre fini de mesure  $\xi$  possibles. Si  $\alpha$  est l'une de ces mesures, on appelle alors  $Q_k(\alpha)$  la probabilité pour que  $\xi = \alpha$ , sachant  $X_1, \dots, X_k$ . C'est une martingale, qui vaut

$$Q_k(\alpha) = \frac{\nu(\alpha)\alpha(X_1)\dots\alpha(X_k)}{\sum_{\beta} \nu(\beta)\beta(X_1)\dots\beta(X_k)}$$

d'après le théorème de Bayes. D'après le théorème des martingales,  $Q_k(\alpha)$  converge vers  $1_{\xi=\alpha}$ .

On va utiliser ce cadre théorique pour analyser un exemple de mesure non-démolissante en mécanique quantique.

## 3 Bases de la mécanique quantique

On va rappeler ici les bases mathématiques de la mécanique quantique telles qu'elles ont été formulées par von Neumann [2].

### 3.1 États d'un système quantique

En mécanique quantique l'état d'un système est décrit par un vecteur (non nul) dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Deux vecteurs proportionnels décrivent le même état. Si  $\mathcal{H}_A$  et  $\mathcal{H}_B$  décrivent les états possibles de deux systèmes quantiques, alors la réunion des deux systèmes est décrite par l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ .

Au cours du temps le système, dans l'état initial  $|\varphi\rangle$  évolue suivant  $t \rightarrow U_t(|\varphi\rangle)$  où  $U_t = e^{itH}$  est un opérateur unitaire, et  $H$  (le Hamiltonien) est un opérateur auto-adjoint.

Remarquons que si on remplace  $t$  par  $it$  alors l'opérateur d'évolution devient  $e^{-tH}$ , qui pour beaucoup de Hamiltoniens  $H$  est un semi-groupe markovien, d'où une analogie avec la théorie des processus de Markov.

### 3.2 Mesures en mécanique quantique

Les quantités que l'on peut observer sont associées à des opérateurs auto-adjoints (appelés "observables"). En particulier le Hamiltonien est une observable, associée à l'énergie du système.

Lorsqu'on observe un système qui se trouve dans l'état  $|\varphi\rangle$ , au moyen de l'observable  $\Lambda$ , alors le résultat de la mesure est une variable aléatoire. La loi de cette variable aléatoire se décrit au moyen de la décomposition spectrale de  $\Lambda$ . Si on suppose pour simplifier que  $\Lambda$  a un nombre fini de valeurs propres  $\lambda_i$ , alors la probabilité que la mesure donne le résultat  $\lambda_i$  est égale à  $|\pi_i|\varphi\rangle|^2$ , où  $\pi_i$  est le projecteur orthogonal sur le sous-espace propre associé à  $\lambda_i$  et on a normalisé à 1 la norme de l'état  $|\varphi\rangle$ . De plus si le résultat de la mesure a donné la valeur  $\lambda_i$ , alors, à la fin de l'expérience le système se trouve dans l'état  $\pi_i|\varphi\rangle$  (c'est l'effondrement de la fonction d'onde).

On peut remarquer que si  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont des opérateurs auto-adjoints qui commutent, alors on peut les diagonaliser simultanément. On peut alors effectuer les mesures successives de  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$ , pour obtenir les quantités (aléatoires!)  $\alpha_1, \alpha_2$  et l'ordre dans lequel on effectue les mesures n'a pas d'influence sur le résultat : la loi du couple  $(\alpha_1, \alpha_2)$  ne dépend pas de cet ordre.

## 4 Mesures non-démolissantes

Le schéma précédent est celui dit de la "mesure idéale de von Neumann". Il existe aussi des façons indirectes d'effectuer une mesure en mécanique quantique. Elles consistent à utiliser un système couplé vivant dans  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , où  $\mathcal{H}_A$  contient l'état à mesurer et le système correspondant à  $\mathcal{H}_B$  est appelé la "sonde". L'observable que l'on mesure est de la forme  $\Lambda = I_A \otimes \Lambda_B$ , ce qui signifie que l'on ne mesure que la sonde. Si le système total, avant la mesure de  $\Lambda$ , est dans un état produit :  $|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$ , alors après la mesure de  $\Lambda$  le système se retrouve encore dans un état produit  $|\psi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$ , par contre si l'état initial du système est de la forme

$$\sum_j |\psi_A^j\rangle \otimes |\psi_B^j\rangle \quad (1)$$

il se passe quelque chose : la mesure du système  $B$  va perturber le système  $A$ . Un état tel que (1), qui ne peut pas se mettre sous forme produit, est dit *intriqué*. Remarquons que la plupart des états sont intriqués.

Reprenons le cas de l'atome (système  $B$ ) passant dans la cavité où se trouvent les photons (système  $A$ ). La mesure du système  $A$  à l'aide de la sonde procède donc comme ceci : l'état initial est de la forme  $|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$ . Lorsque l'atome passe dans la cavité il se produit une interaction, et le système passe dans l'état  $U(|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle)$ , où  $U$  est l'évolution unitaire due à l'interaction atome-photons dans la cavité, pendant le temps que dure le passage de l'atome dans la cavité. À la sortie de l'atome, en général, le système est dans un état intriqué. On effectue alors la mesure sur l'atome, correspondant à une observable de la forme  $\Lambda = I_A \otimes \Lambda_B$ . Si on répète l'expérience

l'espace de Hilbert correspondant est  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{photons} \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$ . Ici  $\mathcal{H}_{photons}$  est l'espace de Hilbert des photons dans la cavité, et les  $\mathcal{H}_i$  sont les espaces de Hilbert des atomes successifs traversant la cavité. On suppose que la mesure de l'atome  $k$  est donnée par une observable  $O(k)$  qui n'agit que sur la partie  $\mathcal{H}_{photons} \otimes \mathcal{H}_k$  de l'espace total. On suppose de plus que les observables  $O(k)$  commutent. Les résultats des mesures successives se comportent alors comme des variables aléatoires classiques échangeables, et on peut appliquer les résultats précédents.

L'expérience qui est ainsi décrite aboutit à un effondrement de la fonction d'onde des photons observé au ralenti.

## 5 Dernères nouvelles

Serge Haroche, auteur des expériences décrites ci-dessus avec son groupe au Laboratoire Kastler-Brossel (ENS) vient de recevoir le prix Nobel de physique (voir [3]).

## Références

- [1] Dembo, Amir ; Zeitouni, Ofer Large deviations techniques and applications. Corrected reprint of the second (1998) edition. Stochastic Modelling and Applied Probability, 38. Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [2] von Neumann, John Mathematical foundations of quantum mechanics. Translated by Robert T. Beyer. Princeton University Press, Princeton, 1955.
- [3] La page web de Serge Haroche :  
[http ://www.college-de-france.fr/site/serge-haroche/index.htm](http://www.college-de-france.fr/site/serge-haroche/index.htm)

# Combinatoire de Catalan et polynômes harmoniques diagonaux

*François Bergeron*

Résumé par *Louis-François Prévaille-Ratelle*

Séminaire de combinatoire énumérative et analytique de l'IHP - 2010-11

## Résumé

Au cours des vingt dernières années, l'étude des espaces de polynômes harmoniques diagonaux a mené à une étude fine de la combinatoire des fonctions de stationnement (parking functions), et de paramètres sur celles-ci. Nous allons présenter certains de ces développements, avec des extensions qui font intervenir l'ordre de Tamari ainsi que ses extensions aux cas de chemins de Dyck généralisés. Nous concluons en abordant de nouveaux problèmes combinatoires soulevés par cette étude.

## 1 Introduction

Soit  $X = (x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq n}}$  et  $q = (q_i)_{1 \leq i \leq l}$  deux matrices de variables pour certains entiers positifs  $l, n$ .  $S_n$  dénote le groupe symétrique sur  $n$  éléments. Soit  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq n}}$  une matrice d'entiers positifs. Soit  $X^A$  le monôme  $\prod_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq n}} x_{i,j}^{a_{i,j}}$  de degré  $(\sum_{j=1}^n a_{i,j})_{1 \leq i \leq l}$ . L'anneau des polynômes en  $X$ , invariants par permutation des colonnes, est dénoté  $\text{Dsym}(X)$ . C'est l'anneau des polynômes diagonalement symétriques. Soit  $f(X)$  un polynôme en  $X$  et  $f(\partial X)$  l'opérateur obtenu en remplaçant chaque variable par l'opération de dérivation partielle correspondante. L'espace des polynômes harmoniques diagonaux est défini comme :

$$\mathcal{D}_{l,n} = \{g(X) \mid f(\partial X)g(X) = 0, f(X) \in \text{Dsym}(X), \text{ et } f(0) = 0\}$$

L'espace vectoriel résultant est gradué par le degré, et ses composantes homogènes sont stables pour l'action de  $S_n$ , par permutation des colonnes dans les variables  $X$ . Un théorème datant des années 1950 démontre que la série de Hilbert de  $\mathcal{D}_{l,n}$  égale :

$$\text{Hilb}(\mathcal{D}_{l,n}; q_1) = (1 + q_1)(1 + q_1 + q_1^2) \dots (1 + q_1 + \dots + q_1^{n-1}) = \sum_{\sigma \in S_n} q_1^{\text{inv}(\sigma)}$$

$\mathcal{D}_{1,n}$  est en fait isomorphe à la représentation régulière. Soit  $\mathcal{D}_{l,n}^\epsilon$  la sous-représentation signe de  $\mathcal{D}_{l,n}$ . Haiman a démontré ([Hai]) que  $\dim(\mathcal{D}_{2,n}) = (n+1)^{n-1}$  et  $\dim(\mathcal{D}_{2,n}^\epsilon) = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n}$ . Haiman a de plus observé qu'on semble avoir  $\dim(\mathcal{D}_{3,n}) = 2^n (n+1)^{n-2}$  et  $\dim(\mathcal{D}_{3,n}^\epsilon) = \frac{2^{(4n+1)!}}{(n+1)!(3n+2)!}$ . Cependant, son approche avec la géométrie algébrique pour la preuve du cas  $l = 2$  ne s'applique pas à  $l \geq 3$ . Il a également observé que la décomposition en nombre premiers de  $\dim(\mathcal{D}_{4,n})$  fait apparaître de gros nombres premiers pour certains  $n$ .

En résumant, l'approche qui consiste à fixer  $l$  et à faire varier  $n$  semble devenir très complexe rapidement. Le conférencier a décidé d'essayer de faire varier  $l$  et fixer  $n$  à la place. Il a alors énoncé

une conjecture magnifique qui dit que la série de Hilbert est  $h$ -positive, où  $h$  représente les fonctions symétriques complètes, et que cette série semble être un raffinement du nombre d'inversions peu importe la valeur de  $n$ . Pour être plus spécifique, il a conjecturé que ( $n$  fixé) pour tout  $l$  :

$$\text{Hilb}(\mathcal{D}_{l,n}; q) = \sum_{\sigma \in S_n} h_{\text{raf}(\text{inv}(\sigma))}(q)$$

où  $\text{raf}(\text{inv}(\sigma))$  est un raffinement du nombre d'inversions de  $\sigma$ . Le raffinement exact reste pour l'instant inconnu. L'auteur a conclu cette partie en ajoutant qu'une telle  $h$ -positivité semble valable pour d'autres groupes.

Le conférencier a alors introduit de nouvelles conjectures sur l'étiquetage des intervalles du treillis de Tamari (défini sur les chemins de Dyck). En utilisant l'encyclopédie de Sloane et la formule d'Haiman pour  $\dim(\mathcal{D}_{3,n}^\epsilon)$ , il a aperçu que le nombre d'intervalles dans le treillis de Tamari est égal à  $\dim(\mathcal{D}_{3,n}^\epsilon)$ , un théorème de Chapoton ([Cha]). Bergeron a alors conjecturé que si l'on remplace le chemin de Dyck du haut par tous les parking functions sur ce chemin de Dyck, il semblerait alors que le nombre d'intervalles étiquetés soit égal à  $\dim(\mathcal{D}_{3,n})$ .

Il a également conjecturé (en partie avec Haiman) que les  $m$ -chemins de Dyck et les  $m$ -parking se généralisaient pour devenir les intervalles dans le  $m$ -treillis de Tamari non-étiquetés et étiquetés et étaient comptés respectivement par

$$\frac{(m+1)}{m(mn+1)} \binom{(m+1)^2n+m}{n-1}$$

et

$$(m+1)^n (mn+1)^{n-2}.$$

Cette définition des  $m$ -treillis de Tamari est une simple généralisation de la relation de couverture dans le treillis de Tamari standard. Il s'agit en fait d'un sous-treillis du treillis de Tamari standard. Ces conjectures ont été motivées par l'étude d'espaces des  $m$ -polynômes harmoniques diagonaux.

Le conférencier a terminé son exposé en soulignant qu'une telle  $h$ -positivité semble aussi valable pour les espaces coinvariants associés aux polynômes diagonalement quasi-symétriques. Dans ce cas le raffinement serait sur une simple statistique sur les chemins de Dyck, déjà mise en évidence par les travaux de Bergeron-Bergeron-Aval ([AvBer]).

## Références

- [AvBer] Aval, J.-C. and Bergeron, F. and Bergeron, N. (2007). Diagonal Temperley-Lieb invariants and harmonics. In *Sém. Lothar. Combin.*, volume 54A, 19pages.
- [Ber] Bergeron, François (2009). Algebraic combinatorics and coinvariant spaces. *CMS Treatises in Mathematics*, Canadian Mathematical Society, 221 pages.
- [Cha] Chapoton, Frédéric (2007). Sur le nombre d'intervalles dans les treillis de Tamari. In *Sém. Lothar. Combin.*, volume 55, 18 pages.
- [Hai] Haiman, Mark (2001). Hilbert schemes, polygraphs and the Macdonald positivity conjecture. In *J. Amer. Math. Soc.*, vol. 14, pages 941–1006.

## POLYNÔMES ORTHOGONAUX ET ÉQUATIONS DE PAINLEVÉ DISCRÈTES

**Polynômes orthogonaux sur le cercle unité.** Si  $\mu$  est une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}$  admettant des moments de tout ordre, la famille des polynômes orthogonaux  $(P_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$  pour cette mesure est l'orthogonalisée de Gram-Schmidt de  $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour le produit scalaire

$$(1) \quad \langle f | g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} \mu(dx).$$

Toute famille de polynômes orthogonaux graduée en degré satisfait une relation de récurrence à 3 termes

$$(2) \quad P_{n+1}(z) = (a_n z + b_n) P_n(z) - c_n P_{n-1}(z),$$

et les coefficients  $a_n, b_n, c_n$  sont reliés aux moments  $m_n = \int_{\mathbb{R}} x^n \mu(dx)$  de la mesure  $\mu$  et à sa transformée de Cauchy-Stieltjes par les relations :

$$(3) \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x} \mu(dx) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n z^{-n-1} = \frac{a_0}{a_0 z + b_0 - \frac{c_1}{a_1 z + b_1 - \frac{c_2}{a_2 z + b_2 - \dots}}}$$

cf. [Fla80, Vie84]. Pour la plupart des exemples classiques, les coefficients  $a_n, b_n, c_n, m_n$  ont des interprétations combinatoires. Par exemple, si  $d\mu(x) = \mathbb{1}_{x \in [-2,2]} \frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi} dx$  est la loi du demi-cercle, alors les polynômes orthogonaux sont (à une renormalisation près) les polynômes de Chebyshev de seconde espèce, et

$$(4) \quad a_n = 1 \quad ; \quad b_n = 0 \quad ; \quad c_n = 1 \quad ; \quad m_{2n} = C_n \text{ (nombre de Catalan)} \quad ; \quad m_{2n+1} = 0.$$

Plus généralement, la plupart des polynômes orthogonaux classiques rentrent dans le cadre du schéma d'Askey, c'est-à-dire qu'ils s'obtiennent par spécialisation ou passage à la limite des paramètres des polynômes orthogonaux d'Askey-Wilson associés aux poids

$$(5) \quad \mu_{a,b,c,d,q}(dx) = \left| \frac{(e^{2i\theta}; q)_{\infty}}{(ae^{i\theta}; q)_{\infty} (be^{i\theta}; q)_{\infty} (ce^{i\theta}; q)_{\infty} (de^{i\theta}; q)_{\infty}} \right|^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{avec } x = \cos \theta.$$

Pour ces derniers, les coefficients de récurrence et une interprétation combinatoire des moments sont également connus, voir par exemple [CW10].

On s'intéresse au problème analogue pour des polynômes orthogonaux sur le cercle unité, c'est-à-dire pour l'orthogonalisée de Gram-Schmidt  $(\phi_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$  de  $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$  relativement à une mesure  $\mu$  sur le cercle  $\mathbb{T}^1$ . Dans ce qui suit, on supposera que  $\mu$  a pour forme

$$(6) \quad d\mu(\theta) = \omega(e^{i\theta}) d\theta = \left| \frac{(ae^{i\theta}; q)_{\infty}}{(be^{i\theta}; q)_{\infty}} \right|^2 d\theta.$$

Les relations de récurrence des polynômes orthogonaux sur le cercle sont dues à G. Szegő (voir [Sze75]). Ainsi, il existe des coefficients  $\alpha_n \in \mathbb{C}$  (appelés coefficients de Verblunsky) tels que, si  $\phi_n^*(z) = z^n \phi_n(z^{-1})$ , alors :

$$(7) \quad \begin{cases} \phi_{n+1}(z) &= z \phi_n(z) + \alpha_{n+1} \phi_n^*(z) \\ \phi_{n+1}^*(z) &= \overline{\alpha_{n+1}} z \phi_n(z) + \phi_n^*(z) \end{cases}$$

ce qu'on peut réécrire sous la forme  $\Phi_{n+1}(z) = B_n(z) \Phi_n(z)$  avec  $\Phi_n(z) = \begin{pmatrix} \phi_n(z) \\ \phi_n^*(z) \end{pmatrix}$  et  $B_n(z) = \begin{pmatrix} z & \alpha_n \\ \overline{\alpha_n} z & 1 \end{pmatrix}$ . On s'intéresse donc à ces coefficients  $\alpha_n$  ; ils vont s'avérer satisfaire des relations non linéaires qu'on peut

interpréter comme itérations d'une transformation birationnelle du plan projectif complexe éclaté en neuf points.

**Relations vérifiées par les coefficients de Verblunsky.** Le poids  $\omega(e^{i\theta})$  peut être prolongé en une fonction holomorphe vérifiant l'équation

$$(8) \quad \omega(qz) = \frac{V(z)}{W(z)} \omega(z) = \frac{(qz - \bar{a})(1 - bz)}{(qz - \bar{b})(1 - az)} \omega(z).$$

Ceci implique l'existence de matrices  $A_n(z) = A_n^2 z^2 + A_n^1 z + A_n^0$  telles que  $\Phi_n(qz) = \frac{A_n(z)}{V(z)} \Phi_n(z)$ , et les matrices  $A_n$  et  $B_n$  vérifient la condition de compatibilité

$$(9) \quad A_{n+1}(z) B_n(z) = B_n(qz) A_n(z),$$

qui va se révéler être une forme de Lax d'une équation de Painlevé discrète ([JS96, Sak01]). Dès lors, le problème se ramène à l'étude de l'équation matricielle

$$(10) \quad \tilde{A}(z) = B(qz) A(z) B(z)^{-1},$$

avec

$$(11) \quad A(z) = \begin{pmatrix} \kappa_1 z^2 + az + \theta_1 & z - y \\ cz(z - w) & \kappa_2 z^2 + bz + \theta_2 \end{pmatrix} ; \quad \tilde{A}(z) = \begin{pmatrix} \tilde{\kappa}_1 z^2 + \tilde{a}z + \tilde{\theta}_1 & z - \tilde{y} \\ \tilde{c}z(z - \tilde{w}) & \tilde{\kappa}_2 z^2 + \tilde{b}z + \tilde{\theta}_2 \end{pmatrix}$$

et  $B(z) = \begin{pmatrix} z & \alpha \\ \alpha z & 1 \end{pmatrix}$ . En effet, étant donnée une matrice  $A(z)$ , il existe génériquement une unique matrice  $\tilde{A}(z)$  vérifiant l'équation (10), et d'autre part, pour le problème des coefficients de Verblunsky,

$$(12) \quad y = \frac{\alpha_n(\bar{a} - \bar{b}q^n)}{\alpha_{n+1}(a - bq^{n+1})},$$

donc il suffit clairement de comprendre la transformation  $y \longrightarrow \tilde{y}$ .

**Étude d'une transformation birationnelle du plan projectif  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  éclaté en neuf points.** On doit à H. Sakai une théorie reliant les équations de Painlevé discrètes à des surfaces rationnelles et à des systèmes de racines affines ([Sak01]). Dans l'équation (10),

$$(13) \quad \det A(z) = \kappa_1 \kappa_2 (z - c_1)(z - c_2)(z - c_3)(z - c_4)$$

$$(14) \quad \det \tilde{A}(z) = q \kappa_1 \kappa_2 (z - c_1)(z - c_2)(z - c_3)(z - c_4)$$

ce qui impose en particulier  $\tilde{\kappa}_1 = q\kappa_1$ ,  $\tilde{\kappa}_2 = \kappa_2$ ,  $\tilde{\theta}_1 = q\theta_1$  et  $\tilde{\theta}_2 = \theta_2$ . Les coefficients  $c_1, c_2, c_3, c_4, \kappa_1, \kappa_2, \theta_1, \theta_2$  étant fixés, l'espace  $X_{\kappa_1, \kappa_2, \theta_1, \theta_2}$  constitué des matrices  $A(z)$  ayant pour déterminant (13) est une variété complexe de dimension 2, et la transformation  $A(z) \mapsto \tilde{A}(z)$  est une bijection entre un ouvert dense de  $X_{\kappa_1, \kappa_2, \theta_1, \theta_2}$  et un ouvert dense de  $X_{q\kappa_1, \kappa_2, q\theta_1, \theta_2}$ ; autrement dit, c'est une transformation birationnelle  $\psi : X_{\kappa_1, \kappa_2, \theta_1, \theta_2} \rightarrow X_{q\kappa_1, \kappa_2, q\theta_1, \theta_2}$ .

La variété  $X = X_{\kappa_1, \kappa_2, \theta_1, \theta_2}$  est paramétrée par  $y$  et par  $\xi = \frac{(y-c_1)(y-c_2)}{\kappa_1 y^2 + ay + \theta_1}$ ; avec ces coordonnées, elle s'identifie au plan projectif complexe  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  éclaté en neuf points<sup>1</sup>, et on peut donner des expressions explicites des fractions rationnelles mises en jeu dans la transformation  $\psi : (y, \xi) \mapsto (\tilde{y}, \tilde{\xi})$ . Par exemple,

$$(15) \quad \tilde{\xi} = \frac{c_1 c_2}{\kappa_1 \theta_1 \xi} \frac{\left[ \xi \left( y - \frac{q\theta_1}{c_1 \kappa_2} \right) - \frac{q}{\kappa_2} (y - c_2) \right] \left[ \xi \left( y - \frac{q\theta_1}{c_2 \kappa_2} \right) - \frac{q}{\kappa_2} (y - c_1) \right]}{\left[ \xi (y - c_4) - \frac{q}{\kappa_2} \left( y - \frac{\theta_2}{q c_3 \kappa_1} \right) \right] \left[ \xi (y - c_3) - \frac{q}{\kappa_2} \left( y - \frac{\theta_2}{q c_4 \kappa_1} \right) \right]}.$$

La forme factorisée ci-dessus peut être expliquée en considérant l'isométrie  $\psi^*$  induite par  $\psi$  entre les groupes de Picard<sup>2</sup>  $\text{Pic}(X)$  et  $\text{Pic}(\tilde{X})$ . Pour  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ , le groupe de Picard est  $\text{Pic}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}$ , et il est engendré par la classe  $\mathcal{E}_0$  d'une droite générique de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ ; l'éclatement en neuf points rajoute neuf

<sup>1</sup>C'est aussi  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  éclaté en huit points.

<sup>2</sup>Comme  $X$  est (au sens de Sakai) une surface de Halphen généralisée, on peut reconstruire  $\psi$  à partir de  $\psi^*$ .

diviseurs exceptionnels  $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_9$ , donc  $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}^{10}$ . L'orthogonal du diviseur canonique  $\mathcal{K}_X$  (l'unique cubique passant par neuf points génériques) pour la forme d'intersection sur  $\text{Pic}(X)$  est un réseau de rang 9 engendré par les racines d'un système de type  $E_8^{(1)}$  :

$$(16) \quad \begin{array}{c} \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 \\ | \\ \circ - \circ \\ \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 \quad \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 \quad \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4 \quad \mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_5 \quad \mathcal{E}_5 - \mathcal{E}_6 \quad \mathcal{E}_6 - \mathcal{E}_7 \quad \mathcal{E}_7 - \mathcal{E}_8 \quad \mathcal{E}_8 - \mathcal{E}_9 \end{array}$$

et la matrice de  $\psi^*$  dans les bases  $(\mathcal{E}_i)_{i=0}^9$  et  $(\tilde{\mathcal{E}}_i)_{i=0}^9$  s'écrit

$$(17) \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut encore simplifier l'analyse de  $\psi$  en remarquant que l'isométrie  $\psi^*$  agit trivialement sur le sous-réseau de  $\text{Pic}(X)$  engendré par les composantes irréductibles

$$(18) \quad \begin{array}{c} \mathcal{E}_8 - \mathcal{E}_9 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \quad \circ \\ \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_6 - \mathcal{E}_7 - \mathcal{E}_8 \quad \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_5 - \mathcal{E}_8 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \\ \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 \end{array}$$

du diviseur anticanonique  $-\mathcal{K}_X$  — ces diviseurs constituent un système de racines de type  $A_3^{(1)}$ . L'orthogonal de ce sous-réseau est engendré par un système de racines de type  $D_5^{(1)}$  :

$$(19) \quad \begin{array}{c} \alpha_0 = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_8 - \mathcal{E}_9 \quad \alpha_4 = \mathcal{E}_6 - \mathcal{E}_7 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \circ \quad \quad \quad \circ \\ \alpha_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 \quad \alpha_3 = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_6 \\ \diagup \quad \diagdown \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \quad \quad \circ \\ \alpha_1 = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 \quad \alpha_5 = \mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_5 \end{array}$$

et l'action de  $\psi^*$  sur ce dernier sous-réseau est simplement une translation, dont une écriture réduite dans le groupe de Weyl affine est

$$(20) \quad \psi^* = \sigma \omega_4 \omega_3 \omega_2 \omega_0 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4.$$

Ici, les  $\omega_i$  désignent les réflexions associées aux racines simples  $\alpha_i$ , et  $\sigma$  est l'automorphisme du diagramme de Dynkin  $D_5^{(1)}$  donné par  $\sigma(\alpha_0) = \alpha_1$  et  $\sigma(\alpha_4) = \alpha_5$ . Relevées au plan projectif éclaté en neuf points, les  $\omega_i$  sont toutes conjuguées à la transformation élémentaire

$$(21) \quad [x; y; z] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \mapsto \left[ \frac{1}{x}; \frac{1}{y}; \frac{1}{z} \right] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2;$$

on a donc compris la combinatoire de l'opération  $\psi : (y, \xi) \mapsto (\tilde{y}, \tilde{\xi})$ .

## REFERENCES

- [Bia09] P. Biane. Orthogonal polynomials on the unit circle,  $q$ -Gamma weights, and discrete Painlevé equations. arXiv:0901.0947v2 [math.CA], 2009.
- [CW10] S. Corteel and L. K. Williams. Staircase tableaux, the asymmetric exclusion process, and Askey-Wilson polynomials. *S. Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 107(15):6726–6730, 2010.
- [Fla80] P. Flajolet. Combinatorial aspects of continued fractions. *Discrete Math.*, 32(2):125–161, 1980.
- [JS96] M. Jimbo and H. Sakai. A  $q$ -analog of the sixth painlevé equation. *Lett. Math. Phys.*, 38(2):145–154, 1996.
- [Sak01] H. Sakai. Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the painlevé equations. *Comm. Math. Phys.*, 220(1):165–229, 2001.
- [Sze75] G. Szegő. *Orthogonal polynomials*, volume XXIII of *Colloquium Publications*. American Mathematical Society, 4th edition, 1975.
- [Vie84] X. Viennot. *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux*. Lecture Notes UQAM. Publications du LACIM, Université du Québec à Montréal, 1984.

# Computer Algebra for Lattice Path Combinatorics

ALIN BOSTAN

Résumé par BRUNO SALVY

*Séminaire de Combinatoire Philippe Flajolet  
Institut Henri Poincaré, Séance du 6 juin 2013*

## Abstract

Classifying lattice walks in restricted lattices is an important problem in enumerative combinatorics. Recently, computer algebra methods have been used to explore and solve a number of difficult questions related to lattice walks. This talk gave an overview of recent results on structural properties and explicit formulas for generating functions of walks in the quarter plane, with an emphasis on the algorithmic methodology.

## 1 Introduction

Lattice path enumeration is a classical topic of combinatorics, with applications in probability theory (branching processes, gambler's ruin, . . .), queuing theory, discrete mathematics (permutations, words, trees, urns, . . .) and statistical physics (percolation, Ising model, . . .).

The work reported in this talk concentrates on the enumeration of nearest-neighbor walks in the quarter plane  $\mathbb{N}^2$ . A set  $\mathfrak{S}$  of elements of  $\{-1, 0, 1\}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  is given and one considers walks starting at  $(0, 0)$ , remaining in  $\mathbb{N}^2$  and using only steps in  $\mathfrak{S}$ . From the enumeration viewpoint, the quantity of interest is  $f_{\mathfrak{S}}(n; i, j)$ , the number of such walks ending at  $(i, j)$  after  $n$  steps, and the corresponding generating series

$$F_{\mathfrak{S}}(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i,j=0}^{\infty} f_{\mathfrak{S}}(n; i, j) x^i y^j \right) t^n.$$

Specializing  $x$  and  $y$  to 0 gives the walks returning to the origin (called *excursions*), while specializing them both to 1 gives the total number of walks of length  $n$ . Another meaningful specialization is  $x = 1, y = 0$ , which gives the generating series of walks ending on the horizontal axis (the vertical one is obtained by  $x = 0, y = 1$ ).

The sequence  $f_{\mathfrak{S}}(n; i, j)$  is easily seen to obey a linear recurrence with constant coefficients, but its behavior is much more complicated than for solutions of such recurrences in dimension 1. Instead of a simple linear equation for the generating series, one obtains a functional equation called the *kernel equation* relating  $F_{\mathfrak{S}}(t; x, y)$  and its specializations  $F_{\mathfrak{S}}(t; 0, y)$ ,  $F_{\mathfrak{S}}(t; x, 0)$ ,  $F_{\mathfrak{S}}(t; 0, 0)$ . An exact “formula” for  $f_{\mathfrak{S}}(n; i, j)$  or for  $F_{\mathfrak{S}}(t; x, y)$  is not available in general, but a lot has been discovered in the past few years concerning the nature of these sequences and series. Computer algebra plays an essential role in this study, where a large number of coefficients are used to first produce reasonable conjectures and then rigorous proofs, some of which do not have a purely human version yet.

## 2 Varieties of Power Series

The simplest family of power series consists of polynomials. These occur rarely as generating series of walks: only the polynomial 1 can occur, for trivial walks whose steps all have a negative coordinate. Next in complexity, rational generating series occur when the step set does not have any element with a negative coordinate. For these walks, staying in  $\mathbb{N}^2$  is not a constraint. Rational power series form a subclass of algebraic power series, that are solutions of a polynomial. It has been known for a long time that all walks whose step sets belong to the right half-plane have an algebraic generating series. They are not the only ones. The generating series of the Kreweras walks, with step set  $\{(0, -1), (-1, 0), (1, 1)\}$  has been known to be algebraic for almost 30 years [8, 6]. More recently, the more difficult case of Gessel walks, with step set  $\{(1, 1), (-1, -1), (-1, 0), (1, 0)\}$  has been proved to have an algebraic generating series [2]. Algebraic power series are themselves a special case of D-finite power series, i.e., solutions of linear differential equations with polynomial coefficients. An interesting subclass of D-finite power series is composed of hypergeometric series (where the ratio of two consecutive coefficients is a fixed rational function of the index) and their integrals, that occur very frequently in this application too, see §5 below.

## 3 The group of the walk

To the step set  $\mathfrak{S}$  is associated the characteristic polynomial of the walk

$$\chi_{\mathfrak{S}} = \sum_{(i,j) \in \mathfrak{S}} x^i y^j = \sum_{i=-1}^1 B_i(y) x^i = \sum_{j=-1}^1 A_j(x) y^j.$$

This polynomial is left invariant under the substitutions  $\psi(x, y) = (x, A_{-1}(x)/A_1(x)/y)$  and  $\phi(x, y) = (B_{-1}(y)/B_1(y)/x, y)$ . The *group of the walk* is the group of substitutions generated by  $\psi$  and  $\phi$ . It seems to play an important role in the classification of the possible behaviors of the generating series.

After removing trivial cases and taking symmetry into account, there are 79 inherently different cases of small-step sets [7]. These are now completely classified as follows:

- 23 admit a finite group [13]. Of these
  - 4 are algebraic (Gessel’s and variants of Kreweras’);
  - 19 are D-finite and transcendental [9, 5].
- 56 admit an infinite group [7]. Moreover,
  - 5 singular cases are non-D-finite [14, 12];
  - the other 51 cases are non-D-finite by other arguments [4, 11].

## 4 Computer-aided proofs of algebraicity

The discovery that Gessel’s walks have an algebraic generating series was based on experimental mathematics. It is a very nice story that deserves more than a few lines and we refer to the original article for details [2]. With hindsight it can be obtained by computing a large number of coefficients of the series and then computing a Hermite-Padé approximant for the series and its first powers. Because of the size of these objects, the computation are better performed

modulo primes, concentrating on the specializations at  $x = 0$  or  $y = 0$  and for given values of the remaining variable.

Once polynomials annihilating  $F_{\mathfrak{S}}(t; x, 0)$  and  $F_{\mathfrak{S}}(t; 0, y)$  have been conjectured, they can be proved automatically by showing first that these polynomials has a unique power series solution, next (by resultant computations using fast algorithms) that these power series have to satisfy equations derived from the kernel equation and finally that these derived equations themselves have a unique formal power series solution. This establishes the algebraicity of both generating series. From there, the kernel equation implies that the full generating series  $F_{\mathfrak{S}}(t; x, y)$  is algebraic too, which concludes the proof. The first purely human proof of this result has appeared very recently [3].

The size of the minimal polynomial annihilating the generating function of the Gessel walks is estimated at 30 gigabytes. An interesting extra structure of the generating function has been discovered and proved with computer algebra more recently, resulting in a 5 lines-long formula for the generating series. No human proof of this “simple” formula is known yet.

## 5 Computer-aided proofs of D-finiteness

The same experimental mathematics approach can be used to determine and prove linear differential equations satisfied by the 19 non-algebraic D-finite cases corresponding to finite groups. More precise information on the structure of these series is obtained by starting from the kernel equation. Letting the group act on this equation, an expression of the generating series as the positive part of a rational Laurent series can be obtained [7]. By known properties of D-finite series, this proves D-finiteness and the computer algebra technique of creative telescoping produces the desired linear differential equation. A more thorough analysis of this equation using factorization of linear differential operators leads to the discovery of even more structure: it turns out that all those 19 cases have a generating series that can be expressed using integrals of  ${}_2F_1$  series [1]. A nice example is provided by the “King’s walk”, where all 8 steps are allowed, for which the generating function of all walks (ie the value at  $x = y = 1$ ) is given explicitly as

$$\frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{(1+4x)^3} {}_2F_1 \left( \frac{3}{2} \quad \frac{3}{2} \middle| \frac{16x(1+x)}{(1+4x)^2} \right) dx.$$

Again, no purely human proof is known at this stage.

## 6 Computer-aided proofs of non-D-finiteness

The proof that a generating series does not satisfy a linear differential equation is usually based on exhibiting a property of the series that is not compatible with it being D-finite. Thus, a recent result in probability theory giving access to the asymptotic behavior of the integer sequence  $f_{\mathfrak{S}}(n; 0, 0)$  leads to a proof of non-D-finiteness provided an exponent in the expansion is proved irrational. This is decided algorithmically, using Gröbner basis computations, polynomial factorization and cyclotomy testing [4]. The non-D-finiteness of  $F_{\mathfrak{S}}(t; 0, 0)$  implies that of the more general  $F_{\mathfrak{S}}(t; x, y)$ , for which an alternative proof is known [11]. No human proof is known for the specialization at  $(0,0)$  and the nature of the specialization at  $(1,1)$  is still unknown.

## Conclusion

The classification of the 2D walks with small-step sets has been completed in the past few years thanks in a part to a very efficient toolbox coming from computer algebra. Much remains to be

done. Several of the results or observations still do not have a purely human proof. The exact role played by the group of the walk is still unclear. The non-D-finite nature of  $F_{\mathfrak{S}}(t; 1, 1)$  in the non-singular cases with infinite group is still only a conjecture. Some of these may become clearer with work in progress studying longer 2D steps or higher dimensional walks.

## References

- [1] BOSTAN, A., CHYZAK, F., VAN HOEIJ, M., KAUERS, M., AND PECH, L. Explicit differentially finite generating functions of walks with small steps in the quarter plane. In preparation (2013).
- [2] BOSTAN, A., AND KAUERS, M. The complete generating function for Gessel walks is algebraic. *Proceedings of the American Mathematical Society* 138, 9 (2010), 3063–3078.
- [3] BOSTAN, A., KURKOVA, I., AND RASCHEL, K. A human proof of Gessel’s lattice path conjecture, 2013. Preprint.
- [4] BOSTAN, A., RASCHEL, K., AND SALVY, B. Non-D-finite excursions in the quarter plane. Tech. rep., arXiv, 2013. To appear in the Journal of Combinatorial Theory, Series A.
- [5] BOUSQUET-MÉLOU, M. Counting walks in the quarter plane. In *Mathematics and computer science, II (Versailles, 2002)*, Trends Math. Birkhäuser, Basel, 2002, pp. 49–67.
- [6] BOUSQUET-MÉLOU, M. Algebraic generating functions in enumerative combinatorics and context-free languages. In *STACS 2005: 22nd Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (2005)*, V. Diekert and B. Durand, Eds., vol. 3404 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag GmbH, pp. 18–35.
- [7] BOUSQUET-MÉLOU, M., AND MISHNA, M. Walks with small steps in the quarter plane. In *Algorithmic probability and combinatorics*, vol. 520 of *Contemp. Math.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, pp. 1–39.
- [8] GESSEL, I. M. A probabilistic method for lattice path enumeration. *Journal of Statistical Planning and Inference* 14, 1 (1986), 49 – 58.
- [9] GESSEL, I. M., AND ZEILBERGER, D. Random walk in a Weyl chamber. *Proceedings of the American Mathematical Society* 115, 1 (May 1992), 27–31.
- [10] KAUERS, M., KOUTSCHAN, C., AND ZEILBERGER, D. Proof of Ira Gessel’s lattice path conjecture. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA* 106, 28 (2009), 11502–11505.
- [11] KURKOVA, I., AND RASCHEL, K. On the functions counting walks with small steps in the quarter plane. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 116, 1 (2012), 69–114.
- [12] MELCZER, S., AND MISHNA, M. Singularity analysis via the iterated kernel method. In *Proceedings of FPSAC’13, Paris, France (2013)*.
- [13] MISHNA, M. Automatic enumeration of regular objects. *Journal of Integer Sequences* 10, 07.5.5 (May 2007), 1–18.
- [14] MISHNA, M., AND RECHNITZER, A. Two non-holonomic lattice walks in the quarter plane. *Theoretical Computer Science* 410, 38-40 (2009), 3616–3630.

# Algèbres de Hopf combinatoires

*Pierre* CARTIER

Résumé par *Philippe* BIANE

Séminaire de Combinatoire Énumérative et Analytique

*Institut Henri Poincaré*

Année 2010 – 2011

## Résumé

Les opérations de contraction et d'insertion dans les graphes – selon la prédiction de G.-C. Rota – conduisent à des algèbres de Hopf. On décrira deux exemples principaux, liés aux diagrammes de Feynman et à la monodromie d'équations différentielles. On explicitera les théorèmes de structure sous-jacents.

## 1 Algèbres de Hopf

### 1.1 Origines

La notion d'algèbre de Hopf apparaît pour la première fois en topologie dans les travaux d'Ehresmann. Il s'agissait d'étudier la cohomologie des groupes unitaires. Comme l'espace sous-jacent est un groupe, on dispose d'une application  $G \times G \rightarrow G$  (la multiplication) qui donne par dualité un coproduit sur la cohomologie.

### 1.2 Définitions

Un espace vectoriel  $A$  est muni d'une structure d'algèbre si on se donne une multiplication. Celle-ci définit une application linéaire

$$m : A \otimes A \rightarrow A$$

Les diverses propriétés de la multiplication (commutativité, associativité, existence d'une unité, ...) se traduisent sur  $m$ , par exemple l'associativité correspond à

$$m \circ (m \otimes I) = m \circ (I \otimes m) : A \otimes A \otimes A \rightarrow A$$

Dualement un coproduit sur un espace vectoriel  $C$  est une application linéaire

$$\Delta : C \rightarrow C \otimes C$$

En renversant le sens des flèches, on peut définir des notions de coassociativité, cocommutativité, etc... Par exemple la cosassociativité du coproduit s'écrit

$$(\Delta \otimes I) \circ \Delta = (I \otimes \Delta) \circ \Delta : C \rightarrow C \otimes C \otimes C$$

Une algèbre de Hopf est une algèbre  $H$ , munie d'un coproduit tels que ces deux opérations soient compatibles c'est-à-dire que  $\Delta : H \rightarrow H \otimes H$  est un morphisme d'algèbres et que  $m : H \otimes H \rightarrow H$  est un morphisme de cogèbres. On parle alors de bigèbre. Pour avoir une algèbre

de Hopf il faut que le produit et le coproduit soient associatifs et en plus admettent une unité et une counité, ainsi qu'une antipode.

Exemple : Soit  $H$  l'algèbre des polynômes en  $n$  variables sur le corps  $K$ ,  $A = K[x_1, \dots, x_n]$  on définit le coproduit par extension linéaire et multiplicative de

$$\Delta(x_i) = 1 \otimes x_i + x_i \otimes 1$$

On peut interpréter ce coproduit comme une doublement de variables :

$$\Delta : A \rightarrow A \otimes A \sim K[x'_1, \dots, x'_n, x''_1, \dots, x''_n]$$

$$\Delta P(x'_1, \dots, x'_n, x''_1, \dots, x''_n) = P(x'_1 + x''_1, \dots, x'_n + x''_n)$$

Remarque : le dual d'une coalgèbre est une algèbre, mais la réciproque n'est pas vrai en dimension infinie, cela provient du fait qu'en général le dual d'un produit tensoriel est plus grand que le produit tensoriel des duals :  $H^* \otimes H^* \subset (H \otimes H)^*$  mais pas d'égalité, par conséquent  $m^* : H^* \rightarrow (H \otimes H)^*$  n'a pas de raison de prendre ses valeurs dans  $H^* \otimes H^*$ .

### 1.3 Structure des algèbres de Hopf commutatives ou cocommutatives

Il s'agit de résultat dûs à Cartier, Milnor-Moore, Quillen.

D'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, toute algèbre de Lie se plonge de manière universelle dans une algèbre associative (appelée son algèbre enveloppante). Cette algèbre enveloppante est naturellement munie d'une structure d'algèbre de Hopf cocommutative pour le coproduit défini par

$$\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1 \tag{1}$$

pour tout  $x$  dans l'algèbre de Lie. Réciproquement, dans une algèbre de Hopf cocommutative les éléments  $x$  satisfaisant (1) s'appelle les éléments primitifs. Ils forment une algèbre de Lie, et l'algèbre de Hopf est isomorphe à l'algèbre enveloppante de cette algèbre de Lie. La version duale de ce résultat énonce qu'une algèbre de Hopf commutative graduée est isomorphe, en tant qu'algèbre, à une algèbre polynomiale.

## 2 Algèbres de Hopf combinatoires

La notion d'algèbre de Hopf permet de donner une version algébrique des opérations combinatoires de concaténation et déconcaténation.

### 2.1 Algèbres libres

Considérons l'algèbre de Lie libre de générateurs  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , son algèbre enveloppante est l'algèbre libre engendrée par  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . Elle admet une base linéaire formée par les mots sur l'alphabet  $\xi_1, \dots, \xi_n$  (le mot vide étant l'identité). Le produit dans cette algèbre est la concaténation des mots

$$(x_1 \dots x_p)(y_1 \dots y_q) = x_1 \dots x_p y_1 \dots y_q$$

le coproduit est encore donné par

$$\Delta(\xi_i) = 1 \otimes \xi_i + \xi_i \otimes 1$$

Sur un mot  $x_1 \dots x_p$  on a

$$\Delta(x_1 \dots x_p) = \sum x_{i_1} \dots x_{i_m} \otimes x_{i_{m+1}} \dots x_{i_p}$$

la somme portant sur toutes les permutations  $i_1 \dots i_p$  de  $[1, p]$  ayant une seule descente.

On peut dualiser cette algèbre de Hopf de la façon suivante. On considère toujours l'espace vectoriel engendré par les mots sur  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , mais cette fois-ci le coproduit, dual du produit de concaténation, est donné par la déconcaténation, on a :

$$\Delta(\omega) = \sum_{\omega = \omega' \omega''} \omega' \otimes \omega''$$

Le produit, lui s'appelle le produit de mélange (ou "shuffle"), donné par

$$x_1 \dots x_p \sqcup x_{p+1} \dots x_{p+q} = \sum_{\sigma \in S_{p+q}^{(p)}} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p+q)}$$

où la somme porte sur les permutations  $\sigma$  qui ont une seule descente en  $p$ . Le mélange est commutatif, donc d'après le théorème de Milnor-Moore, l'algèbre correspondante est une algèbre polynomiale. On peut montrer qu'une famille de générateurs est formée par les mots de Lyndon, c'est à dire les mots qui sont strictement inférieurs, dans l'ordre lexicographique, à toutes leurs permutations circulaires.

## 2.2 L'algèbre de Faà di Bruno

Les séries formelles

$$f(x) = x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

forment un groupe pour la composition, en effet si  $f$  et  $g$  sont des séries formelles,  $f \circ g(x) = f(g(x))$  est bien définie comme série formelle, et de plus toute série admet un inverse pour cette opération. Ce groupe est de dimension infinie, on peut introduire une algèbre de Hopf associée en considérant l'algèbre des polynômes en une infinité de variables  $FB = K[c_2, c_3, \dots]$ , où les  $c_i$  sont considérées comme des fonctions sur le groupe. Ceci permet de donner à  $K[c_2, c_3, \dots]$  une structure d'algèbre de Hopf, le coproduit étant défini par  $\Delta(c_k) = c_k(f \circ g)$  où

$$f(x) = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots, \quad g(x) = x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots$$

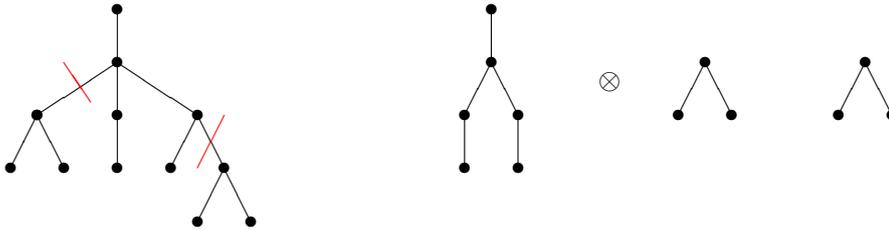
et on identifie  $a_i = c_i \otimes I, b_i = I \otimes c_i$  ce qui donne  $\Delta(c_k) \in FB \otimes FB$ .

## 2.3 Algèbre de Hopf des arbres plans

Dans le but de comprendre conceptuellement les calculs de renormalisation en théorie quantique des champs, Kreimer a introduit une algèbre de Hopf construite sur des arbres plans enracinés. Plus précisément, en tant qu'algèbre c'est une algèbre de polynômes en une infinité de variables, ces variables étant indexées par les arbres planaires enracinés finis. Les monômes, qui sont des produits d'arbres, sont identifiés à des forêts. Le coproduit est défini à l'aide d'une notion de coupure admissible dans un arbre. Chaque arête d'un arbre coupe en effet l'arbre en deux parties, dont l'une contient la racine. On peut enraciner l'autre partie à l'extrémité de la coupure. Une famille de coupures d'un arbre plan enraciné est dite admissible si tout chemin allant de la racine à une feuille de l'arbre est coupé au plus une fois. Une telle famille de coupures (appelons la  $c$ ), produit une forêt d'arbres enracinés, donc l'un contient la racine de l'arbre dont on est parti, on désigne alors par  $P^c(t)$  cet arbre, et par  $R^c(t)$  la forêt des arbres ne contenant pas la racine. Le coproduit est alors donné par la formule

$$\Delta(t) = e \otimes t + t \otimes e + \sum_c P^c(t) \otimes R^c(t)$$

dans laquelle la somme porte sur les coupures admissibles de  $t$ . La figure ci-dessous montre un arbre avec un système de deux coupures admissibles, et le terme correspondant dans le coproduit.



## 2.4 Algèbre de Hopf de diagrammes de Feynman

L'algèbre précédente a été raffinée par Connes et Kreimer en une algèbre de diagrammes. C'est une algèbre de polynômes dont les générateurs sont indexés par les graphes connexes. Il est commode pour décrire ces graphes de voir chaque arête comme étant composée de deux demi-arêtes. Un graphe est alors donné par un ensemble de sommets, de chaque sommet partent des demi-arêtes, et certaines de ces demi-arêtes sont recollées pour former des arêtes, toutefois certaines de ces demi-arêtes restent seules (on parle alors de demi-arêtes externes). Le coproduit est défini en utilisant des coupures du graphe en deux régions. Soit  $\Gamma$  un graphe connexe, pour chaque coupure du graphe en deux régions, dont l'une ne contient que des arêtes internes, on considère le graphe  $\gamma$  formé par les sommets de cette région et leurs demi-arêtes. On note  $\Gamma//\gamma$  le graphe obtenu à partir de  $\Gamma$  en "collapsant" les composantes connexes de  $\gamma$ . Le coproduit est alors :

$$\Delta(\Gamma) = \sum_{\gamma} (\Gamma//\gamma) \otimes \gamma$$

## 2.5 Algèbre de Hopf et multizétas

La fonction zêta est définie par  $\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s}$ . Ses valeurs aux entiers,  $\zeta(n)$ , ont une grande importance arithmétique. On peut généraliser ces nombres en considérant des sommes du type  $\zeta(3, 2) = \sum_{0 < m < n} \frac{1}{m^3 n^2}$ , ou plus généralement, avec une notation évidente,  $\zeta(n_1, \dots, n_k)$ . Ces nombres vérifient des relations algébriques simples, qui se décrivent naturellement en terme d'algèbre de Hopf. On conjecture que les relations ainsi obtenues sont les seules qui existent entre tous ces nombres. Des résultats importants dans ce domaine ont été obtenus récemment par Francis Brown.

## Références

- [1] J. W. Milnor and J. C. Moore (1965) On the structure of Hopf algebras. *Ann. of Math.* (2), 81, pages 211–264.
- [2] D. Kreimer (1998) On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories. *Adv. Theor. Math. Phys.* 2, no. 2, pages 303–334.
- [1] A. Connes and D. Kreimer (2000) Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. I. The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem. *Comm. Math. Phys.* 210, no. 1, pages 249–273.

# The height of the Lyndon tree

*Philippe Chassaing*

Résumé par *Nicolas Broutin*

Séminaire de Combinatoire Philippe Flajolet  
*Institut Henri Poincaré, Séance du 31 Janvier 2013*

## Abstract

We consider the set  $\mathcal{L}_n$  of  $n$ -letter Lyndon words on the alphabet  $\{0, 1\}$ . For a random uniform element  $L_n$  of the set  $\mathcal{L}_n$ , the binary tree obtained by successive standard factorization of  $L_n$  and of the factors produced by these factorization is the Lyndon tree of  $L_n$ . We prove that the height  $H_n$  of the Lyndon tree of  $L_n$  satisfies  $\lim_n(H_n/\ln n) = \Delta$ , in which the constant  $\Delta$  is solution of an equation involving large deviation rate functions related to the asymptotics of Eulerian numbers ( $\Delta \approx 5.091\dots$ ). The convergence is the convergence in probability of random variables. Joint work with Lucas Mercier.

## 1 Introduction and main result

For a word  $w \in \{0, 1\}^* := \cup_{n \geq 0} \{0, 1\}^n$ , define its *necklace*  $\langle w \rangle$  to be the collection of its cyclic rotations. A word  $w$  is said to be *primitive* if the cardinal of its necklace  $\#\langle w \rangle$  equals its length  $|w|$ . A *Lyndon word* is a word  $w$  that is primitive and lexicographically the smallest in its necklace (the lexicographic order is written  $\prec$ ) [1, 4]. Lyndon words have a natural recursive structure since  $w \in \mathcal{A}^*$  is Lyndon if either  $|w| = 1$ , or  $|w| > 1$  and there exists two Lyndon words  $u$  and  $v$  such that  $w = uv$  and  $u \prec v$ . The decomposition that maximizes the length of the second factor ( $v$  above) is called the *standard factorization*. This decomposition defines a binary tree  $\mathfrak{L}(w)$  of a Lyndon word  $w$ , where the leaves are labelled with letters. Let  $\mathcal{L}_n$  denote the set of Lyndon words on length  $n$  on  $\{0, 1\}$ . The main question that is addressed concerns the asymptotics as  $n \rightarrow \infty$  for the height of the *Lyndon tree*  $\mathfrak{L}(L_n)$  when  $L_n$  is chosen uniformly at random in  $\mathcal{L}_n$ .

Let  $(A(n, k))_{n,k}$  denote the Eulerian numbers and define

$$\begin{aligned} \Xi(\theta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{A(n, k)}{n!} \right) \\ \Psi(\lambda, \mu, \nu) &= \ln \left( \frac{(1 + \mu)^{1 + \mu}}{(\mu^\mu)} \cdot \frac{(e\lambda \ln 2)^\nu}{(\nu^\nu 2^\lambda)} \right) + \Xi(\lambda - \mu) \\ \Delta &= \sup_{\lambda, \mu, \nu > 0} \frac{(1 + \mu + \nu) \ln 2 + \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\lambda \nu} = 5.092\dots \end{aligned}$$

Then, it is proved that

**Theorem 1.** *Let  $L_n$  be a uniformly random Lyndon word of length  $n$ , and let  $h(\mathfrak{L}(L_n))$  be the height of the corresponding Lyndon tree. Then*

$$\frac{h(\mathfrak{L}(L_n))}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Delta$$

*in probability.*

## 2 Approach and sketch of proof

One of the main difficulties is that the uniform distribution on the Lyndon words is not maintained by the recursive decomposition. The proof uses a number of approximations which reduce the problem to simpler versions of the tree.

A MORE CONVENIENT DISTRIBUTION ON  $\mathcal{L}_n$ . First, it is more convenient to work with Lyndon words which are not uniform in  $\mathcal{L}_n$ . For a word  $w \in \mathcal{A}^*$ , one can define its Lyndon word  $\ell(w)$  as follows: if  $w$  is not primitive, then  $\ell(w) = 0^{|w|-1}1$ , otherwise let  $\ell(w)$  be the lexicographically smallest word in the necklace  $\langle w \rangle$ . For a uniformly random word  $W_n$  on  $\mathcal{A}^*$ ,  $\ell(W_n)$  is not uniform in  $\mathcal{L}_n$ , but the total variation distance between the distribution of  $\ell(W_n)$  and the uniform distribution is  $O(2^{-n/2})$ . So in order to prove Theorem 1 it suffices to prove the corresponding result for  $\ell(W_n)$ . From now on,  $L_n$  denotes  $\ell(W_n)$ .

LYNDON WORDS OF RANDOM LENGTH. Since the standard factorization looks for Lyndon subwords, which must be the smallest in their necklace, the high level structure of the decomposition is given by the lengths and positions of the long runs of 0 (these are the only locations where a Lyndon word may start). In order to simplify the analysis which would involve ties between some of the longest runs, Lyndon words of random length are considered. Let  $W_\infty$  be the word consisting of a sequence of independent uniformly random letters. Let  $W^\ell$  denote the word formed by the letter 1, followed by the truncation of  $W_\infty$  at the position of the  $\ell$ -th zero in the first run of  $\ell$  consecutive zeros. Then  $W^\ell$  is primitive and one lets  $L^\ell$  denote the corresponding Lyndon word. Note that  $\mathbf{E}[|L^\ell|] \sim 2^{\ell+1}$ .

In  $L^\ell$ , the structure of the runs of zeros of decreasing lengths  $\ell - k - 1$  is that of a Galton–Watson process with geometric(1/2) offspring distribution [3]. One then shows that proving Theorem 1 reduces to showing the following corresponding result for the height of  $\mathfrak{L}(L^\ell)$ :

**Theorem 2.**

$$\frac{h(\mathfrak{L}(L^\ell))}{\ell} \xrightarrow[\ell \rightarrow \infty]{p} \Delta \ln 2.$$

DECOMPOSITION OF THE CONTRIBUTIONS TO THE HEIGHT. As long as the Lyndon words of the decomposition are sufficiently long, the long runs of zero are sufficiently sparse, and the corresponding factors sufficiently independent. This stops being true when the words get short, and one wants to decompose the tree into two regions depending on the length of the runs of zeros: one first focus on the top of the tree denoted  $\mathfrak{T}_\ell$ , where the runs all have length at least  $a_\ell := \lfloor \log_2 \ell \rfloor$ , and then studies the remaining part which consists in a forest of pendant shrubs.

THE TOP OF THE TREE AND A BINARY SEARCH TREE. Roughly, the distribution of the locations of the longest run of zero is uniformly distributed in the word, so that *when it does a proper cut* the standard factorization cuts the word at a uniformly random location. This is precisely the kind of split that happens for the random binary search tree, and one can approximate the shape of the top of the tree by that of a random binary search tree. However, there is a small effect due to the following phenomenon: when a given run is much longer than the next one, for some time the standard factorization simply extracts some of the initial zeros one after another until a truly new run can take over, and produce a new uniform cut of the word. (Each such zero expelled is referred to as a *needle*.) Note that this effect is not negligible since it happens at every macroscopic cut with a positive probability. For this reason, the structure of the top of the tree is that of a random binary search tree in which some edges have been split in order to take this into account the effect of needles on the depth of leaves.

The game is then to estimate the number of leaves which lie at every depth  $k$ , so that one can in turn estimate the height  $h_k$  of the highest shrub grafted from a leaf at this depth (the

highest of a bunch of independent random trees, so their number is crucial). The height of the tree is then  $\sup_k(k + h_k)$ . However, the phenomenon of needles discussed above makes the analysis much trickier, and especially the estimation of the number of leaves at a certain depth. By generalizing the analyses of the height of binary search trees using branching processes, the authors then obtain the first order asymptotics for the number of leaves of  $\mathfrak{T}_\ell$  of certain types which allows to control the contributions of the binary search tree part and the needles part. Without going in the details of the definition of the types the parameters of interest are the left depth (number of edges going left on the path to a node) the right depth, and the number of needles. These are (essentially) tracked using the parameters  $\ell = \lambda n$ ,  $\nu n$  for the right-depth,  $n$  for the left-depth, and  $\mu n$  for the needles. Then:

- the depth of a leaf of  $\mathfrak{T}_\ell$  of type  $(\nu n, n, \mu n) = (\nu, 1, \mu)\ell/\lambda$  is approximately  $(1 + \mu + \nu)\ell/\lambda$ ;
- there are about  $e^{\ell\Psi(\lambda, \mu, \nu)/\lambda}$  such leaves;
- the maximum height of a bunch of  $k$  independent shrubs is about  $\log_2 k$  (for one this is geometric).

So the maximum height of a leaf  $\mathfrak{L}(L^\ell)$  that goes through a leaf of the top  $\mathfrak{T}_\ell$  of a given type is

$$\frac{1 + \nu + \mu}{\lambda} \cdot \ell + \log_2 e^{\ell\Psi(\lambda, \mu, \nu)},$$

hence the highest leaf is about  $\Delta\ell$  high, with

$$\Delta = \sup_{\lambda, \mu, \nu > 0} \frac{(1 + \mu + \nu) \ln 2 + \Psi(\lambda, \mu, \nu)}{\lambda \ln 2}. \quad (1)$$

THE NUMBER OF LEAVES OF  $\mathfrak{T}_\ell$  OF A GIVEN TYPE. The last unknown in (1),  $\Psi$  is the large deviation a rate function: the sheer number of leaves at a given level allow some events to occur that would not occur if one would consider any the path to any single leaf. Estimating the number of leaves of a given type reduces precisely to obtain the exponential rate of decay of the corresponding events for a single leaf as in [2].

## References

- [1] F. Bassino, J. Clément, and C. Nicaud. The standard factorization of Lyndon words: an average point of view. *Discrete Math.*, 290(1):1–25, 2005.
- [2] J. D. Biggins. Chernoff’s theorem in the branching random walk. *J. Appl. Probability*, 14(3):630–636, 1977.
- [3] L. Devroye. A limit theory for random skip lists. *Ann. Appl. Probab.*, 2(3):597–609, 1992.
- [4] M. Lothaire. *Combinatorics on words*. Cambridge University Press, 1997.

# Des arbres dans les urnes de Pólya, et réciproquement.

BRIGITTE CHAUVIN

Résumé par CÉCILE MAILLER

*Séminaire de Combinatoire Philippe Flajolet  
Institut Henri Poincaré, Séance du 6 décembre 2012*

## Résumé

Dans cet exposé, Brigitte Chauvin introduit le modèle des urnes de Pólya. L'exposé est centré sur l'étude des urnes à deux couleurs, et plus précisément des "grandes" urnes. L'oratrice montre comment utiliser pleinement la structure arborescente de ces urnes pour mieux les étudier. Elle précise que ces travaux sont en collaboration avec Nicolas Pouyanne, Quansheng Liu et Cécile Mailler. Outre les références citées dans ce résumé, Brigitte Chauvin conseille la lecture des notes de cours suivantes, rédigées à l'occasion de l'école d'été ADAMA 2012 :

- cours de Nicolas Pouyanne : <http://pouyanne.perso.math.cnrs.fr/mahdia2012.pdf>
- cours de Brigitte Chauvin : <http://chauvin.perso.math.cnrs.fr/coursMahdiaBC.pdf>

## 1 Introduction

Une urne de Pólya est décrite par une composition initiale  $(\alpha, \beta)^t$ , et par une matrice de remplacement

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que l'urne contient initialement  $\alpha$  boules noires et  $\beta$  boules rouges ; et qu'à chaque étape, on tire uniformément au hasard une boule dans l'urne, on regarde sa couleur, on la remet dans l'urne, et on rajoute  $a$  boules noires et  $b$  boules rouges si elle était noire, ou  $c$  boules noires et  $d$  boules rouges si elle était rouge.

Les urnes étudiées dans cet exposé vérifient la propriété de balance  $a + b = c + d = S$ . La valeur  $S$ , appelée **balance** de l'urne est valeur propre de la matrice de remplacement. La seconde valeur propre est notée  $m$ . On note  $v_1$  le vecteur propre associé à  $S$  et  $v_2$  le vecteur propre associé à  $m$ . On supposera aussi  $a, b, c, d \geq 0$ , même si cette hypothèse peut être affaiblie : il suffit juste de s'assurer que la composition de l'urne restera toujours positive.

On note  $U(n) = (B_n, R_n)^t$  la composition de l'urne à l'étape  $n$ , c'est à dire le nombre de boules noires  $B_n$  et le nombre de boules rouges  $R_n$  qu'elle contient. Le but de l'étude d'une urne est de mieux comprendre ce vecteur composition au temps  $n$ . Le comportement d'une urne dépend en fait du rapport entre ses deux valeurs propres  $\sigma = \frac{m}{S}$ .

**Théorème 1.1.** (cf. Janson [5] ou Pouyanne [8] par exemple)

- Si  $\sigma < \frac{1}{2}$ , on dit que l'urne est **petite**, et on a le théorème limite suivant :

$$\frac{U(n) - nv_1}{\sqrt{n}} \rightarrow G$$

en loi, quand  $n$  tend vers l'infini, avec  $G$  un vecteur Gaussien centré, de variance connue et explicite.

- Si  $\sigma > \frac{1}{2}$ , on dit que l'urne est **grande**, et on a le théorème limite suivant :

$$U(n) = nv_1 + n^\sigma W_{\alpha, \beta} v_2 + o(n^\sigma) \tag{1}$$

en loi et dans tous les  $L^p$ ,  $p \geq 1$ , quand  $n$  tend vers l'infini.

On s'intéresse notamment dans cet exposé au cas des grandes urnes, et plus précisément à la variable aléatoire  $W_{\alpha,\beta}$  : quel est son support ? admet-elle une densité ? quels sont ses moments ?

Dans cet exposé, l'oratrice présente tout d'abord le cas de l'urne "originelle" de Pólya, qui est une urne à  $d \geq 1$  couleurs, urne qui sera utile dans la suite. Elle présente ensuite les différentes méthodes qui permettent d'étudier les urnes : la combinatoire analytique, les méthodes "arborescentes", et finalement le plongement en temps continu.

## 2 L'urne "originelle"

L'urne originelle est une urne à  $d \geq 2$  couleurs, représentée par la matrice de remplacement  $SI_d$  (ou  $I_d$  est la matrice identité en dimension  $d$ ), et de composition initiale  $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ . Cette urne vérifie le théorème limite suivant (Pólya [7] ou Gouet [4] ou Johnson et Kotz [6]) :

$$\frac{U(n)}{nS} \rightarrow V$$

presque sûrement et dans tous les  $L^p$ ,  $p \geq 1$ , quand  $n$  tend vers l'infini ; où  $V$  est un vecteur aléatoire de Dirichlet de paramètres  $(\frac{\alpha_1}{S}, \dots, \frac{\alpha_d}{S})$ .

## 3 L'étude par combinatoire analytique

Les urnes de Pólya ont été étudiées via des méthodes probabilistes, mais aussi, plus récemment par combinatoire analytique (voir les travaux de Flajolet [3] et [2]). Dans ce domaine, on représente la composition de l'urne par un mot  $B^p R^q$  si l'urne contient  $p$  boules rouges et  $q$  boules noires. Si l'on tire une boule noire, on "transforme" un  $B$  en  $B^{a+1} R^b$  et si l'on tire une boule rouge, on "transforme" un  $R$  en  $B^c R^{d+1}$ . La composition de l'urne au temps  $n$  est donnée par un mot  $W_n$ .

**Définition 3.1.** On appelle **histoire** de longueur  $n$  menant de  $\binom{u_0}{v_0}$  à  $\binom{u}{v}$  une suite de mots  $W_0 = B^{u_0} R^{v_0}, W_1, \dots, W_n$  produits via des transformations  $B \rightsquigarrow B^{a+1} R^b$  ou  $R \rightsquigarrow B^c R^{d+1}$ , avec  $W_n$  qui contient  $u$  symboles  $B$  et  $v$  symboles  $N$ . On note

$$H_n \left( \begin{array}{cc} u_0 & u \\ v_0 & v \end{array} \right)$$

le nombre de ces histoires.

Enfin, on introduit la fonction génératrice des ces histoires :

$$H \left( x, y, z \left| \begin{array}{c} u_0 \\ v_0 \end{array} \right. \right) = \sum_{u,v,n \in \mathbb{N}} H_n \left( \begin{array}{cc} u_0 & u \\ v_0 & v \end{array} \right) x^u y^v \frac{z^n}{n!}.$$

Cette représentation sous forme de mots mène au résultat suivant :

**Théorème 3.2** (Flajolet, Dumas, Puyhaubert, 2006). Soient  $X$  et  $Y$  les solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = X^{a+1} Y^b \\ Y' = X^c Y^{d+1} \\ X(0) = x, Y(0) = y \end{cases}$$

où  $x$  et  $y$  sont tels que  $xy \neq 0$ , alors, pour toute configuration initiale  $(\alpha, \beta)$

$$H \left( x, y, z \left| \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \right. \right) = X(z)^\alpha Y(z)^\beta.$$

## 4 Structure arborescente

### 4.1 Équations de dislocation

L'idée de cette sous partie est de se ramener de l'étude de  $W_{\alpha,\beta}$  (cf. Equation (1)) pour  $\alpha$  et  $\beta$  quelconques, à l'étude de deux variables aléatoires  $W_{10}$  et  $W_{01}$ .

Un processus d'urne de Pólya peut être vu comme une forêt. Chaque boule de la composition initiale de l'urne est vue comme la racine d'un arbre. Lorsqu'une boule est tirée au hasard, elle devient un nœud interne et donne naissance à  $S + 1$  fils. Par exemple, si la boule tirée au hasard était noire, elle donne naissance à  $a + 1$  fils noirs et  $b$  fils rouges. Et la nouvelle composition de l'urne est donnée par les couleurs des feuilles de la forêt. A tout instant, cette forêt est constituée de  $\alpha + \beta$  sous-arbres associés aux boules initiales.



FIGURE 1 – Structure arborescente de l'urne  $a = 2, b = 1, c = 3$  et  $d = 0$  de composition initiale  $\alpha = 1$  et  $\beta = 2$ .

Si l'on note  $D_k(n)$  le nombre de feuilles à l'étape  $n$  dans l'arbre associé à la  $k^{\text{ème}}$  boule initiale, comme à chaque tirage, on ajoute  $S$  boules dans l'arbre considéré,  $\frac{D_k(n)-1}{S}$  est le nombre de tirages qui ont été effectués dans le sous-arbre  $k$  jusqu'à l'étape  $n$ . Ainsi,

$$U_{\alpha,\beta}(n) = \sum_{p=1}^{\alpha+1} U_{10}^{(p)} \left( \frac{D_p(n)-1}{S} \right) + \sum_{p=\alpha+2}^{\alpha+\beta} U_{01}^{(p)} \left( \frac{D_p(n)-1}{S} \right).$$

En remarquant que  $(D_1(n), \dots, D_{\alpha+\beta}(n))$  est la composition d'une urne de Pólya originelle à l'étape  $n$ , on obtient, à la limite,

$$W_{\alpha,\beta} \stackrel{(loi)}{=} \sum_{p=1}^{\alpha} (V_p)^\sigma W_{10}^{(p)} + \sum_{p=1}^{\alpha+\beta} (V_p)^\sigma W_{01}^{(p)}$$

où  $(V_1, \dots, V_{\alpha+\beta})$  est un vecteur aléatoire de loi de Dirichlet de paramètres  $(\frac{1}{S}, \dots, \frac{1}{S})$ .

### 4.2 Équations de points fixe

Si l'urne est composée initialement d'une seule boule noire, la première étape du processus est déterministe, et la composition de l'urne à l'étape 1 est  $a + 1$  boules noires et  $b$  boules rouges. En considérant ces  $S + 1$  boules comme les racines d'une forêt, et en raisonnant de même que précédemment, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} W_{10} \stackrel{(loi)}{=} \sum_{p=1}^{a+1} V_p^\sigma W_{10}^{(p)} + \sum_{p=a+2}^{S+1} V_p^\sigma W_{01}^{(p)} \\ W_{01} \stackrel{(loi)}{=} \sum_{p=1}^c V_p^\sigma W_{10}^{(p)} + \sum_{p=c+1}^{S+1} V_p^\sigma W_{01}^{(p)} \end{cases}.$$

Il est possible de démontrer par méthode de contraction que ce système admet, à moyenne fixée, une unique solution de carré intégrable. Ce système permet ensuite de démontrer l'existence d'une densité pour  $W_{01}$  et  $W_{10}$ , et estimer les moments de ces lois. Ce dernier objectif peut aussi être complété par une autre approche : celle du plongement en temps continu.

## 5 Plongement en temps continu

### 5.1 Définition et connexion

Les urnes de Pólya peuvent être “plongées en temps continu”. Le processus d’urne en temps continu est le suivant. A l’instant initial, il y a  $\alpha$  boules noires et  $\beta$  boules rouges dans l’urne. Chacune de ces boules est équipée d’une horloge qui sonnera au bout d’un temps aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1, et ce indépendamment des autres. Lorsque l’horloge d’une boule sonne, elle se divise en  $a+1$  boules noires et  $b$  boules rouges si elle était noire, ou en  $c$  boules noires et  $d+1$  boules rouges si elle était rouge. On note  $U_{\alpha,\beta}^{CT}(t)$  la composition de l’urne au temps  $t$ .

Si l’on note  $\tau_n$  la date à laquelle une  $n^{\text{ème}}$  horloge sonne, on sait que

$$(U^{DT}(n))_{n \geq 0} = (U^{CT}(\tau_n))_{n \geq 0},$$

et de plus,  $(\tau_n)_{n \geq 0}$  est indépendant de  $(U^{CT}(\tau_n))_{n \geq 0}$ .

On a aussi un théorème limite en temps continu :

$$U_{\alpha,\beta}^{CT}(t) = n\xi v_1(1 + o(1)) + n^\sigma W_{\alpha,\beta}^{CT} v_2(1 + o(1))$$

presque sûrement et dans tous les  $L^p$ ,  $p \geq 1$ . La variable aléatoire  $\xi$  est connue : elle suit une loi Gamma $\left(\frac{\alpha+\beta}{S}\right)$ .

Les lois de  $W_{\alpha,\beta}$  et  $W_{\alpha,\beta}^{CT}$  sont reliées par une **martingale connexion** :

$$W_{\alpha,\beta}^{CT} \stackrel{(loi)}{=} \xi^\sigma \cdot W_{\alpha,\beta},$$

avec  $\xi$  de loi Gamma $\left(\frac{\alpha+\beta}{S}\right)$ , et  $\xi$  et  $W_{\alpha,\beta}$  indépendantes.

En conséquence, si nous avons des informations sur  $W^{CT}$ , nous en déduisons des informations sur  $W$ , et réciproquement. Il faut donc choisir le plus “facile à étudier”.

### 5.2 Équations de dislocation et de point fixe

Tout comme dans le cas discret, on peut établir des équations de dislocation pour se ramener à l’étude de  $W_{10}^{CT}$  et  $W_{01}^{CT}$  :

$$W_{\alpha,\beta}^{CT} \stackrel{(loi)}{=} V^\sigma \left( \sum_{p=1}^{\alpha} X_p^{CT} + \sum_{p=\alpha+1}^{\alpha+\beta} Y_p^{CT} \right)$$

avec  $X_p^{CT}$  des copies indépendantes de  $X = W_{10}^{CT}$  et  $Y_p^{CT}$  des copies indépendantes de  $Y = W_{01}^{CT}$ , et  $V = U^S$  en loi, avec  $U$  uniforme sur  $[0, 1]$ .

De plus, nous avons aussi un système de point fixe donné par les équations :

$$\begin{cases} X \stackrel{(loi)}{=} V^\sigma \left( \sum_{k=1}^{a+1} X_p + \sum_{k=a+2}^{S+1} Y_p \right) \\ Y \stackrel{(loi)}{=} V^\sigma \left( \sum_{k=1}^c X_p + \sum_{k=c+1}^{S+1} Y_p \right) \end{cases} \quad (2)$$

où  $V = U^S$  en loi, avec  $U$  uniforme sur  $[0, 1]$ . Tout comme dans le cas discret, on peut montrer que, à moyenne fixée, la solution du système de point fixe ci-dessus est unique. Ce système est plus simple qu’en cas discret, et permet en particulier de démontrer, par récurrence, que

**Théorème 5.1.** *Il existe une constante strictement positive  $C_2$  telle que pour toute constante  $C_1$ , pour tout  $p \geq 1$ ,*

$$C_1^p \leq \frac{\mathbb{E}|X|^p}{p!} \leq C_2^p (\log p)^p.$$

En particulier, la fonction génératrice des moments a un rayon de convergence nul. L’oratrice insiste sur le fait que l’ordre de grandeur de ces moments est encore inconnu.

### 5.3 Étude des transformées de Fourier

Si l'on pose

$$\begin{cases} \mathcal{F}(x) = \mathbb{E}e^{ixX} \\ \mathcal{G}(x) = \mathbb{E}e^{ixY} \end{cases}$$

En utilisant le système (2), on peut montrer que  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  vérifient le système d'équations différentielles suivant (cf. [1]) :

$$\begin{cases} \mathcal{F}(x) + mx\mathcal{F}'(x) = \mathcal{F}(x)^{a+1}\mathcal{G}^b(x) \\ \mathcal{G}(x) + mx\mathcal{G}'(x) = \mathcal{F}(x)^c\mathcal{G}^{d+1}(x) \end{cases},$$

qui, via un changement de variable qui permet de le résoudre et de trouver les expressions explicites de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ , est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} f' = f^{a+1}g^b \\ g' = f^c g^{d+1} \end{cases}.$$

Ce dernier système est le même que celui obtenu dans un cadre a priori totalement différent dans le Théorème 3.2. Pourquoi le système différentiel vérifié par les transformées de Fourier des deux variables limites en temps continu est égal à celui des fonctions génératrices des histoires dans le cadre d'une étude par combinatoire analytique ? Ce lien, s'il existe, reste encore mystérieux...

## Références

- [1] B. Chauvin, N. Pouyanne, and R. Sahnoun. Limit distributions for large Pólya urns. *Annals Applied Probab.*, 21(1) :1–32, 2011.
- [2] P. Flajolet, P. Dumas, and V. Puyhaubert. Some exactly solvable models of urn process theory. *DMTCS Proceedings*, AG :59–118, 2006.
- [3] P. Flajolet, J. Gabarró, and H. Pekari. Analytic urns. *The Annals of Probability*, 33(3) :1200–1233, 2005.
- [4] R. Gouet. Strong convergence of proportions in a multicolor Pólya urn. *J. Appl. Probab.*, 34 :426–435, 1997.
- [5] S. Janson. Functional limit theorem for multitype branching processes and generalized Pólya urns. *Stochastic Processes and their Applications*, 110 :177–245, 2004.
- [6] N. Johnson and S. Kotz. *Urn Models and Their Application*. Wiley, 1977.
- [7] G. Pólya. Sur quelques points de la théorie des probabilités. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 1 :117–161, 1931.
- [8] N. Pouyanne. Classification of large Pólya-Eggenberger urns with regard to their asymptotics. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, AD, pages 275–286, 2005.

# Développements récents dans le modèle combinatoire du tas de sable sur un graphe

Robert CORI

Résumé par Yvan LE BORGNE

Séminaire de Combinatoire Énumérative et Analytique  
*Institut Henri Poincaré*  
Année 2010 – 2011

## Résumé

Dans le modèle combinatoire du tas de sable on affecte à chaque sommet d'un graphe un entier positif ou nul censé représenter un nombre de grains situés sur le sommet en question. Une règle d'éboulement permet de faire passer des grains d'un sommet à ses voisins. Deux généralisations du modèle avec l'affectation d'entiers pouvant être négatifs ont été considérées par différents auteurs. La première peut être interprétée par des particules et anti-particules qui se détruisent mutuellement lors d'un éboulement. La seconde comme des soldes de comptes en banque qui peuvent être redistribués aux voisins ou bien faire l'objet d'un versement collectif. Il sera question dans cet exposé de résultats récents obtenus dans le cadre de ces deux modèles et en particulier d'un article de M. Baker et S. Norine dans *Advances in Mathematics* datant de 2007 et intitulé *Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph* qui a particulièrement intéressé l'orateur.

## Introduction

Le modèle du tas de sable [4, 2, 3] est un modèle discret de diffusion. La géométrie de ce modèle est définie par un graphe  $G = (V, E)$  d'ensembles de  $m$  arêtes  $E$  et de  $n$  sommets  $V$ . On suppose le graphe  $G$  connexe, ses arêtes non-orientées, sans boucle mais les arêtes multiples sont possibles. On note par  $e_{i,j}$  le nombre d'arêtes entre les sommets  $i$  et  $j$  et  $d_i = \sum_{j \in V} e_{i,j}$  le degré de  $i$ . Une configuration  $u = (u_i)_{i \in V}$  de ce modèle est une distribution de grains indifférenciés sur les sommets de ce graphe : dans la configuration  $u$ , il y a  $u_i \in \mathbb{N}$  grains sur le sommet  $i \in V$ . On distingue un sommet  $p \in V$  nommé le puits que l'on destine à collecter les grains sortant du système. La dynamique de la diffusion est la suivante : dans une configuration  $u$  un sommet  $i \neq p$  contenant au moins autant de grains que son nombre  $d_i$  d'arêtes incidentes est dit *instable* et il a alors la possibilité de *s'ébouler* c'est à dire de transmettre un grain par chacune de ses  $d_i$  arêtes incidentes aux extrémités opposées conduisant à la configuration  $v$  telle que  $v_i = u_i - d_i$  et pour tout autre sommet  $j$ ,  $v_j = u_j + e_{i,j}$ . Cet éboulement possible se note  $u \rightarrow^{(i)} v$ .

## 1 Généralisation algébrique du modèle

Au prix de l'oubli de la distinction du sommet  $p$ , du test de l'instabilité des sommets éboulés, de la positivité du nombre de grains et de la possibilité supplémentaire d'inverser les éboulements, ce modèle admet la représentation algébrique suivante. Soit  $(x_i)_{i \in V}$  un ensemble de variables formelles représentant les sommets de  $V$ . Une configuration  $u$  est représentée par une combinaison linéaire à coefficients entiers  $\sum_{i \in V} u_i x_i$  en ces variables. Le degré  $\deg(u)$  de la configuration  $u$

est  $\sum_{i \in V} u_i$ . La configuration  $v$  obtenue par l'éboulement du sommet  $i$  dans la configuration  $u$  est alors représentée par la combinaison linéaire  $\sum_{i \in V} u_i x_i - \Delta^{(i)}$  où  $\Delta^{(i)} = d_i x_i - \sum_{j \in V} e_{i,j} x_j$  est qualifiée de configuration *laplacienne* en  $i$ . Deux configurations  $u$  et  $v$  sont dites *équivalentes* si leurs combinaisons linéaires ne diffèrent que par une combinaison linéaire des configurations laplaciennes  $(\Delta^{(i)})_{i \in V}$  ce qui se note aussi,  $u - v \in \langle (\Delta^{(i)})_{i \in V} \rangle_{\mathbb{Z}}$  avec quelques abus qui se répèterons, ou bien  $u \equiv v$ . On remarque que ces configurations laplaciennes ne sont pas linéairement libres puisque  $\sum_{i \in V} \Delta^{(i)} = 0$ , qui peut se lire de manière prémonitoire comme "l'éboulement unique de chacun des sommets ne modifie pas la configuration initiale puisqu'un grain transite dans chaque sens pour chaque arête". La matrice indexée par les sommets de  $V$  dont la ligne  $i$  est  $\Delta^{(i)}$  est la matrice laplacienne du graphe  $G$ . La relation précédente est la seule entre les  $(\Delta^{(i)})_{i \in V}$  et le nombre de classes d'équivalences de degré fixé est donné par n'importe quel mineur de la matrice laplacienne obtenu par la suppression de la ligne et la colonne indexé par un des sommets que l'on pourrait nommer  $p$ . Ce nombre est aussi le nombre d'arbres recouvrants du graphe  $G$ .

## 2 Survol du modèle du tas de sable classique

Avec les notations de sa généralisation algébrique, le modèle du tas de sable de l'introduction se définit en indiquant que les éboulements possibles sont  $u \xrightarrow{(i)} u - \Delta^{(i)}$  si  $u_i \geq d_i$  et  $i \neq p$ . Une configuration est  $p$ -stable si  $0 \leq u_i < d_i$ , pour tout  $i \neq p$  et donc aucun éboulement n'est possible. L'existence du puits  $p$  garanti qu'à partir d'une configuration quelconque  $u$ , le processus consistant à ébouler un sommet instable tant qu'il en existe se termine sur une configuration  $p$ -stable  $v$  qui de plus ne dépend pas de l'ordre des éboulements. Cela se note  $u \xrightarrow{*} v$ . Les configurations  $p$ -stables  $u$  pour lesquelles il existe une configuration  $v$  non vide de grain telle que  $u + v \xrightarrow{*} u$  sont qualifiés de  $p$ -récurrentes<sup>1</sup>. En fait, Dhar a montré qu'une configuration  $p$ -stable est  $p$ -récurrente si et seulement si  $u - \Delta^{(p)} \xrightarrow{*} u$  ce qui se teste en éboulant la configuration  $u - \Delta^{(p)}$ . Il existe une unique configuration  $p$ -récurrente dans chaque classe d'équivalence donnant un premier élément canonique dans chaque classe.

La configuration  $p$ -récurrente  $u$  d'une classe d'équivalence minimise  $u_p$  parmi les configurations stables de cette classe<sup>2</sup>. En effet, à partir d'une configuration stable  $v$ , on considère la configuration stable  $w$  atteinte après un éboulement du puits :  $v - \Delta^{(p)} \xrightarrow{*} w$ . Comme  $v$  est  $p$ -stable tout les sommets se sont éboulés au plus une fois. Si tout les voisins du puits se sont éboulés alors  $w_p = v_p$ , sinon  $w_p < v_p$ . On en déduit la décroissance du nombre de grain sur les configurations stables définie par les éboulements des configurations  $(v - j\Delta^{(p)})_{j \geq 0}$  sachant que la limite, après éboulement, de ces configurations, est  $u$  la configuration  $p$ -récurrente.

A toute configuration  $p$ -stable  $u$ , l'application  $\Phi_p$  associe une configuration  $p$ -stable  $u'$  définie par  $u'_i = d_i - 1 - u_i$  pour  $i \neq p$  et  $u'_p = d_p - 1 - u_p + 2 \deg(u) + n - 2m$  qui peut s'écrire  $u' = \delta - u$  cela définissant implicitement  $\delta$  qui est par construction de degré  $2 \deg(u)$ .  $\Phi_p$  est donc une involution sur l'ensemble des fonctions  $p$ -stables préservant le degré. Dans ce résumé, on définit une configuration de  $G_p$ -parking comme l'image par  $\Phi_p$  d'une configuration  $p$ -récurrente. L'application  $\Phi_p$  est compatible avec l'équivalence puisque  $u \equiv v$  si et seulement si  $\Phi_p(u) \equiv \Phi_p(v)$ . On en déduit que chaque classe d'équivalence contient une unique configuration  $G_p$ -parking  $v$ . Comme de plus le degré  $\deg(v)$  est constant dans une classe d'équivalence, on remarque que cette configuration  $G_p$ -parking  $v$  maximise  $v_p$  parmi les configurations stables de cette classe. Un algorithme de calcul de la configuration  $G_p$ -parking de la classe d'une configuration  $u$  consiste à calculer à partir de  $u$  par des éboulements sommets, y compris du puits  $p$  sans condition, une

1. Les autres configurations  $p$ -stable sont qualifiés de transitoire, cette terminologie provenant d'une chaîne de Markov sur les configurations  $p$ -stables dont les transitions sont l'ajout d'un grain sur un sommet choisis aléatoirement selon la distribution uniforme suivi des éboulements nécessaires.

2. Mais ce n'est a priori pas nécessairement la seule à atteindre le minimum

configuration  $p$ -stable  $u'$ , puis appliquer la recherche de la configuration  $p$ -récurrente  $u''$  de la classe de  $\Phi_p(u')$  et d'en déduire que  $\Phi_p(u'')$  est la configuration de  $G_p$ -parking de la classe de  $u$ .

### 3 Un modèle du tas de sable à grains bicolores.

Dans cette partie uniquement, on considère des configurations formées de deux types de grains (bleu et rouge). La dynamique du modèle applique en priorité la règle selon laquelle deux grains de couleur différentes sur le même sommet se détruisent mutuellement. Ensuite, la dynamique autorise l'éboulement du sommet  $i$  ne contenant des grains que d'une seule couleur si leur nombre est supérieur ou égal au degré  $d_i$  du sommet.

En interprétant dans la généralisation algébrique  $u_i$  grains rouges, respectivement bleus, sur le sommet  $i$  par  $u_i x_i$ , respectivement  $-u_i x_i$ , on constate que les éboulements possibles sont  $u \xrightarrow{(i)} u - \Delta^{(i)}$  si  $u_i \geq d_i$  et  $u \xrightarrow{(i)} u + \Delta^{(i)}$  si  $u_i \leq -d_i$ .

Dans ce cas, l'ordre des sommets dans le processus d'éboulement peut avoir une influence sur la configuration stable finalement obtenue comme le montre le résultat suivant. Pour le graphe formé d'un chemin de  $4k$  sommets, on considère la configuration initiale formée de  $k$  grains rouges et  $k$  grains bleus placés sur les deux sommets voisins du milieu du chemin. Le nombre de configurations stables différentes obtenues en variant les ordres des sommets éboulés est  $\lfloor \sqrt{k} \rfloor$ .

### 4 Un théorème à la Riemann-Roch pour la généralisation algébrique.

Dans la généralisation algébrique, tous les éboulements sont possibles :  $u \xrightarrow{(i)} u + \Delta^{(i)}$  et  $u \xrightarrow{(i)} u - \Delta^{(i)}$  sans contrainte sur  $u$ . Une configuration  $u$  est *positive* si pour tout sommet  $i \in V$ ,  $u_i \geq 0$ . Une configuration est *effective* si elle est équivalente à une configuration positive.

Pour une configuration  $u$  quelconque et pour un sommet arbitraire  $p \in V$  on considère la configuration de  $G_p$ -parking  $v$  de la classe d'équivalence de  $u$ . La configuration  $u$  est effective si et seulement si  $v_p \geq 0$ . En effet, si  $v_p \geq 0$  alors  $v$  est positive donc  $u$  est effective. Si  $u$  est effective, soit  $w$  une configuration positive de la classe d'équivalence de  $u$ . L'éboulement des sommets instables différents de  $p$  de  $w$  conduit à une configuration  $p$ -stable  $v'$  telle que  $v'_p \geq 0$  puisque  $w_p \geq 0$  et le puits  $p$  ne s'éboule pas. Comme la configuration de  $G_p$ -parking maximise le nombre de grains sur  $p$  parmi les configurations  $p$ -stables de la classe dont  $v'$  on en déduit que  $v_p \geq v'_p \geq 0$ .

Pour une permutation  $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n$  des sommets on note  $d_i^-$  le nombre d'arêtes reliant le sommet  $i$  à des sommets le précédant dans  $\alpha$  et  $\gamma^\alpha$  la configuration définie par  $\gamma_i^\alpha = d_i^- - 1$  pour tout  $i \in V$ . Le degré de toute configuration  $\gamma^\alpha$  est  $m - n$ . Pour toute configuration  $u$  une et une seule des deux assertions suivantes est satisfaite : soit  $u$  est effective soit il existe une permutation  $\alpha$  telle que  $\gamma^\alpha - u$  est effective. En effet, pour une configuration  $u$  et un sommet  $p \in V$ , on considère la configuration de  $G_p$ -parking  $u'$  de sa classe d'équivalence. Par construction  $u'' = \Phi_p(u')$  est une configuration  $p$ -récurrente donc d'après le test de Dhar il existe au moins un ordre  $\alpha$  d'éboulements des sommets débutant par le puits  $p$  dans les éboulements  $u'' \xrightarrow{(p)} u'' - \Delta^{(p)} \xrightarrow{(*)} u''$ . On remarque que pour  $i \neq p$ , le nombre de grains sur le sommet  $i$  juste avant son éboulement est  $u''_i + (\gamma_i^\alpha + 1)$  puisque toutes les arêtes menant à un sommet précédent ont apporté un grain, or à ce moment le sommet  $i$  est instable donc  $u''_i + \gamma_i^\alpha + 1 \geq d_i$  et par définition de  $\Phi_p$ ,  $\gamma_i^\alpha - u'_i \geq 0$ . Donc comme  $\gamma^\alpha$  est  $p$ -stable puisque pour tout  $i \neq p$ ,  $0 \leq \gamma_i^\alpha \leq d_i - 1$ , la positivité de  $\gamma_i^\alpha - u'_i \geq 0$  permet de conclure que  $\gamma^\alpha - u'$  est  $p$ -stable. De plus, la configuration  $\gamma'^\alpha = \Phi_p(\gamma^\alpha)$  est  $p$ -récurrente puisque lors de l'éboulement des sommets selon l'ordre  $\alpha$ , le nombre de grains sur le sommet  $i \neq p$  est  $d_i - 1 - \gamma^{(i)} + (\gamma^{(i)} + 1) = d_i$

donc  $i$  est instable et l'ordre  $\alpha$  décrit le test de Dhar. Donc  $\gamma^\alpha$  est  $G_p$ -parking et  $\gamma^\alpha - u'$  est une configuration  $p$ -stable contenant en chaque sommet  $i \neq p$  moins de grains donc  $\gamma^\alpha - u'$  est également  $G_p$ -parking. Le nombre de grains sur le puits dans cette configuration équivalente à  $\gamma^\alpha - u$  est  $-1 - u'_p$  donc ces configurations sont effectives si et seulement si  $u'_p \leq -1$  ce qui signifie exactement que  $u'$  et donc  $u$  ne sont pas effectives.

Si  $\deg(u) > m - n$ , alors pour toute permutation  $\alpha$ ,  $\deg(\gamma^\alpha - u) = m - n - \deg(u) < 0$  donc  $\gamma^\alpha - u$  ne peut-être être effective et  $u$  est effective. Si  $\deg(u) = m - n$  et que  $u$  n'est pas effective alors  $u$  est qualifié de *critique* car elle maximise le degré pour les configurations non-effectives. Pour toute configuration critique il existe  $\alpha$  tel que  $\gamma^\alpha - u$  de degré 0 soit effective donc est équivalente à la configuration nulle qui est la seule positive de degré 0 et donc  $u$  est équivalente à cette configuration  $\gamma^\alpha$ .

Le rang  $\rho(u)$  d'une configuration  $u$  est  $\deg(f) - 1$  où  $f$  est une configuration positive de degré minimale telle que  $u - f$  ne soit pas effective. Si  $u$  n'est pas effective  $\rho(u) = -1$  puisque la configuration nulle convient pour  $f$ .<sup>3</sup> Si  $f$  est de degré  $\deg(u) + 1 \geq 0$  alors  $\deg(u - f) = -1$  donc  $\rho(u) \leq \deg(u)$ . Le rang est suradditif en ce sens que pour deux configurations effectives  $u$  et  $v$ ,  $\rho(u + v) \leq \rho(u) + \rho(v)$ . Soit  $K$  la configuration définie par  $K_i = d_i - 2$  pour tout sommet  $i \in V$ . Un analogue en théorie des graphes du théorème de Riemann-Roch est la relation satisfaite par toute configuration  $u$  :

$$\rho(u) - \rho(K - u) = \deg(u) + n - m.$$

Ce résultat a été prouvé par Baker et Norine en 2007 [1]. En posant  $u = K$  dans cette relation on obtient que  $\rho(K) = m - n$ . De plus, si  $u$  est critique alors  $\rho(u) = -1$ ,  $\deg(u) = m - n$  donc  $\rho(K - u) = -1$  comme de plus  $\deg(K - u) = m - n$  on en déduit que  $K - u$  est critique.

## Références

- [1] M. Baker and S. Norine (2007). Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph. *Advances in Mathematics* 215(2007), pages 766–788.
- [2] N. Biggs (1999). Chip-firing and the critical group of a graph. *Journal of Algebraic Combinatorics* 9(1) (1999), pages 25–45.
- [3] R. Cori and D. Rossin (2000). On the sandpile group of dual graphs. *European Journal of Combinatorics*, 21 : 447–459, 2000
- [4] D. Dhar (2006). Theoretical studies of self-organized criticality. *Physica A* 369 (2006) 29.

---

3. Si  $u$  est effective on note  $u'$  la configuration de  $G_p$ -parking équivalente alors  $u'_p \geq \rho(u)$  puisqu'il suffit d'enlever  $u'_p + 1$  grains du sommet  $p$  de  $u'$  pour obtenir une configuration  $G_p$ -parking avec  $-1$  grains sur son puits et donc non-effective.

# L'analyse de la hauteur des arbres

*Philippe Flajolet*

Résumé par *Dominique Gouyou-Beauchamps*

Séminaire de combinatoire énumérative et analytique de l'IHP -  
2010-11

## Résumé

Quantifier la distribution de la hauteur d'un arbre est un problème de base partagé par les probabilistes et les combinatoriciens. D'un point de vue probabiliste, d'intéressantes connexions ont été établies avec le mouvement Brownien, les processus de branchement, et le modèle dit "de l'arbre continu" (CRT). L'objectif de cet exposé est une présentation synthétique de méthodes asymptotiques fondées sur l'analyse complexe et la combinatoire analytique : ces méthodes analytiques ont en effet permis d'obtenir une caractérisation très complète de la hauteur dans les principales familles d'arbres combinatoires (arbres de Catalan, binaires ou généraux ; arbres d'Otter). Lois limites locales ou centrales, convergence de moments et bornes de grandes déviations en résultent. On croisera au passage l'ensemble de Mandelbrot, les transformations de fonctions elliptiques thêta, ainsi que la théorie élémentaire de l'itération analytique. [Présentation fondée notamment sur des travaux communs avec Broutin, Gao, Odlyzko, et Richmond.]

## 1 Introduction

La question qu'on se pose est : pour différents modèles d'arbres combinatoires comme les arbres généraux ou arbres de Catalan, les arbres binaires, les variétés simples d'arbres et les arbres non planaires, quelle est la hauteur d'un arbre aléatoire ? On peut aussi se poser cette question pour le diamètre ou la largeur. Parmi les résultats présentés ici, beaucoup se trouvent dans [8].

## 2 Les arbres “généraux” de Catalan

### 2.1 Arbres généraux et nombres de Catalan

Les arbres généraux sont planaires et tous les degrés sont permis. Leur famille  $\mathcal{G}$  est décrite par l'équation symbolique :  $\mathcal{G} = \mathcal{Z} \times \text{SEQ}(\mathcal{G})$ , c'est à dire qu'un arbre général est formé par une racine  $\mathcal{Z}$  à laquelle est attachée une suite d'arbres généraux  $\text{SEQ}(\mathcal{G})$ . Sa fonction génératrice  $G(z) := \sum G_n z^n$ , où la variable  $z$  compte les sommets, vérifie donc l'équation  $G(z) = \frac{z}{1-G(z)}$ , ce qui donne la formule  $G(z) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4z})$ . Les coefficients de  $G(z)$  sont les nombres de Catalan  $G_{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  qui, asymptotiquement, sont égaux à  $G_{n+1} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$

### 2.2 De Bruijn, Knuth et Rice 1972

Soit  $\mathcal{G}^{[h]}$  la famille des arbres généraux de hauteur au plus  $h$ . Elle est décrite par les équations symboliques :  $\mathcal{G}^{[h+1]} = \mathcal{Z} \times \text{SEQ}(\mathcal{G}^{[h]})$  et  $\mathcal{G}^{[0]} = \mathcal{Z}$ . Sa fonction génératrice  $G^{[h]}(z)$ , vérifie donc les équations  $G^{[h+1]}(z) = \frac{z}{1-G^{[h]}(z)}$  et  $G^{[0]}(z) = z$ , ce qui donne la fraction continue tronquée à la profondeur  $h$  :

$$G^{[h]}(z) = \left. \begin{array}{c} \frac{z}{1 - \frac{z}{1 - \frac{z}{\ddots \\ 1 - z}}} \end{array} \right\} h \text{ étages} \quad (1)$$

La série  $G^{[h]}(z)$  peut s'exprimer à l'aide des polynômes de Fibonacci  $F_h(z)$ , qui vérifient la récurrence linéaire  $F_{h+1} = F_h - z F_{h-1}$ , sous la forme  $G^{[h]}(z) = z \frac{F_{h+1}}{F_{h+2}}$ . L'équation caractéristique associée à la récurrence est  $\rho^2 = \rho - z$ , équation qui a deux solutions  $\rho, \bar{\rho} = \frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{1-4z})$ . Ainsi  $F_h = \frac{\rho^h - \bar{\rho}^h}{\rho - \bar{\rho}}$ . On peut tout exprimer en fonction de la seule racine  $\rho \equiv G(z)$ , ce qui permet d'appliquer la formule d'inversion de Lagrange :

**Théorème 1 ([6])**

$$G^{[h-1]} = z \frac{\rho^h - \bar{\rho}^h}{\rho^{h+1} - \bar{\rho}^{h+1}} ; \quad G_{n+1} - G_{n+1}^{[h-1]} = \sum_{j \geq 1} \Delta^2 \binom{2n}{n - jh}$$

où l'opérateur  $\Delta$  est défini par  $\Delta^2 f(x) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)$ .

Ainsi le nombre d'arbres généraux de taille  $n+1$  et de hauteur bornée peut s'exprimer comme la somme d'un échantillonnage de la ligne  $2n$  du triangle de Pascal.

Si on connaît l'adage disant que “toutes les récurrences linéaires du second ordre sont de même nature et sont équivalentes à un produit de sinus et de cosinus”, on peut établir que :

$$F_h \left( \frac{1}{4 \cos^2 \theta} \right) = \frac{1}{(2 \cos \theta)^{h-1}} \frac{\sin h\theta}{\sin \theta}.$$

Et nous pouvons alors constater que les polynômes de Fibonacci sont fortement liés à ceux de Chebyshev, que les racines de  $F_h(z) = 0$  sont  $z = \frac{1}{4 \cos^2 \theta}$  où  $\sin h\theta = 0$  et donc que nous pouvons obtenir le développement en fractions rationnelles de  $G^{[h]}(z)$  afin d'obtenir une forme trigonométrique du nombre d'arbres de hauteur bornée :

**Théorème 2 ([6])**

$$G_{n+1}^{[h-2]} = \frac{4^n}{h} \sum_{1 \leq j \leq h/2} \sin^2 \frac{j\pi}{h} \cos^{2n} \frac{j\pi}{h}.$$

On peut noter que le théorème 1 était connu par Lord Kelvin (1824-1907) et par Delannoy (1833-1915) [2] et le théorème 2 par Lagrange [14].

### 2.3 Lois explicites et limites, centrales ou locales

Il est facile d'obtenir les distributions limites en utilisant soit la forme binomiale de la série génératrice soit la forme trigonométrique puisque, si  $h = x\sqrt{n}$ , d'une part l'approximation de Stirling implique que  $\binom{2n}{n-kh} / \binom{2n}{n} \sim e^{-k^2x^2}$  et d'autre part  $\cos^{2n} \frac{j\pi}{h} \sim e^{-j^2\pi^2/x^2}$  :

**Théorème 3 (Loi de la limite locale [8])**

$$\mathbb{P}_{\mathcal{G}_{n+1}}(H = \lfloor x\sqrt{n} \rfloor) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \Theta'(x); \quad \Theta(x) \simeq \begin{cases} \sum e^{-k^2x^2} \dots & \text{forme binomiale} \\ \sum e^{-k^2\pi^2/x^2} \dots & \text{forme trigonométrique} \end{cases}$$

**Théorème 4 (Théorème central limite [8])**

$$\mathbb{P}_{\mathcal{G}_{n+1}}(H \leq \lfloor x\sqrt{n} \rfloor) \rightarrow \Theta(x) \quad \text{où} \quad \Theta(x) := \sum_{j \geq 1} e^{-j^2x^2} (4j^2x^2 - 2).$$

Pour obtenir les moments de la distribution des hauteurs, on constate que l'espérance  $\mathbb{E}_{\mathcal{G}_{n+1}}(H)$  est de la forme  $\sum_m d(m)e^{-m^2x^2}$  où  $d(m)$  est le nombre de diviseurs de  $m$ . On a alors besoin de la quantité  $S_r(t) = \sum_h h^r \Theta(ht)$  quand  $t = \frac{1}{\sqrt{n}}$  tend vers 0. Or  $S_r(t)$  est une somme de Riemann qu'on peut approximer par une intégrale qui est une transformée de Mellin déguisée à laquelle on peut appliquer un traitement de sommes harmoniques :

**Théorème 5 (Moments de la hauteur [6])**

$$\mathbb{E}_{\mathcal{G}_{n+1}}(H) = \sqrt{\pi n} - \frac{3}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_{\mathcal{G}_{n+1}}(H^r) = r(r-1)\Gamma(r/2)\zeta(r)n^{r/2}.$$

**2.4 Transformations Thêta, fractions continues**

En comparant les formes binomiales et trigonométriques du nombre d’arbres de hauteur bornée, on obtient une identité des fonctions Thêta bien connue en théorie des fonctions elliptiques :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 x^2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 \pi^2 / x^2}.$$

Notons qu’on peut faire du “Reverse-engineering” à partir de la hauteur des arbres de Catalan. On part de la fonction  $f(z) = (1+z)^{2n}$ . La multisection de la série  $f(z)$  donne  $\sum_h f_{n,h} = \frac{1}{h} \sum_{\omega^{h=1}} f(\omega)$ . On peut alors faire une analyse asymptotique, quand  $h = x\sqrt{n}$ , des deux formes équivalentes de la fonction (binomiale et trigonométrique). Pour les connexions avec les fonctions Thêta, le mouvement Brownien et l’équation fonctionnelle de la fonction zeta de Riemann, on pourra se reporter à Pólya [17] et Biane, Pitman et Yor [3].

Si on revient à la fraction continue (1), on peut obtenir la fonction génératrice des arbres où  $u_j$  marque les sommets au niveau  $j$  comme 
$$\frac{z u_0}{1 - \frac{z u_1}{1 - \frac{z u_2}{1 - \dots}}}$$

, ou ce qui revient au même :

**Théorème 6 (Chemins de Dyck et niveau des descentes [9][21][13][18])**

*La fonction génératrice des chemins de Dyck où  $u_j$  marque les descentes du niveau  $j$  au niveau  $j - 1$  est donnée par*

$$\frac{1}{1 - \frac{z u_1}{1 - \frac{z u_2}{1 - \frac{z u_3}{1 - \dots}}}}$$

**3 Arbres binaires**

Les arbres binaires de Catalan sont planaires et seuls les degrés 0 et 2 sont permis. Leur famille  $\mathcal{B}$  est décrite par l’équation symbolique :  $\mathcal{B} =$

$\mathcal{Z} + \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ . Sa fonction génératrice  $B(z) := \sum B_n z^n$ , où la variable  $z$  compte les sommets, vérifie donc l'équation  $B(z) = z + B^2(z)$  et elle est donnée par la formule  $B(z) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4z})$ .

La famille  $\mathcal{B}^{[h]}$  des arbres binaires de hauteur inférieure ou égale à  $h$  a pour série génératrice  $B^{[h]}(z)$ , qui vérifie :

$$B^{[0]}(z) = z; \quad B^{[h+1]}(z) = z + \left(B^{[h]}(z)\right)^2.$$

Nous avons des polynômes qui sont définis par une récurrence quadratique. Notons que le degré de ces polynômes double à chaque itération ( $\deg(B^{[h]} = 2^h$ ).

Par rapport aux arbres généraux de Catalan, la famille  $\mathcal{B}$  a aussi une série génératrice algébrique, mais sa série génératrice des arbres de hauteur bornée est un polynôme donné de façon implicite et dont le degré est une exponentielle. On ne connaît pas de forme close pour les coefficients de cette dernière et leur asymptotique s'obtient par analyse de singularité.

Sur l'axe des réels, on a :

- pour  $z$  entre 0 et  $1/4$ ,  $B(z) - B^{[h]}(z)$  est dominé par  $\sum_{n>h+1} B_n z^n$ , ce qui implique une convergence géométrique.
- pour  $z > 1/4$ , on a une explosion doublement exponentielle.
- à la singularité  $z = 1/4$ , on ne peut rien dire.

### 3.1 Iteration de fonctions génératrices à un point fixe

Dans le plan complexe, on constate que l'on a la récurrence  $u_0 = z$  et  $u_{h+1} = z + u_h^2$ , qui n'est autre que celle qui a rendu les travaux de Mandelbrot célèbre et qui détermine de belles figures fractales.

On itère donc la fonction  $f(y) = z + y^2$ ; le point fixe est  $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4z})$  et le multiplicateur  $f'(\xi) = 2\xi = 1 - \sqrt{1 - 4z}$ . En prouvant la convergence de  $B(z)$  sur le cercle  $|z| = \frac{1}{4}$  et par des arguments de continuité, on obtient :

**Lemme 1** *La convergence locale est garantie à l'intérieur de la cardioïde  $|1 - \sqrt{1 - 4z}| < 1$ . La convergence partant de  $u_0 = z$  est garantie autour de tous les points  $|z| = \frac{1}{4}$  si  $z \neq \frac{1}{4}$  et elle est géométrique.*

### 3.2 Analyse de singularité

Notons  $e_h := B(z) - B^{[h]}(z)$  la série génératrice des arbres de hauteur supérieure à  $h$ . Pour avoir l'asymptotique des coefficients  $e_{n,h}$  de  $e_h$ , on utilise la formule des coefficients de Cauchy :

$$e_{n,h} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} e_h(z) \frac{dz}{z^{n+1}},$$

avec un contour  $\gamma$  bien choisi. Dans le cas des arbres d'Otter (arbres binaires non planaires), Broutin et Flajolet [4] [5] ont calculé des estimations de  $e_h(z)$  pour les valeurs de  $z$  à la fois à l'intérieur et à l'extérieur du disque de convergence  $|z| < \rho$  en utilisant un "tube" autour du cercle  $|z| = \rho$  et un "sablier" ancré à  $\rho$ .

Dans le cas des arbres binaires planaires, on constate qu'à la singularité  $z = 1/4$ ,  $e_{h+1} = e_h(1 - e_h)$ . Un argument de convexité implique une convergence vers 0, mais ne dit rien sur sa vitesse puisque  $e_{h+1} \sim e_h$  !

L'astuce (suggérée par De Bruijn) est de prendre les inverses :

$$\frac{1}{e_{h+1}} = \frac{1}{e_h} \cdot \frac{1}{1 - e_h} = \frac{1}{e_h} \cdot (1 + e_h + e_h^2 + \dots) = \frac{1}{e_h} + 1 + e_h + e_h^2 + \dots .$$

On peut alors échanger les bornes inférieures et les bornes supérieures :

$$\frac{1}{e_h} \sim h + \log h + C(e_0) + \dots \quad \text{et} \quad e_h \sim \frac{1}{h} - \frac{\log h}{h^2} - \frac{C}{h^2} + \dots .$$

Il est possible d'établir une relation avec les processus de branchement. Si on considère un événement  $\mathcal{E}$  qui a pour fonction génératrice  $E(z)$ , la probabilité de  $E$  pour le processus de branchement critique est  $2E(1/4)$ . On peut remarquer que le processus de branchement critique est équivalent au modèle de Boltzmann critique et que

$$\mathbb{P}^{B.P.}(\text{un arbre } \tau) = \frac{1}{2^{2|\tau|+1}} .$$

**Corollaire 1 (Processus de branchement *bin*aire critique)**

$$\mathbb{P}(\text{Hauteur} \geq h) \sim \frac{2}{h} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\text{Hauteur} = h) \sim \frac{2}{h^2} .$$

Si maintenant on se place près de la singularité  $1/4$ , dans le sablier, les "écarts"  $e_h = y - u_h = \{\text{les arbres de hauteur } > h\}$  vérifient :

$$\left. \begin{array}{l} y = z + y^2 \\ u_{h+1} = z + u_h^2 \end{array} \right\} \implies e_{h+1} = 2y \left( 1 - \frac{e_h}{2y} \right) e_h .$$

En normalisant avec  $e_h - (2y)^h f_h$ , on obtient la récurrence :

$$f_{h+1} = f_h(1 - (2y)^{h+1} f_h) .$$

De nouveau en prenant les inverses, on a :

$$\frac{1}{f_{h+1}} = \frac{1}{f_h} + (2y)^{h+1} + (2y)^{2h+2} f_h + \dots$$

**Lemme 2 (Approximation principale : hauteur  $> h$ )**

$$B - B^{[h]} \approx \epsilon \frac{(1 - \epsilon)^h}{1 - (1 - \epsilon)^h} \quad \text{avec} \quad \epsilon := \sqrt{1 - 4z}.$$

On peut résumer cette partie en disant que du point de vue de la hauteur, les arbres binaires se comportent comme les arbres généraux de Catalan (convergence géométrique pour  $z \neq 1/4$ , convergence harmonique pour  $z = 1/4$ ). Ces résultats sont encore valables dans un sablier avec des termes d'erreur uniformes.

### 3.3 Limites locales et centrales

On note  $\Theta(x)$  la fonction  $\sum_{j \geq 1} e^{-j^2 x^2} (4j^2 x^2 - 2)$ . On utilise la formule de Cauchy pour les coefficients et un contour de Hankel près de la singularité dans un sablier.

**Théorème 7 (Loi de la limite locale [10])**

$$\mathbb{P}_{\mathcal{B}_n} (H = \lfloor 2x\sqrt{n} \rfloor) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \Theta'(x).$$

**Théorème 8 (Théorème central limite [10])**

$$\mathbb{P}_{\mathcal{B}_n} (H \leq \lfloor 2x\sqrt{n} \rfloor) \rightarrow \Theta(x).$$

On peut donc dire approximativement que  $H[\mathcal{B}_n] \approx 2H[\mathcal{G}_n]$ .

## 4 Autres sujets

### 4.1 Les variétés simples d'arbres

Pour les variétés simples d'arbres, on n'autorise qu'un ensemble fini de sommets. Il y a universalité de la singularité en racine carrée. Il faut utiliser une analyse de perturbation de singularité. On peut se référer au papier de Flajolet, Gao, Odlyzko et Richmond [10]. Pour les arbres de Cayley, le papier de référence est celui de Renyi et Szekeres [19].

### 4.2 Les arbres non-planaires binaires

Il s'agit des arbres de Otter [16]. Broutin et Flajolet [4] [5] ont récemment étudié la distribution de leur hauteur.

### 4.3 Vitesse de convergence, larges déviations

Les méthodes précédentes donnent une vitesse de convergence en  $\frac{\log n}{\sqrt{n}}$ . Par exemple, la hauteur moyenne des arbres binaires est (cf. un papier en préparation de Broutin et Flajolet) :

$$\mathbb{E}_{\mathcal{B}_n}[H] \sim 2\sqrt{\pi n} + c \log n + c' + \frac{c'' \log n}{\sqrt{n}} + \dots$$

La probabilité d'une petite ou d'une grande hauteur est exponentiellement faible :

**Théorème 9 (Flajolet, Gao, Odlyzko et Richmond [10])** *Il existe  $\delta > 0$  tels que le nombre d'arbres binaires de taille  $n$  et de hauteur  $h$ , pour  $1 \leq h \leq n$  vérifie :*

$$B_n - B_n^{[h]} = O\left(B_n n^{3/2} e^{-h^2/(4n)}\right) \quad \text{et} \quad B_n^{[h]} = O\left(B_n n^{3/2} e^{-\delta n/h^2}\right).$$

**Théorème 10 (Flajolet, Gao, Odlyzko et Richmond [10])**

$$B_n^{[h]} - B_n^{[h-1]} \sim \frac{4\epsilon^2 A(\epsilon)}{(1-\epsilon^2)\sqrt{\pi(1+\epsilon)}n} \left((1-\epsilon)^{1-\epsilon}(1+\epsilon)^{1+\epsilon}\right)^{-h/2\epsilon} 4^n$$

*uniformément pour tout  $h$  tel que  $h/n = 2\epsilon/(1+\epsilon)$  avec  $\epsilon \in [\delta', 1-\delta']$  où  $\delta'$  est une constante positive qui peut être arbitrairement petite et  $A(\epsilon)$  est une fonction continue et positive pour  $\epsilon \in [\delta', 1-\delta']$ .*

### 4.4 Structures équilibrées

**Théorème 11 (Flajolet et Odlyzko [11])** *Les coefficients des polynômes  $p_h(z)$  qui vérifient  $p_{h+1}(z) = P(z, p_h(z))$  pour un polynôme  $P$  non-linéaire à coefficients positifs suivent localement une loi Gaussienne.*

$p_h(1)$  croît en double exponentielle et vérifie la formule exacte  $p_h(1) = \lfloor \alpha^{2^h} \rfloor$ . On utilise alors une méthode de perturbation et une méthode de col.

**Application :** si on regarde la distribution des tailles des arbres binaires de hauteur  $h$  ( $p_{h+1}(z) = z + p_h^2(z)$  et  $p_0(z) = z$ ) et si on regarde la distribution des tailles des arbres équilibrés binaires-ternaires de hauteur  $h$  ( $p_{h+1}(z) = p_h^2(z) + p_h^3(z)$  et  $p_0(z) = z$ ), on constate qu'elles suivent la même loi, c'est-à-dire celle des polynômes vérifiant  $p_{h+1}(z) = p_h^2(z)$  (i.e.  $p_h(z) = (1+z)^{2^h}$ ).

## 4.5 Diamètre et largeur

L'étude du diamètre des arbres de Cayley non-enracinés a été faite par Szekeres en 1982 [20]. Celle du diamètre des arbres binaires non-planaires non-enracinés (arbres de Otter) a été faite par Broutin et Flajolet en 2010 [5].

La distribution fait intervenir une fonction Thêta. Le rapport entre le nombre d'arbres non-planaires à un seul centre et le nombre d'arbres à deux centres est en accord avec le même rapport pour le modèle CRT d'Aldous [1] ("continuum random tree") dans lequel les arbres sont planaires.

**Théorème 12** *Le rapport l'espérance du diamètre et l'espérance de la hauteur des arbres de Otter vérifie :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_n(D)}{\mathbb{E}_n(H)} = \frac{4}{3}.$$

Ce rapport est identique à celui trouvé par Szekeres [20] pour les arbres étiquetés. Aldous [1] a montré de façon semi-heuristique qu'il est universel pour toutes les familles d'arbres qui ont un ordre sur les fils d'un sommet. On peut aussi consulter [12] et [15] pour l'extension du modèle CRT d'Aldous aux arbres non-planaires.

On calcule la largeur en étudiant la hauteur du mouvement Brownien (cf. le travail de Chassaing, Market et Yor [7] qui fait autorité). Pour les arbres de Cayley et les variétés simples d'arbres :

$$\mathbb{E}_n(W) = \sqrt{\frac{\pi n}{2}} + O\left(n^{1/4} \sqrt{\log n}\right) \quad , \quad \mathbb{P}_n(\sqrt{2}W \leq x) \rightarrow 1 - \Theta(x).$$

Pour atteindre la largeur par une méthode d'analyse, on pense naturellement à la méthode des matrices de transfert.

## 5 Message subliminal ou conclusion

Asymptotiquement, la seule différence entre les diverses formules de hauteur (voire largeur) est, in fine, une constante de normalisation calculable à partir de la définition des arbres.

## Références

- [1] D. Aldous. The continuum random tree. II. An overview. In Stochastic analysis (Durham 1990), volume 167 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991, pp.23-70.

- [2] J.-M. Autebert, A.-M. Décaillot and S.R. Schwer. H.-A. Delannoy et les œuvres posthumes d'Edouard Lucas. *Gazette des Mathématiciens* **95** (janvier 2003).
- [3] P. Biane and J. Pitman and M. Yor. Probability laws related to the Jacobi theta and Riemann zeta functions, and Brownian excursions. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **38** (2001), 435-465.
- [4] N. Broutin and Ph. Flajolet. The height of random binary unlabelled trees. In *Fifth Colloquium on Mathematics and Computer Science : Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities*, DMTCS Proceedings, vol. AI, Blaubeuren, 2008, pp. 121-134, <http://www.dmtcs.org/dmtcs-ojs/index.php/proceedings/article/viewArticle/dmAI0106>.
- [5] N. Broutin and Ph. Flajolet. The distribution of height and diameter in random non-plane binary trees. arXiv :1009.1515, 2010.
- [6] N.G. De Bruijn, D.E. Knuth and S.O. Rice. The average height of planted plane trees. In *Graph Theory and Computing* (R.C. Read, éd.), Academic Press, 1972, pp. 15-22.
- [7] P. Chassaing, J.-F. Marckert and M. Yor. The height and width of simple trees. In *Mathematics and Computer Science : Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities*, Versailles, (D. Gardy and A. Molkadem, eds), Birkhauser, 2000, pp. 17-30.
- [8] Ph. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press, 2009.
- [9] Ph. Flajolet. Combinatorial Aspects of Continued Fractions. *Discrete Mathematics* **32** 1980, 125-161. Reprinted in the 35th Special Anniversary Issue of *Discrete Mathematics*, Volume 306, Issue 10–11, Pages 992-1021 (2006).
- [10] Ph. Flajolet, Z. Gao, A. Odlyzko and B. Richmond. The distribution of heights of binary trees and other simple trees. *Combinatorics, Probability, and Computing* **2** (1993), 145-156.
- [11] Ph. Flajolet and A. Odlyzko. Limit distributions for coefficients of iterates of polynomials with applications to combinatorial enumeration. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **96** (1984), 237-253.
- [12] B. Haas and G. Miermont. Scaling limits of Markov branching trees with applications to Galton-Watson and random unordered trees. arXiv :1003.3632v2, 2010.
- [13] D.M. Jackson. Some results on "Product-weighted led codes". *J. Combinatorial Theory (Ser. A)* **25** (1978), 181-187.

- [14] J.L. Lagrange. Recherches sur les suites récurrentes dont les termes varient de plusieurs manières, ou sur l'Intégration des équations linéaires aux différences finies et partielles; et sur l'usage de ces équations dans la théorie des hasards, in Œuvres de Lagrange (également in Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin, année 1775). Vol. 4, pp. 149-251, Paris, 1869.
- [15] J.-F. Marckert and G. Miermont. The CRT is the scaling limit of unordered binary trees. *Random Structure and Algorithms* **96** (2010). To appear. arXiv :0902.4570.
- [16] R. Otter. The number of trees. *Ann. of Math. (2)* **49** (1948), 583-599.
- [17] G. Pólya. Elementarer Beweis einer Thetaformel. *Sitzungsberichten der Preuß. Akad. des Wissenschaften*, **3** (1927), 157-161.
- [18] R.C. Read. The chord intersection problem. In *Second International Conference on Combinatorial Mathematics*, *Annals of New-York Ac. of Sc.*, vol. 319, 1979, pp. 444-454.
- [19] A. Rényi and G. Szekeres. On the height of trees. *Journal of the Australian Mathematical Society* **7** (1967), 497-507.
- [20] G. Szekeres. Distribution of labelled trees by diameter. In *Combinatorial Mathematics X*, Proc. 10th Australian Conference on Combinatorial Mathematics, Springer Lecture notes in Mathematics, 1982, pp. 392-397.
- [21] J. Touchard. Sur un problème de configurations et sur les fractions continues. *Canad. J. Math* **4** (1952), 2-25.

# Bijections autour des bois de Schnyder

ÉRIC FUSY

Résumé par JÉRÉMIE BOUTTIER

*Séminaire de Combinatoire Philippe Flajolet  
Institut Henri Poincaré, Séance du 31 janvier 2013*

## Résumé

Les bois de Schnyder sont des structures combinatoires sur les triangulations planaires (aussi graphes planaires maximaux), introduites à l'origine par Schnyder pour fournir un nouveau critère de planarité. Ces structures se sont avérées également très pertinentes d'un point de vue algorithmique et elles bénéficient d'une riche combinatoire bijective que nous survolerons ici, ainsi que des généralisations à d'autres classes de graphes.

## 1 Structures de Schnyder sur les triangulations simples

### 1.1 Définitions

Considérons une *triangulation simple*  $T$ , c'est-à-dire une triangulation plane sans arêtes multiples et sans boucles, où une face est distinguée (*face externe*). Schnyder [1] a introduit plusieurs «structures» sur  $T$ , que nous allons définir. Ces structures sont toutes équivalentes (i.e. en bijection) entre elles.

Pour alléger la rédaction, il est utile d'introduire la notion de bon tricoloriage. Un *tricoloriage* d'un ensemble est une application qui associe à chaque élément une couleur parmi trois, mettons rouge, bleu et vert. Très souvent, on pourra naturellement énumérer les éléments dans le sens des aiguilles d'une montre. Dans ce contexte, un *bon tricoloriage* est un tricoloriage dans lequel tous les éléments rouges apparaissent consécutivement, suivis des bleus, et enfin des verts. On dira que l'ensemble est *bien tricolorié*.

**Étiquetages de Schnyder** Un *étiquetage de Schnyder* est un tricoloriage des coins internes de  $T$  satisfaisant les contraintes suivantes :

- l'ensemble des trois coins de chaque face interne est bien tricolorié,
- l'ensemble des coins incidents à un sommet interne est bien tricolorié,
- tous les coins incidents à un même sommet externe sont de même couleur (ce qui, par les précédentes contraintes, induit un bon tricoloriage des trois sommets externes).

**Bois de Schnyder** Un *bois de Schnyder* est la donnée d'un tricoloriage et d'une orientation des arêtes internes de  $T$ , telle que :

- chaque sommet interne possède trois arêtes sortantes, bien tricoloriées,
- les arêtes entrantes en chaque sommet interne sont bien tricoloriées, de plus les arêtes entrantes rouges apparaissent précisément entre la sortante bleue et la sortante verte, et il en est de même en permutant cycliquement les trois couleurs,

- toutes les arêtes internes incidentes à un même sommet externe sont de même couleur, et orientées vers celui-ci (à nouveau ceci induit un bon tricolourage des trois sommets externes).

L'ensemble des arêtes rouges forme un arbre couvrant tous les sommets de  $T$ , sauf les sommets externes bleu et vert, et dont toutes les arêtes sont orientées en direction du sommet externe rouge. Bien sûr il en va de même pour les arêtes bleues et les arêtes vertes.

**3-orientations** Voici une définition qui mettra moins à l'épreuve votre vision des couleurs. Une *3-orientation* est une orientation des arêtes internes de  $T$  telle que :

- chaque sommet interne a degré sortant 3,
- chaque sommet externe a degré sortant 0.

## 1.2 Quelques résultats antérieurs

**Applications des bois de Schnyder [1, 2]** Un bois de Schnyder permet d'associer canoniquement à tout sommet  $A$  de  $T$  trois coordonnées entières de la manière suivante : dans chacun des trois arbres rouge, bleu et vert, considérons l'unique chemin orienté menant de  $A$  à la racine. Ces trois chemins partitionnent l'ensemble des faces de  $T$  en trois «aires». On note alors  $n_1$  le nombre de triangles dans l'aire «rouge» (délimitée par les chemins bleu et vert), et on définit de même  $n_2$  et  $n_3$  en permutant circulairement les couleurs.

Clairement  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_3$  sont des entiers positifs tels que  $n_1 + n_2 + n_3$  est égal au nombre total de faces de  $T$ . Ceci donne un algorithme de tracé en lignes droites,  $(n_1, n_2, n_3)$  donnant les coordonnées de  $A$  dans le simplexe de dimension 2. De plus, cette construction est liée à un critère de planarité [1].

**Comptage bijectif des triangulations munies d'un bois de Schnyder** On revisite ici une bijection due à Bonichon [3] dans le contexte «dual». Considérons une triangulation  $T$  munie d'une structure de Schnyder (qu'on verra tour à tour comme un bois ou un étiquetage). On introduit alors le dual  $\tilde{T}$  de  $T$ , qui est un graphe 3-régulier, et on colorie en orange les arêtes de  $\tilde{T}$  duales aux arêtes rouges de  $T$ . Il y a une bijection canonique entre les coins de  $T$  et ceux de  $\tilde{T}$ , et en «transférant» les couleurs de l'étiquetage de Schnyder on obtient un tricolourage des coins de  $\tilde{T}$ . On coupe ensuite les arêtes oranges de  $\tilde{T}$  en leur milieu, ce qui donne un arbre binaire muni d'un parenthésage des feuilles. Un tel objet possède une représentation «rectilinéaire», codée par deux mots binaires, qu'on peut *in fine* mettre en bijection avec une paire ordonnée de chemins de Dyck.

En appliquant le lemme de Lindström-Gessel-Viennot, on obtient en corollaire de cette bijection une expression pour le nombre  $s_n$  de triangulations à  $n + 3$  sommets internes munies d'un bois de Schnyder, à savoir

$$s_n = \text{Cat}_n \text{Cat}_{n+2} - (\text{Cat}_{n+1})^2 = \frac{6(2n)!(2n+2)!}{n!(n+1)!(n+2)!(n+3)!}. \quad (1)$$

## 1.3 Comptage bijectif des triangulations simples

**Treillis des structures de Schnyder** L'ensemble des structures de Schnyder sur  $T$  est en fait un treillis distributif [4, 5]. La relation de couverture est donnée par les «flips», et se formule de manière simple dans le langage des 3-orientations : étant donné une 3-orientation, s'il existe un 3-cycle orienté dans le sens direct, alors on obtient une 3-orientation couvrant la précédente en retournant les arêtes de ce cycle. (La version bois est obtenue de manière immédiate en «recoloriant».) La 3-orientation minimale est celle qui ne contient aucun cycle indirect.

**Orientations et mobiles** Considérons l'ensemble  $\mathcal{O}$  des cartes planes (avec une face externe distinguée) munies d'une orientation des arêtes internes, telles que :

- il n'existe aucun cycle indirect,
- de tout sommet interne on peut accéder au cycle externe par un chemin orienté,
- le cycle externe est un «puits» (i.e. un sommet externe n'a aucune arête sortante).

Considérons par ailleurs l'ensemble  $\mathcal{M}$  des *mobiles*, i.e. des arbres plans bipartis (i.e. dont les sommets sont bicoloriés en noir et blanc) d'où pointent des flèches (appelées *bourgeons*) en chaque sommet noir. Il existe une *bijection-maîtresse* [6] entre  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{M}$ , construite à l'aide des règles «locales», et induisant les correspondances suivantes :

- une face interne de degré  $k$  dans  $O \in \mathcal{O}$  correspond à un sommet noir de degré  $k$  dans  $M \in \mathcal{M}$ ,
- un sommet interne de degré sortant  $\ell$  dans  $O \in \mathcal{O}$  correspond à un sommet blanc de degré  $\ell$  dans  $M \in \mathcal{M}$ .

**Spécialisation au cas des triangulations simples** En considérant la 3-orientation minimale, on obtient une bijection entre l'ensemble des triangulations simples et une sous-famille  $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}$  où toutes les faces ont degré 3, et tous les sommets internes ont degré sortant 3. En spécialisant la bijection-maîtresse, on obtient une bijection entre  $\mathcal{F}$  et l'ensemble des mobiles dont tous les sommets ont degré 3. On retrouve ainsi une bijection connue [7]. Mentionnons qu'une autre bijection avait été précédemment obtenue par Poulalhon et Schaeffer [8].

**Application au comptage** Appliquons la bijection au cas d'une triangulation ayant une face interne marqué. On obtient un mobile ayant un sommet noir distingué, et en coupant à ce sommet on obtient trois arbres enracinés qui sont soit restreints à des flèches, soit en bijection avec arbres quaternaires. Notons  $t_n$  le nombre de triangulations simples enracinées à  $n + 3$  sommets, et introduisons la série génératrice  $F(x) = \sum_n t_n x^{2n+1}$ . On déduit immédiatement que

$$F'(x) = (1 + u)^3 \quad \text{où} \quad u = x^2(1 + u)^4. \quad (2)$$

Par inversion de Lagrange, on retrouve le résultat de Tutte [9]

$$t_n = \frac{2(4n + 1)!}{(n + 1)!(3n + 2)!}. \quad (3)$$

**Une formulation coloriée de la bijection** Prenons l'étiquetage de Schnyder associé à une 3-orientation. On remplace alors chaque triangle interne par une «étoile» (en ajoutant un sommet noir au milieu), chaque coin donnant une arête. En transférant les couleurs, on obtient une carte bipartie telle que les sommets noirs ont degré trois, et les arêtes incidentes à un sommet (noir ou blanc) sont bien tricoloriées.

Pour chaque sommet blanc interne, on coupe alors toutes les arêtes incidentes, sauf la dernière de chaque couleur. On efface ensuite les sommets externes et leurs demi-arêtes incidentes. On obtient alors un mobile, dont il est facile de se convaincre qu'il coïncide avec celui obtenu par la bijection-maîtresse.

## 2 Extensions

Nous allons étendre l'approche bijective précédente à deux classes de cartes généralisant les triangulations simples :

1. les cartes 3-connexes, pour lesquelles nous allons étendre la formulation «coloriée» de la bijection, et aboutir à une généralisation de (3),

2. les  $d$ -angulations de maille  $d$ , pour lesquelles nous allons étendre la formulation «orientée» de la bijection, et aboutir à une généralisation de (2).

## 2.1 Cartes 3-connexes

Rappelons qu'un graphe est dit 3-connexe s'il faut supprimer au moins 3 sommets pour le déconnecter. Une triangulation est 3-connexe si et seulement si elle est simple. Considérons à présent une carte plane où trois sommets externes sont distingués et bien tricoloriés : la carte est dite *quasi 3-connexe* si en complétant la carte par un triangle reliant les trois sommets marqués (tracé dans la face externe), la carte résultante est 3-connexe. On note  $\mathcal{Q}_{i,j}$  l'ensemble des cartes quasi 3-connexes à  $i + 3$  sommets et  $j$  faces internes. Remarquons que les triangulations simples sont retrouvées en prenant la plus grande valeur possible de  $j$  à  $i$  fixé ( $j = 2i + 1$ ).

**Dualité** La famille des cartes quasi 3-connexes est stable par dualité (modulo un traitement légèrement différent de la face externe), ce qui implique que  $\mathcal{Q}_{i,j}$  est en bijection avec  $\mathcal{Q}_{j,i}$ . Cette dualité se voit aisément en introduisant la *cartes des coins* : étant donné une carte quasi 3-connexe  $G$ , on remplace chaque face par une étoile, comme précédemment (il faut traiter la face externe comme étant divisée en trois), et on aboutit à une carte  $C$  qui est une dissection d'un hexagone par des faces quadrangulaires. La 3-connexité de  $G$  équivaut à demander que  $C$  soit «irréductible», i.e. que les seuls 4-cycles y soient les contours des faces. La carte duale  $G^*$  possède la même carte des coins  $C$ .

**Étiquetages de Schnyder** Cette notion peut être étendue au cas des cartes 3-connexes [10, 11] : il s'agit d'un tricoloriage des coins tel quel :

- l'ensemble des coins de chaque face interne est bien tricolorié,
- l'ensemble des coins d'un sommet non marqué est bien tricolorié,
- tous les coins incidents à un même sommet marqué sont de la même couleur que celui-ci,
- l'ensemble des coins externes incidents à des sommets non marqués est bien tricolorié, de plus les coins rouges apparaissent précisément entre les sommets marqués bleu et vert, et de même en permutant cycliquement les couleurs.

Mentionnons qu'il existe d'autres incarnations de ces objets sous forme de bois de Schnyder et de 3-orientations.

Étant donné une carte quasi 3-connexe  $G$ , ses étiquetages de Schnyder sont en bijection avec ceux de  $G^*$ , comme on peut voir par un «transfert» des couleurs analogue à celui de la section 1.2. Cette dualité se voit à nouveau de manière agréable sur la carte des coins  $C$ , puisqu'un étiquetage de Schnyder de  $G$  équivaut à un tricoloriage des arêtes internes de  $C$  tel qu'autour de chaque sommet interne, les arêtes sont bien tricoloriées. À nouveau, l'ensemble des étiquetages de Schnyder de  $G$  forme un treillis distributif [11] (la notion de «flip» étendant celle du cas des triangulations).

**Comptage bijectif des cartes quasi 3-connexes** On munit à présent  $G$  de son étiquetage minimal, et on considère la carte des coins  $C$  tricoloriée associée. Pour chaque sommet interne de  $C$ , on coupe toutes les arêtes incidentes, sauf la dernière de chaque couleur : l'objet résultat est alors un arbre binaire non enraciné [7], dont les sommets sont bicoloriés et les arêtes tricoloriées. Si  $G$  comporte  $i + 3$  sommets et  $j$  faces internes, alors l'arbre comporte  $i$  sommets noirs et  $j$  sommets blancs. Ceci conduit à une formule de comptage pour les cartes quasi 3-connexes avec une face interne marquée : cela revient à compter des triples d'arbres binaires enracinés, en contrôlant séparément les nombres de sommets noirs et blanc (la racine étant noire). Si on pose

$q_{i,j} = |\mathcal{Q}_{i,j}|$ , et  $F(x_\circ, x_\bullet) = \sum_{i,j} q_{i,j} x_\circ^i x_\bullet^j$ , alors il suit de la bijection que

$$\frac{\partial}{\partial x_\bullet} F(x_\circ, x_\bullet) = (1 + U)^3 \quad \text{où} \quad \begin{cases} U = x_\circ(1 + V)^2 \\ V = x_\bullet(1 + U)^2 \end{cases}, \quad (4)$$

et par inversion de Lagrange on retrouve le résultat de Mullin-Schellenberg [12]

$$q_{i,j} = \frac{3}{(2i+1)(2j+1)} \binom{2i+1}{j} \binom{2j+1}{i}. \quad (5)$$

On retrouve (3) dans le cas «extrémal»  $j = 2i + 1$ .

## 2.2 $d$ -angulations de maille $d$

Rappelons que la *maille* d'un graphe est la longueur minimale d'un cycle. Une carte est simple si et seulement si sa maille est supérieure ou égale à 3. Si la maille est égale à  $d$ , alors toutes les faces ont degré au moins  $d$  (en particulier une triangulation est simple si et seulement si elle a maille 3).

Fixons un entier  $d \geq 3$ , on considère alors l'ensemble des  $d$ -angulations (i.e. des cartes dont toutes les faces ont degré  $d$ ) planes de maille  $d$ . Par la relation d'Euler, le rapport du nombre d'arêtes internes au nombre de sommets internes est  $d/(d-2)$ . Étant donné une  $d$ -angulation  $G$ , on considère la carte  $(d-2)G$  dans laquelle chaque arête de  $G$  est remplacée par  $d-2$  copies «parallèles». Alors  $G$  est de maille  $d$  si et seulement si  $(d-2)G$  possède une orientation dans laquelle tout sommet interne a degré sortant  $d$  [6]. Une telle  $d/(d-2)$ -orientation peut également être vue une application car à chaque demi-arête associe un «flux sortant», de telle sorte que le flux total sur chaque arête interne est  $d-2$  et le flux total sur chaque sommet interne est  $d$ . On peut également donner des formulations en termes d'étiquetages ou bois de Schnyder.

L'ensemble des  $d/(d-2)$ -orientations d'une  $d$ -angulation fixée peut être muni d'une structure de treillis, un flip consistant à incrémenter le flux dans le sens indirect. L'orientation minimale est alors celle ne contenant aucun circuit indirect. On peut alors appliquer la bijection-maîtresse (dans une formulation faisant intervenir les flux) pour transformer la carte en un mobile «pondéré» d'un certain type. Cette bijection se traduit directement en termes de séries génératrices : on est amené à introduire une famille  $(L_0, L_1, \dots, L_d)$  de séries comptant les mobiles en fonction du poids (flux) de leur arête-racine, spécifiées par

$$\begin{cases} L_0 = x(1 + L_{d-2})^{d-1} \\ L_d = 1 \\ L_i = \sum_{j>0} L_{d-2-j} L_{i+j}, \quad i = 1, \dots, d-1 \end{cases}.$$

Alors, la série génératrice  $F_d(x)$  des  $d$ -angulations de maille  $d$  (comptées avec poids  $x$  par face interne) est donnée par

$$F'_d(x) = (1 + L_{d-2})^d.$$

Mentionnons qu'une autre bijection (faisant intervenir des «arbres bourgeonnants») a été donnée par Albenque et Poulalhon [13].

## Références

- [1] W. Schnyder, *Planar graphs and poset dimension*, Order 5(4) 323–343, 1989.
- [2] W. Schnyder, *Embedding planar graphs in the grid*, Symposium on Discrete Algorithms (SODA) 138–148, 1990.

- [3] N. Bonichon, *A bijection between realizers of maximal plane graphs and pairs of non-crossing dyck paths*, Proceedings of FPSAC'02 123–132, 2002.
- [4] P. Ossona de Mendez, *Orientations bipolaires*, Thèse de doctorat, École des hautes études en sciences sociales, Paris, 1994.
- [5] E. Brehm, *3-orientations and Schnyder 3-tree-decompositions*, Diplomarbeit, Freie Universität Berlin, 2000.
- [6] O. Bernardi et É. Fusy, *A bijection for triangulations, quadrangulations, pentagulations, etc.*, Journal of Combinatorial Theory Ser. A119(1) 218–244, 2012 ; arXiv:1007.1292 [math.CO].
- [7] É. Fusy, D. Poulalhon et G. Schaeffer, *Dissections, orientations, and trees, with applications to optimal mesh encoding and to random sampling*, Transactions on Algorithms 4(2) 19, 2008 ; arXiv:0810.2608 [math.CO].
- [8] D. Poulalhon et G. Schaeffer, *A bijection for triangulations of a polygon with interior points and multiple edges*, Theoretical Computer Science 307(2) 385–401, 2003.
- [9] W.T. Tutte, *A census of planar triangulations*, Canad. J. Math. 14 21–38, 1962.
- [10] E. Miller, *Planar graphs as minimal resolutions of trivariate monomial ideals*, Documenta Math. 7 43–90, 2002.
- [11] S. Felsner, *Lattice structures from planar graphs*, Electron. J. Combin. 11(1), 2004.
- [12] R. Mullin and P. Schellenberg, *The enumeration of c-nets via quadrangulations*, J. Combin. Theory 4 259-276, 1968.
- [13] M. Albenque et D. Poulalhon, *Generic method for bijections between blossoming trees and planar maps*, 2013 ; arXiv:1305.1312 [math.CO].

# Crible cyclique pour des partitions non-croisées généralisées associées aux groupes de réflexion complexes

CHRISTIAN KRATTENTHALER

Résumé par PHILIPPE BIANE

*Séminaire de Combinatoire Philippe Flajolet  
Institut Henri Poincaré, Séance du 24 mai 2012*

## Résumé

Le crible cyclique est un phénomène énumératif énoncé par Reiner, Stanton et White. Bessis et Reiner ont proposé deux conjectures sur des phénomènes de crible cyclique pour les partitions non-croisées généralisées associées aux groupes de réflexion complexes de Armstrong et Bessis. Je commencerai en expliquant ce qu'est le crible cyclique et les partitions non-croisées généralisées, et ensuite j'exposerai les idées principales d'une démonstration de ces deux conjectures. Ce travail a été effectué en partie avec Thomas Müller.

## 1 Le crible cyclique

### 1.1 Définition

On a une notion de crible cyclique lorsqu'un ensemble combinatoire  $M$ , sur lequel agit un groupe cyclique  $G$  d'ordre  $n$ , engendré par  $g$ , est tel qu'il existe un polynôme  $P$  vérifiant

$$Fix_M(g^p) = P(e^{2i\pi p/n}).$$

Ici  $Fix_M(h)$  désigne le nombre de points fixes de  $h \in G$  agissant sur  $M$ . De façon équivalente, on a

$$P(q) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j q^j \pmod{q^n - 1}$$

où  $a_j$  est le nombre d'orbites dont l'ordre du stabilisateur divise  $j$ .

### 1.2 Historique

Le premier exemple remonte à Stembridge (dans le cas  $q = -1$ ) et concerne les partitions planes. Le concept général est apparu dans un article de Reiner, Stanton et White [2] en 2004.

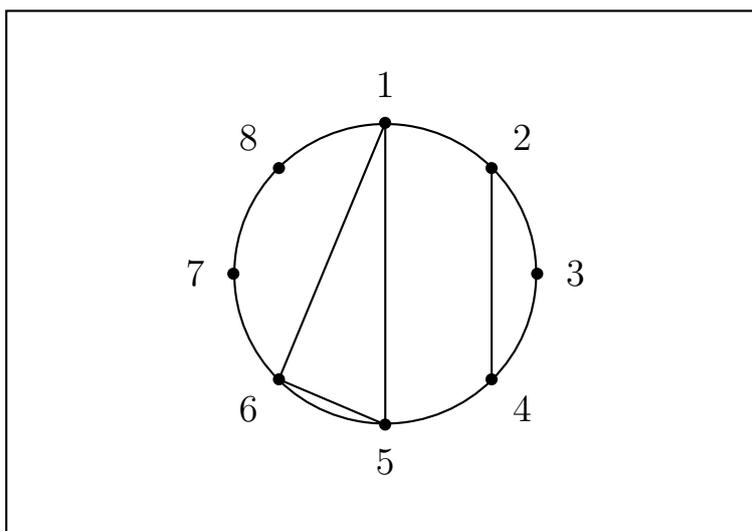
## 2 Partitions non-croisées et crible cyclique

### 2.1 Partitions non-croisées

Une partition de  $\{1, \dots, n\}$  est dite non-croisée si chaque fois que  $i < j < k < l$  et  $i, k$  sont dans la même part et  $j, l$  dans la même part, alors cette part contient  $i, j, k, l$ .

Si on place les points  $\{1, \dots, n\}$  autour d'un cercle et que l'on trace les polygones correspondant aux parts de la partition, alors la partition est non-croisée si les polygones ne se croisent pas.

Exemple :



La partition  $\{1, 5, 6\} \cup \{2, 4\} \cup \{3\} \cup \{7\} \cup \{8\}$ .

Les partitions non-croisées  $NC(n)$  forment un treillis autodual. Elles sont comptées par les nombres de Catalan.

## 2.2 Partitions non-croisées $m$ -divisibles

Une partition non-croisée est dite  $m$ -divisible si toutes ses parts ont un cardinal divisible par  $m$ . Les partitions non-croisées  $m$ -divisibles de  $nm$  forment un sous-treillis de  $NC(nm)$ , compté par des nombres de Catalan généralisés  $\frac{1}{n} \binom{n(m+1)}{n-1}$ . Le groupe cyclique des rotations d'angle multiple de  $2\pi/mn$  agit sur cet ensemble, et le phénomène de crible cyclique est vérifié pour cette action avec

$$P(q) = \frac{1}{[n]_q} \left[ \begin{matrix} n(m+1) \\ n-1 \end{matrix} \right]_q.$$

On peut montrer aussi que les partitions non-croisées dont toutes les parts sont de taille égale à  $m$  sont comptées par  $\frac{1}{n} \binom{nm}{n-1}$ , et on a encore le phénomène du crible cyclique pour les rotations avec

$$P(q) = \frac{1}{[n]_q} \left[ \begin{matrix} nm \\ n-1 \end{matrix} \right]_q.$$

## 3 Partitions non-croisées associées aux groupes de réflexion complexes

### 3.1 Ordre absolu sur le groupe symétrique

On définit la longueur  $l(\sigma)$  d'une permutation  $\sigma$  comme le plus petit  $k$  tel que  $\sigma = t_1 \dots t_k$  pour des transpositions  $t_1, \dots, t_k$ . En fait  $l(\sigma) = n - c(\sigma)$  où  $c(\sigma)$  est le nombre de cycles de  $\sigma$ . Il existe une relation d'ordre sur le groupe symétrique qui vérifie  $\sigma \leq_T \pi$  si  $l(\sigma) + l(\sigma^{-1}\pi) = l(\pi)$ . On peut montrer que les permutations  $\sigma \leq_T c_n$  où  $c_n$  est le cycle  $(123 \dots n)$  sont en bijection avec  $NC(n)$  (il suffit pour cela de considérer la partition donnée par les cycles de  $\sigma$ ).

### 3.2 Groupes de réflexion complexes

Une réflexion complexe est une transformation linéaire de  $\mathbf{C}^d$  qui laisse fixe un hyperplan et qui est d'ordre fini. Un groupe de réflexion complexe est un groupe (supposé fini dans cet exposé) engendré par des réflexions complexes. Ces groupes ont été classifiés par Shephard et Todd [3] : un tel groupe est produit de sous-groupes irréductibles, et pour ces groupes irréductibles il existe une famille infinie à trois paramètres entiers  $G(d, e, n)$  (avec  $e|d$ ) et des groupes exceptionnels  $G_4, G_5, \dots, G_{37}$ .

Ainsi,  $G(d, e, n)$  est formé des matrices qui sont le produit d'une matrice de permutation par une matrice diagonale  $D$  satisfaisant  $D^d = I$  et  $\det(D)^{d/e} = 1$ . En particulier on a  $G(1, 1, n) = S_n$ ,  $G(2, 1, n) = B_n$ , et  $G(2, 2, n) = D_n$ .

### 3.3 Groupes bien engendrés

Un groupe de réflexion complexe de rang  $n$  est dit *bien engendré* s'il est engendré par  $n$  réflexions. Les groupes irréductibles ont été classifiés par Shephard et Todd, ce sont ceux des séries  $G(d, 1, n)$  et  $G(e, e, n)$ , ainsi que certains des groupes exceptionnels.

On définit l'ordre  $\leq_T$  pour ces groupes de la même façon que pour le groupe symétrique, en utilisant les réflexions au lieu des transpositions. Dans la suite on considère des groupes bien engendrés.

### 3.4 Partitions non-croisées associées aux groupes de réflexion complexes

Les exposants  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  d'un groupe de réflexion complexe bien engendré sont les degrés des générateurs des invariants polynomiaux de  $G$ . Par exemple pour  $S_n$ , qui est de rang  $n - 1$ , agissant sur l'hyperplan  $\sum_i x_i = 0$  de  $\mathbf{C}^n$ , ces degrés sont  $2, 3, \dots, n$  (penser aux fonctions symétriques élémentaires). On appelle  $h = d_n$  le plus grand de ces degrés, que l'on nomme nombre de Coxeter.

Un élément régulier dans  $G$  est un élément qui a une valeur propre  $\zeta$  dont l'espace propre n'est contenu dans aucun hyperplan de réflexion. Un élément de Coxeter est un élément régulier dont la valeur propre  $\zeta$  correspondante est une racine primitive  $h^e$  de l'unité. Si  $c$  est un élément de Coxeter, alors les partitions non-croisées associées à  $G$  et  $c$  sont les  $w \in G$  tels que  $w \leq_T c$ . On montre que les partitions non-croisées forment un treillis autodual, gradué, qui est compté par des nombres de Catalan généralisés  $\prod_i \frac{h+d_i}{d_i}$ .

### 3.5 Partitions non-croisées $m$ -divisibles

Cette notion est due à Armstrong [1]. Soit  $c$  un élément de Coxeter, une partition non-croisée  $m$ -divisible est une suite  $(w_0, w_1, \dots, w_m)$  d'éléments de  $G$  telle que  $w_0 \dots w_m = c$  et  $l(w_0) + \dots + l(w_m) = l(c)$ . Il existe une relation d'ordre sur les partitions non-croisées  $m$ -divisibles :  $(v_0, v_1, \dots, v_m) \leq (w_0, w_1, \dots, w_m)$  si  $v_i \leq w_i, i = 1, \dots, m$  et c'est un semi-treillis, gradué par le rang.

Dans le cas de  $S_n$  on retrouve la notion usuelle : si  $c = (12 \dots n) = w_0 \dots w_m$  alors on remplace  $w_1, \dots, w_m$  par leur "gonflement"  $\hat{w}_k$  en remplaçant  $i$  dans  $w_k$  par  $(m-1)i + k$ . Alors la permutation  $z = (12 \dots nm) \hat{w}_1^{-1} \dots w_m^{-1}$  est une partition non-croisée  $m$ -divisible.

Dans le cas général, le nombre de telles partitions est

$$\prod_i \frac{mh + d_i}{d_i}$$

(d'après Athanasiadis, Bessis, Corran, Chapoton, Edelman, Reiner).

L'action

$$(w_0, \dots, w_m) \rightarrow (cw_m c^{-1} w_0 c w_m^{-1} c, cw_m c^{-1}, w_1, \dots, w_{m-1})$$

engendre un groupe cyclique d'ordre  $mh$ .

Dans le cas du type  $A$  (le groupe  $S_n$ ) c'est simplement l'action des rotations d'angle multiple de  $2\pi/mn$ .

**Théorème** (*C. Krattenthaler, T. Müller* : Le crible cyclique pour les partitions non-croisées  $m$ -divisibles). Avec l'action définie ci-dessus, les partitions non-croisées  $m$ -divisibles vérifient le crible cyclique pour le polynôme

$$\prod_i \frac{[mh + d_i]_q}{[d_i]_q}.$$

### 3.6 Une autre action

L'action

$$(w_0, \dots, w_m) \rightarrow (cw_m c^{-1}, w_0, w_1, \dots, w_{m-1})$$

engendre un groupe cyclique d'ordre  $(m+1)h$ . Dans le cas des types  $A$ ,  $B$ , ou  $D$ , si on fait le plongement  $(w_0, \dots, w_m) \rightarrow (id, w_0, \dots, w_m)$  on obtient les partitions dont toutes les parts sont de taille  $m+1$ .

De nouveau on a

**Théorème** (*C. Krattenthaler, T. Müller*). Avec l'action définie ci-dessus, le crible cyclique est vérifié pour le polynôme

$$\prod_i \frac{[mh + d_i]_q}{[d_i]_q}.$$

Ces résultats avaient été conjecturé par Armstrong et Bessis.

La preuve est différente suivant les cas  $G(d, 1, n)$ ,  $G(e, e, n)$  (où on utilise des partitions  $m$ -divisibles sur une couronne), où les cas exceptionnels qui nécessitent des vérifications sur ordinateur :n même si le problème dans le cas des groupes exceptionnels n'est pas fini (à cause du paramètre  $n$ ), on peut se ramener à des vérifications sur un nombre fini de cas.

## Références

- [1] D. Armstrong, Generalized non-crossing partitions and combinatorics of Coxeter groups, Mem. Amer.Math. Soc., Vol. 202 no. 949, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2009.
- [2] V. Reiner, D. Stanton and D. White, The cyclic sieving phenomenon J. Combin. Theory Ser. A 108 (2004) 17–50.
- [3] G. C. Shephard and J. A. Todd, Finite unitary reflection groups Canad. J. Math. 6 (1954), 274–304.

# Law of large numbers for matchings, extension and applications

MARC LELARGE

Summarized by HANG ZHOU

*Séminaire de Combinatoire Philippe Flajolet  
Institut Henri Poincaré, March 28<sup>th</sup>, 2013*

## Abstract

The fact that global properties of matchings can be read from local properties of the underlying graph has been rediscovered many times in statistical physics, combinatorics, group theory and computer science. I will present a probabilistic approach allowing to derive law of large numbers. I will show how it extends previous results in several directions and describe some algorithmic applications.

## 1 Introduction and main result

A  $h$ -uniform hypergraph  $H = (V, E)$  is called  $(\ell, k)$ -orientable if there exists an assignment of each hyperedge  $e \in E$  to exactly  $\ell$  of its vertices  $v \in e$  such that no vertex is assigned more than  $k$  hyperedges. Let  $H_{n,m,h}$  be a hypergraph, drawn uniformly at random from the set of all  $h$ -uniform hypergraphs with  $n$  vertices and  $m$  edges. In this work, we determine the threshold of the existence of a  $(\ell, k)$ -orientation of  $H_{n,m,h}$  for  $k \geq 1$  and  $h > \ell \geq 1$ , extending recent results motivated by applications such as cuckoo hashing or load balancing with guaranteed maximum load. Our main result is in the following theorem (see [?]).

**Theorem 1.** Let  $Q(x, y) = e^{-x} \sum_{j \geq y} \frac{x^j}{j!}$  and  $\text{Bin}(n, p)$  denote a binomial random variable with parameters  $n \in \mathbb{N}$  and  $p \in [0, 1]$ , i.e.  $\mathbb{P}(\text{Bin}(n, p) = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ . For integers  $h > \ell \geq 1$ ,  $k \geq 1$  with  $\max(h - \ell, k) \geq 2$ , let  $\xi^*$  be the unique positive solution to

$$hk = \xi^* \frac{\mathbb{E}[\max(\ell - \text{Bin}(h, 1 - Q(\xi^*, k)), 0)]}{Q(\xi^*, k + 1) \mathbb{P}(\text{Bin}(h - 1, 1 - Q(\xi^*, k)) < \ell)}.$$

Let

$$c_{h,\ell,k}^* = \frac{\xi^*}{h \mathbb{P}(\text{Bin}(h - 1, 1 - Q(\xi^*, k)) < \ell)}.$$

Then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(H_{n, \lfloor cn \rfloor, h} \text{ is } (\ell, k)\text{-orientable}) = \begin{cases} 0 & \text{if } c > c_{h,\ell,k}^*, \\ 1 & \text{if } c < c_{h,\ell,k}^*. \end{cases}$$

Our proof combines the local weak convergence of sparse graphs and a careful analysis of a Gibbs measure on spanning subgraphs with degree constraints. It allows us to deal with a much broader class than the uniform hypergraphs.

The previous characterisation of the threshold  $c_{h,k,\ell}^*$  in (for  $k$  sufficiently large) involves the solution of a differential equation system which is rather complicated and does not allow to get explicit values for  $c_{h,k,\ell}^*$ . We believe that our method of proof and the characterisation of the threshold is much simpler.

## 2 Approach and sketch of proof

### 2.1 Definitions

We consider a finite simple graph  $G = (V, E)$  with a vector of  $\mathbb{N}^V$  denoted by  $\mathbf{w} = (w_v, v \in V)$  and called the vector of (degree) constraints. We are interested in spanning subgraphs  $(V, F)$  with degree constraints given by the vector  $\mathbf{w}$ . Each such subgraph is determined by its edge-set  $F \subseteq E$  encoded by the vector  $\mathbf{B} = (B_e, e \in E) \in \{0, 1\}^E$  defined by  $B_e = 1$  if and only if  $e \in F$ . We say that a spanning subgraph  $\mathbf{B}$  satisfies the degree constraints or is admissible if for all  $v \in V$ , we have  $\sum_{e \in \partial v} B_e \leq w_v$ , where  $\partial v$  denotes the set of incident edges in  $G$  to  $v$ . We introduce the family of probability distributions on the set of admissible spanning subgraphs parametrised by a parameter  $z > 0$ :

$$\mu_G^z(\mathbf{B}) = \frac{z^{\sum_e B_e}}{P_G(z)}, \quad (1)$$

where  $P_G(z) = \sum_{\mathbf{B}} z^{\sum_e B_e} \prod_{v \in V} \mathbf{1}(\sum_{e \in \partial v} B_e \leq w_v)$ . We also define the size of the spanning subgraph by  $|F| = \sum_e B_e$  and denote the maximum size by  $M(G) = \max\{\sum_e B_e : \mathbf{B} \text{ admissible}\}$ . Those spanning subgraphs which achieve this maximum are called maximum spanning subgraphs. For any finite graph, when  $z$  tends to infinity, the distribution  $\mu_G^z$  converges to the uniform distribution over maximum spanning subgraphs. For an admissible spanning subgraph, the degree of  $v$  in the subgraph is simply  $\sum_{e \in \partial v} B_e$ . By linearity of expectation, the mean degree of  $v$  under the law  $\mu_G^z$  is  $D_v^z := \sum_{e \in \partial v} \mu_G^z(B_e = 1)$  so that we have

$$M(G) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \lim_{z \rightarrow \infty} D_v^z. \quad (2)$$

We see hypergraph  $H$  as bipartite graph  $G = (A \cup B, E)$ . Then, an hypergraph is  $(\ell, k)$ -orientable if and only if all vertices in  $A$  have degree  $\ell$  in any maximum spanning subgraph of the corresponding bipartite graph with degree constraints  $(\ell, k)$ . Indeed in this case, we have for any  $v \in A$ ,  $\lim_{z \rightarrow \infty} D_v^z = \ell$  so that the size of a maximum spanning subgraph is  $M(G) = \ell|A|$ .

A fundamental ingredient of the proof is the fact that the bipartite graphs associated to  $h$ -uniform hypergraphs, i.e. with  $n$  vertices and  $cn$  hyperedges are locally tree-like: with high probability, there is no cycle in a ball (of fixed radius) around a vertex chosen at random. It is then instructive to study maximum spanning subgraphs when the underlying graph is a tree. Let us first study the Gibbs measures defined by (1) in the limit  $z \rightarrow \infty$  in order to analyse maximum spanning subgraphs. When the underlying graph is a finite tree, we can use a more direct and algorithmic way that we now describe.

### 2.2 Message Passing Algorithm

To study the  $(\ell, k)$ -orientability of the hypergraph  $H$  associated to the bipartite graph  $G$ , the vector of degree constraints  $\mathbf{w}$  should be chosen such that  $w_v = \ell$  for  $v \in A$  and  $w_v = k$  for  $v \in B$ . For simplicity, we assume here that the vector of degree constraints is constant so that all vertices have the same degree constraint say  $w \geq 1$ . Consider now the following message-passing algorithm forwarding messages in  $\{0, 1\}$  on the oriented edges of the underlying tree  $G$  as follows: at each round, each oriented edge forwards a message, hence two messages are sent on each edge (one in each direction) at each round. The message passed on the oriented edge  $\vec{e} = (u, v)$  is 0 if the sum of the incoming messages to  $u$  from neighbours different from  $v$  in previous round is at least  $w$  and the message is 1 otherwise, i.e. if the sum of the incoming messages is strictly less than  $w$ . Let  $\mathbf{I}_k \in \{0, 1\}^{\vec{E}}$  be the vector describing the messages sent on the oriented edges in  $\vec{E}$

at the  $k$ -th round of the algorithm. Denote by  $\mathcal{P}_G$  the action of the algorithm on the messages in one round so that  $\mathbf{I}_{k+1} = \mathcal{P}_G(\mathbf{I}_k)$ . It is easy to see that the algorithm will converge on any finite tree after a number of steps equals to at most the diameter of the tree, whatever the initial condition. Hence the messages of the algorithm converge to a vector  $\mathbf{I}^* = (I_{\vec{e}}^*, \vec{e} \in \vec{E})$  solving the fixed-point equation  $\mathbf{I}^* = \mathcal{P}_G(\mathbf{I}^*)$  and the size of a maximum spanning subgraph is given by

$$\frac{1}{2} \sum_{v \in V} \left( 2w \mathbf{1} \left( \sum_{\vec{e} \in \partial v} I_{\vec{e}}^* \geq w + 1 \right) + \mathbf{1} \left( \sum_{\vec{e} \in \partial v} I_{\vec{e}}^* \leq w \right) \sum_{\vec{e} \in \partial v} I_{\vec{e}}^* \right), \quad (3)$$

where  $\partial v$  is the set of oriented edges toward  $v$ .

Note that the correctness of the algorithm is ensured for trees only, but the definition of the algorithm does not require the graph to be a tree. It makes only local computations and can be used on any graph. Since the bipartite graphs associated to  $H_{n, \lfloor cn \rfloor, h}$  are not trees but are locally tree like, it is tempting to use the algorithm directly on these graphs. It turns out that for low values of  $c$ , the algorithm will converge and will also be correct (with high probability). The algorithm allows to compute the size of a maximum spanning subgraph for values of  $c$  above  $1/h$  but it breaks down at some higher value of  $c$ . From an algorithmic viewpoint, there is 'no correlation decay' and the computations made by the algorithm is not anymore local.

### 2.3 Bypassing correlation decay

In order to bypass this absence of 'correlation decay', we borrow ideas from statistical physics by introducing the Gibbs measures  $\mu_G^z$  parametrised by a parameter  $z > 0$  (usually called the activity or the fugacity). Informally, the introduction of this parameter  $z$  will allow us to capture sufficient additional information on our problem in order to identify the 'right' solution to the fixed-point equation  $\mathbf{I} = \mathcal{P}_G(\mathbf{I})$ , when we let  $z$  goes to infinity. Our first step in the analysis of these measures is to derive a message-passing algorithm allowing to compute the mean degree  $D_v^z$  of any vertex  $v$  in a spanning subgraph taken at random according to the probability distribution  $\mu_G^z$ . We will proceed by first defining the local computations required at each node and we call them the local operators. We use these building blocks to define a message-passing algorithm which is valid on any finite tree. In particular, we show that as  $z$  tends to infinity, the dynamic of the algorithm becomes exactly the one described previously in this section. We shows that the message-passing algorithm converges to a unique fixed point for any  $z < \infty$ .

## 3 Extensions

The absence of phase transition has also algorithmic implications, such as sublinear algorithm to approximate the number of matchings (see [?]). A matching is a special case of a spanning subgraph with degree constraint being 1 for every node. For a graph  $G$ , let  $Z(G, \lambda)$  be the partition function of the monomer-dimer system defined by:  $Z(G, \lambda) = \sum_k m_k(G) \lambda^k$ , where  $m_k(G)$  is the number of matchings of cardinality  $k$  in  $G$ . We consider graphs of bounded degree and develop a sublinear-time algorithm for approximating  $\log Z(G, \lambda)$  at an arbitrary value  $\lambda > 0$  within additive error  $\epsilon n$  with high probability. The query complexity of our algorithm does not depend on the size of  $G$  and is polynomial in  $1/\epsilon$ , and we also provide a lower bound quadratic in  $1/\epsilon$  for this problem. This is the first analysis of a sublinear-time approximation algorithm for a  $\#P$ -complete problem. Our approach is based on the correlation decay of the Gibbs distribution associated with  $Z(G, \lambda)$ . We show that our algorithm approximates the probability for a vertex to be covered by a matching, sampled according to this Gibbs distribution in a near-optimal sublinear-time. We extend our results to approximate the average size and the entropy of such

a matching within an additive error with high probability, where again the query complexity is polynomial in  $1/\epsilon$  and the lower bound is quadratic in  $1/\epsilon$ . This result can be extended to many other problems where the correlation decay is known to hold as for independent sets or the Ising model up to the critical activity.

## References

- [1] Marc Lelarge. A new approach to the orientation of random hypergraphs. In *Proceedings of the Twenty-Third Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 251–264. SIAM, 2012.
- [2] Marc Lelarge and Hang Zhou. Sublinear-time algorithms for monomer-dimer systems on bounded degree graphs. *arXiv preprint arXiv:1208.3629*, 2012.

# Animaux dirigés, systèmes quadratiques et systèmes de réécriture.

Jean-François Marckert  
Résumé par Cécile Mailler et Marie Albenque

Exposé donné le 27/01/2012 au séminaire Philippe Flajolet

## Résumé

Cet exposé est consacré à l'énumération des animaux dirigés sur le réseau carré énumérés à la fois selon leur aire et selon leur périmètre. Ce problème lié à la percolation dirigée dans le quart de plan reste complètement ouvert, à la différence de l'énumération selon l'aire uniquement qui est bien compris. La méthode proposée pour résoudre ce problème est dans un premier temps de généraliser la méthode des modèles de gaz et de ramener ensuite ce problème combinatoire en un problème de résolution de systèmes matriciels. Les détails de ces travaux sont présentés dans [8]. Cet exposé est une narration des différentes étapes, qui, d'échecs en réussites, ont permis de transformer ce problème et de mieux l'appréhender.

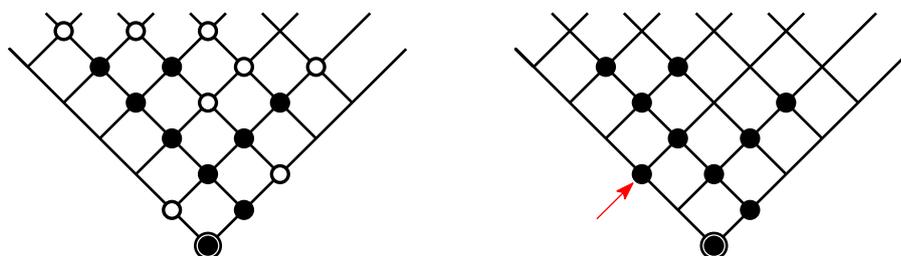
## 1 Introduction

On se place ici dans le quart de plan orienté, c'est-à-dire sur le graphe dont l'ensemble des sommets est indexé par  $\mathbb{N}^2$  et tel que l'ensemble des arêtes est l'ensemble des arêtes  $(i, j) \rightarrow (i+1, j)$  et  $(i, j) \rightarrow (i, j+1)$  pour tout  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ . Dans toute la suite, on représentera le réseau carré tourné de  $\pi/4$ , de sorte que les arêtes sont naturellement orientées vers le haut, voir Figure 1.

Un **animal dirigé** est un sous-ensemble fini du quart de plan qui contient l'origine et est connexe dans les directions NORD-EST et NORD-OUEST (cf. Figure 1). Autrement dit, étant donné un animal dirigé  $A$ , pour tout sommet  $v$  de  $A$ , il existe un chemin orienté de  $(0, 0)$  à  $v$  dont tous les sommets n'empruntent que des arêtes  $(i, j) \rightarrow (i+1, j)$  ou  $(i, j) \rightarrow (i, j+1)$ . L'**aire** d'un animal dirigé  $A$  est son cardinal, noté  $|A|$ . L'ensemble des animaux dirigés est noté  $\mathcal{A}$ .

Un site  $x$  du quart de plan est dit **périmétrique** pour  $A$  si  $A \cup \{x\}$  est un animal dirigé. On note  $\mathcal{P}(A)$  l'ensemble des sites périmétriques de  $A$ ; son cardinal  $|\mathcal{P}(A)|$  est appelé **périmètre** de  $A$ .

L'opérateur s'intéresse à la série génératrice bivariée  $G_{A, \mathcal{P}}(x, y) = \sum_{A \text{ fini}} x^{|A|} y^{|\mathcal{P}(A)|}$  qui dénombre les animaux dirigés à la fois selon leur aire et selon leur périmètre. Avant d'étudier cette série, on commence par expliquer un lien naturel avec la percolation dirigée.



(a) Un animal dirigé d'aire 9 et de périmètre 8. Les sommets noirs représentent les cellules de l'animal et les sommets blancs les sites périmétriques

(b) Ce sous-ensemble n'est pas un animal dirigé; il n'existe pas de chemin orienté de l'origine au sommet pointé.

FIGURE 1 – Définition d'un animal dirigé dans le quart de plan.

Considérons le modèle de percolation de Bernoulli classique dans lequel chaque site du quart de plan est conservé avec probabilité  $p$  ou effacé avec probabilité  $1 - p$ . L'amas (ou *cluster*) de percolation issu de l'origine  $A(p)$  est la composante connexe dirigée dans le graphe ainsi obtenu. On dit que le système *percole* ou qu'il y a *percolation*, s'il existe un cluster infini à partir de  $v$ , autrement dit si  $A_v(p)$  est infini.

On peut montrer qu'il existe  $0 < p_{crit} < 1$ , appelé *seuil de percolation* ou *percolation critique*, tel que pour  $p < p_{crit}$ , il n'y a pas percolation avec probabilité 1 et pour  $p > p_{crit}$ , il y a percolation avec probabilité strictement positive. Déterminer  $p_{crit}$  pour le réseau carré est un problème ouvert. L'observation suivante permet d'établir un lien entre le calcul de  $p_{crit}$  et le calcul de la série aire-périmètre. Soit  $A$  un animal dirigé fixé, la probabilité que pour une réalisation aléatoire de percolation  $A(p)$  coïncide avec  $A$  est égale à :

$$P(A(p) = A) = p^{|A|}(1 - p)^{|P(A)|},$$

en effet il faut et il suffit que chaque cellule de l'animal soit conservée et que chaque site périmétrique soit effacé (car  $A(p)$  est maximal pour l'inclusion). La probabilité que le cluster de percolation soit fini est donc égal à :

$$P(|A(p)| < \infty) = \sum_{A \in \mathcal{A}} p^{|A|}(1 - p)^{|P(A)|}.$$

Autrement dit,  $p \leq p_{crit}$  si et seulement si  $G_{\mathcal{A}, \mathcal{P}}(p, 1 - p) = 1$ . Connaître la série aire/périmètre permettrait donc probablement de pouvoir calculer la valeur de  $p_{crit}$ .

L'orateur souligne deux résultats connus sur cette série aire/périmètre : le premier dû à A. Bacher [1] qui a déterminé la série  $\sum_{A \text{ fini}} |\mathcal{P}(A)|x^{|A|}$ , et le second, détaillé dans une première partie de l'exposé.

## 2 Énumération des animaux dirigés selon leur aire

Le série génératrice  $G_A(x) = \sum_{A \text{ fini}} x^{|A|} = G_{\mathcal{A}, \mathcal{P}}(x, 1)$  qui énumère les animaux dirigés uniquement selon leur aire est bien connue et a fait l'objet de nombreux travaux. L'orateur cite notamment le résultat suivant

**Proposition 2.1.**  $G_A(x) = \frac{2x}{1 - 3x + (1 - 2x - 3x^2)}.$

Plusieurs démonstrations de cette identité sont connues : des démonstrations utilisant des méthodes combinatoires (Viennot 86, Bétréma et Penaud 93, Gouyou-Beauchamps et Viennot 88, etc) et d'autres fondées sur l'étude de modèles de gaz (Hakim et Nadal 83, Dhar 83, Bousquet-Melou 98, Le Borgne et Marckert 07, etc). Comme c'est cette approche qui sera développée dans la suite pour l'étude de la série aire/périmètre, l'orateur détaille les étapes de l'approche reposant sur les modèles de gaz.

**Animaux sur un cylindre.** La première idée pour simplifier l'étude est de travailler sur un cylindre de largeur  $N$  fixée et non plus sur un cône (cf. Figure 2). Le théorème limite suivant permet de relier les deux modèles : si  $G_A^{(N)}(x)$  est la fonction génératrice des animaux dirigés sur le cylindre, où  $x$  marque l'aire, alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} G_A^{(N)}(x) \rightarrow G_A(x) \text{ quand } N \rightarrow \infty,$$

au sens des séries formelles. En effet le nombre d'animaux dirigés de taille  $n$  fixée est le même sur le cylindre de largeur  $N$  et sur le quart de plan dès que  $N > n$ .

Cette restriction permet d'obtenir une équation de décomposition des animaux dirigés ligne à ligne. Pour cela, on généralise un peu la notion d'animaux dirigés, soit  $C$  un ensemble de sommets de la première ligne du cylindre, l'ensemble de sommets  $A$  est appelé *animal dirigé de source  $C$*  si et seulement s'il contient  $C$  et pour tout  $x \in A$ , il existe  $c \in C$  et un chemin orienté de  $c$  à  $a$

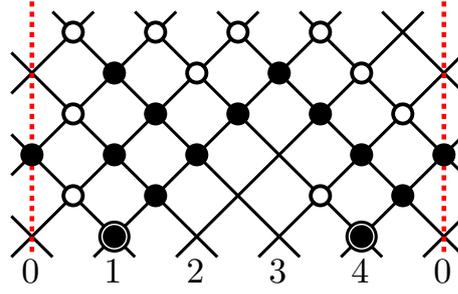


FIGURE 2 – Un animal dirigé sur le cylindre de largeur 5. Les sommets noirs représentent les cellules de l’animal et les sommets entourés ses sources, les sommets blancs désignent les sites périphériques.

n’empruntant que des sommets de  $A$ . On note  $G_C(x)$  la génératrice des animaux dirigés de source  $C$ . On a alors l’équation de décomposition suivante :

$$G_C^{(N)}(x) = x^{|C|} \sum_{D \subset V(C)} G_D^{(N)}(x),$$

où  $V(C)$  désigne le voisinage de  $C$  c’est à dire les sommets qui sont atteints, partant d’un point de  $C$  par un pas NORD-EST ou un pas NORD-OUEST.

**Modèle de gaz et animaux.** Un *modèle de gaz* sur un graphe est une collection de variables aléatoires  $(X_x)_{x \in V(G)}$  à valeurs dans  $\{0, 1\}$  indexée par les sommets du graphe (ici par les sommets du cylindre). La terminologie provient de la physique statistique où cet objet permet de modéliser l’occupation d’un gaz : la valeur du gaz en un site est égale à 1 si et seulement si une particule est présente à cet endroit. Soit  $x$  un sommet, on dit que  $x$  est *occupé* si  $X_x = 1$  et *libre* sinon

Définissons à présent un modèle de gaz sur le cylindre. On commence par définir une chaîne de Markov verticale sur les lignes du cylindre de largeur  $N$  grâce aux transitions représentées en Figure 3. Autrement dit, si les deux enfants d’un sommet sont libres alors celui-ci sera occupé avec probabilité  $p$  et libre dans tous les autres cas. Cela nous donne une chaîne de Markov irréductible sur un espace à  $2^N$  états qui admet donc une unique loi stationnaire  $\pi^{(N)}$ .

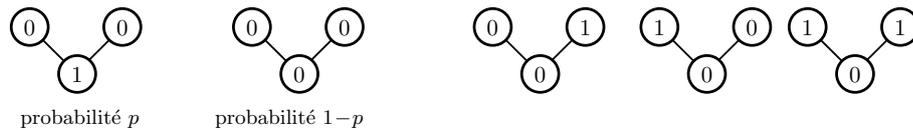


FIGURE 3 – Transitions de la chaîne de Markov du modèle de gaz.

Pour toute source  $C$ , notons  $F_C^{(N)}(p) = \pi^{(N)}(X_x = 1 \Leftrightarrow x \in C)$ , le lien entre ce modèle de gaz et l’énumération d’animaux dirigés est donné par le résultat suivant, dû à Dhar :

**Théorème 2.2.** *Pour toute source  $C$ , pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,*

$$F_C^{(N)}(p) = (-1)^{|C|} G_C^{(N)}(-p).$$

*En particulier, pour une source réduite à un sommet, on obtient :*

$$\pi^{(N)}(X_x = 1) = -G^{(N)}(-p).$$

Il “suffit” donc de trouver l’expression de la loi stationnaire  $\pi^{(N)}$  et de calculer la limite de  $\pi^{(N)}(X_x = 1)$  lorsque  $N$  tend vers l’infini, pour trouver l’expression de la fonction génératrice de l’aire. Son expression peut-être devinée grâce à l’utilisation d’un logiciel de calcul formel et il suffit ensuite de montrer que la mesure devinée convient bien.

### 3 Énumération selon l'aire et le périmètre

Si l'énumération des animaux dirigés selon leur aire est bien comprise, c'est loin d'être le cas dans le cas aire/périmètre. L'orateur présente des idées et des nouveaux résultats sur le sujet : il montre en particulier dans quelle mesure la méthode du modèle de gaz peut-être adaptée au cas aire/périmètre.

**Définition du modèle de gaz** On se place toujours sur le cylindre de largeur  $N$  et on définit un nouveau modèle de gaz  $(Y_x)$  toujours en s'appuyant à nouveau sur la donnée des transitions ligne à ligne (cf. Figure 4). Dans ce nouveau modèle 2 types de transition sont possibles : avec probabilité  $p$ , on applique le premier type et un sommet va être occupé si et seulement ses deux enfants sont occupés, sinon (donc avec probabilité  $1 - p$ ) un sommet est occupé avec probabilité  $q$  indépendamment de tout le reste, autrement dit, en notant  $c_1$  et  $c_2$  les deux enfants d'un sommet  $x$ , on a :

$$Y_x = B_p \min(Y_{c_1}, Y_{c_2}) + (1 - B_p)B_q,$$

où  $B_p$  et  $B_q$  sont deux variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre respectif  $p$  et  $q$ . À nouveau, cela permet de définir une chaîne de Markov irréductible à états finis qui admet donc une unique probabilité stationnaire  $\mathbb{P}$ .

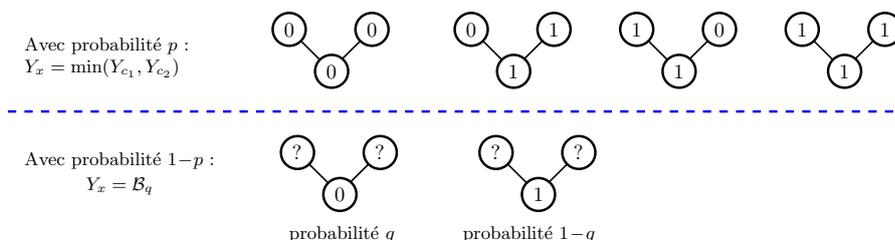


FIGURE 4 – Transitions de la chaîne de Markov du modèle de gaz : cas aire/périmètre.

Le lien entre la série génératrice aire-périmètre et ce modèle de gaz est alors donné par le résultat suivant :

**Proposition 3.1.** *Pour tout sommet  $x$  du graphe, on a :*

$$\mathbb{P}(Y_x = 1) = \sum_{A \text{ de source } x} p^{|A|} (1 - p)^{|\mathcal{P}(A)|} q^{|\mathcal{P}(A)|} = G_{A, \mathcal{P}}(p, (1 - p)q).$$

*Ébauche de preuve.* Dans ce modèle de gaz, on associe à chaque sommet une variable de Bernoulli de paramètre  $p$  et une de paramètre  $q$ . On utilise la variable de paramètre  $p$  pour définir un modèle de percolation comme décrit dans l'introduction. On peut donc écrire :

$$\mathbb{P}(Y_x = 1) = \sum_{A \text{ de source } x} \mathbb{P}(A(p) = A \text{ et } Y_x = 1) = \sum_{A \text{ de source } x} \mathbb{P}(Y_x = 1 | A(p) = A) \cdot \mathbb{P}(A(p) = A).$$

Il suffit ensuite d'observer que si  $A(p)$  est fixé alors  $Y_x$  vaut 1 si et seulement si tous les sites paramétriques de  $A(p)$  ont une variable de paramètre  $q$  égale à 1. On obtient donc :

$$\mathbb{P}(Y_x = 1) = \sum_{A \text{ de source } x} p^{|A|} (1 - p)^{|\mathcal{P}(A)|} q^{|\mathcal{P}(A)|} = G_{A, \mathcal{P}}(p, (1 - p)q).$$

□

Malheureusement, deviner la loi stationnaire de la chaîne de Markov définie ci-dessus s'avère plus difficile que dans le cas de l'aire, et cette loi est aujourd'hui encore inconnue. Plus précisément, pour une petite largeur  $N$  de cylindre fixée, on peut calculer la mesure stationnaire, mais les simulations réalisées avec un logiciel de calcul formel laissent à penser qu'il n'existe pas de forme produit qui permettrait de passer ensuite à la limite. En effet contrairement à ce qu'il se passe pour le cas de

l'énumération selon l'aire, il n'existe pas de matrice  $M$  de taille  $2 \times 2$  (qui ne dépend pas de  $N$  et une constante de renormalisation  $Z_N$  telles que :

$$\mathbb{P}^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = Z_N \prod_{i=1}^N M_{x_i, x_{i+1}}. \quad (1)$$

La méthode de l'aire semble donc être en échec sur le problème de l'aire/périmètre : l'orateur montre comment transformer le problème pour utiliser des méthodes algébriques.

**Vision matricielle.** Comme on ne parvient trouver une mesure stationnaire sous forme produit (cf. Equation (1)), on va se donner plus de degrés de liberté en recherchant des solutions sous forme matricielle, c'est-à-dire en considérant que les coefficients de la matrice  $M$  peuvent être également des matrices. Plus précisément on cherche une mesure sous la forme

$$\pi(x_1, \dots, x_N) = \text{Tr} \left( \prod_{i=1}^N Q^{x_i} \right),$$

où  $Q^0$  et  $Q^1$  sont deux matrices de la forme  $Q^0 = V^0 H^0$  et  $Q^1 = V^1 H^1$  telles que  $V^1 H^0 = V^0 H^1 = 0$ .

Chercher des solutions sous cette forme n'est pas restrictif, on peut en effet montrer que pour n'importe quelle mesure de probabilités sur  $\{0, 1\}^N$  invariante par rotation (ce qui est le cas ici, car la définition du gaz est invariante par rotation), on peut trouver de telles matrices.

Le résultat principal est le suivant :

**Proposition 3.2.** *Soit  $T_{y,y',x}$  la probabilité d'obtenir  $x$  en un site sachant que ses deux voisins (par un pas NORD-EST ou un pas NORD-OUEST) ont pour valeurs respectives  $y$  et  $y'$ . Supposons qu'il existe des matrices carrées  $V^0, H^0, V^1$  et  $H^1$  telles que :*

$$\begin{cases} V^x H^x &= \sum_{y,y'} H^y V^{y'} T_{y,y',x} \\ V^x H^{1-x} &= 0 \end{cases}$$

alors  $\pi(x_1, \dots, x_N) = \text{Tr} \left( \prod_{i=1}^N Q^{x_i} \right)$  pour  $Q^0$  et  $Q^1$  associés à cette solution, est mesure invariante pour le modèle de gaz considéré.

Il "suffirait" donc de résoudre ce système. Malheureusement, on n'y parvient pas. À ce stade, on peut soit se décourager et tout arrêter, soit continuer : bien sûr on continue ! L'orateur introduit une méthode itérative pour contourner ce problème.

**Construction d'une suite de lois.** Soit  $\mu_0$  une loi sur les  $N$ -uplets de  $\{0, 1\}^N$ . On définit par récurrence une suite de lois  $(\mu_k)_k$  en appliquant itérativement les transitions de la chaîne de Markov qui définissent le gaz. La suite ainsi définie converge vers la loi stationnaire  $\pi$ . L'idée est de choisir  $\mu_0$  de façon à pouvoir calculer  $\mu_k$  explicitement pour tout  $k \geq 0$ . Nous allons construire donc construire une suite  $(V_k^0, H_k^0, V_k^1, H_k^1)_{k \geq 0}$  telle que  $V_0^x H_0^{1-x} = 0$  et pour tout  $k \geq 0$  :

$$\begin{cases} V_k^x H_k^x &= \sum_{y,y'} H_{k-1}^y V_{k-1}^{y'} T_{y,y',x} \\ V_k^x H_k^{1-x} &= 0. \end{cases}$$

En fait il serait suffisant de trouver des valeurs  $(h_{y,x}, v_{y,x})_{x,y \in \{0,1\}}$  telles que

$$h_{y,x} v_{y',x'} = T_{y,y',x} \mathbb{1}_{x=x'}, \quad (2)$$

pour tout  $x, x', y, y'$  dans  $\{0, 1\}$ . En effet dans ce cas, on obtiendrait une solution en construisant une suite de matrices comme suit :

$$\begin{cases} V_k^x &= \sum_y H_{k-1}^y h_{y,x} \\ H_k^x &= \sum_{y'} V_{k-1}^{y'} v_{y',x}, \end{cases}$$

Malheureusement l'Équation (2) n'a pas de solution dans  $\mathbb{R}$ . On cherche donc une solution sous forme matricielle, c'est-à-dire des vecteurs lignes et colonnes sous la forme :

$$h_{x,1} = [\star, 0, \star, 0] \quad h_{x,0} = [0, \star, 0, \star]$$

$$v_{y,1} = \begin{bmatrix} \star \\ 0 \\ \star \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_{y,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \star \\ 0 \\ \star \end{bmatrix}$$

et tels que (2) soit vérifiée. Dans ce cas on obtient une solution en définissant une suite de matrices par :

$$\begin{cases} V_k^x = \sum_y H_{k-1}^y \otimes h_{y,x} \\ H_k^x = \sum_{y'} H_{k-1}^{y'} \otimes v_{y',x} \end{cases}$$

où  $\otimes$  représente le produit tensoriel de matrice. Le produit tensoriel de deux matrices  $A \otimes B$  est la matrice par blocs

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{21}B & \cdots \\ a_{12}B & a_{22}B & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Notons que  $(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = (A_1 A_2) \otimes (B_1 B_2)$ , de plus,  $\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$ . Introduire de tels vecteurs lignes et colonnes pour se donner plus de degrés de liberté et pour ainsi trouver une solution est une méthode qui apparaît dans d'autres domaines notamment dans l'étude de processus d'exclusion (PASEP par exemple).

Ce nouveau système peut alors être résolu. Il ne reste plus qu'à choisir une mesure initiale – par exemple  $V^1 = H^1 = [1]$  et  $V^0 = H^0 = [0]$  – et à faire converger la suite des  $Q_k^x$  point par point quand  $k$  tend vers l'infini vers une matrice (de dimension infinie)  $Q_\infty^x$ . On a alors le système suivant

$$Q_\infty^x = \sum_y Q_\infty^y \otimes q_{y,x}.$$

Malheureusement, ce système est difficile à résoudre, mais le problème est maintenant énoncé sous une forme algébrique. Cette méthode peut par ailleurs être généralisée à d'autres questions sur les animaux dirigés.

## Références

- [1] A. Bacher. *Chemins et animaux : applications de la théorie des empilements de pièces*. PhD thesis, Univ. Bordeaux 1, 2011.
- [2] J. Bétréma and J.-G. Penaud. Modèles avec particules dures, animaux dirigés, et séries en variables partiellement commutatives. [arXiv:math.CO/0106210](https://arxiv.org/abs/math/0106210), 1993.
- [3] M. Bousquet-Mélou. New enumerative results on two-dimensional directed animals. *Discrete Math.*, 180 :73–106, 1998.
- [4] D. Dhar. Exact solution of a directed-site animals-enumeration problem in three dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 51(10) :853–856, 1983.
- [5] D. Gouyou-Beauchamps and G. Viennot. Equivalence of the two-dimensional directed animal problem to a one-dimensional path problem. *Adv. in Appl. Math.*, 9(3) :334–357, 1988.
- [6] V. Hakim and J.P. Nadal. Exact results for 2d directed animals on a strip of finite width. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 16 :L213, 1983.
- [7] Y. Le Borgne and J.-F. Marckert. Directed animals and gas models revisited. *Electronic journal of Combinatorics*, 14, 2007.
- [8] J.-F. Marckert. Directed animals, quadratic and rewriting systems. *Arxiv preprint arXiv :1112.0910*, 2011.
- [9] G. Viennot. Heaps of pieces. I : Basic definitions and combinatorial lemmas. *Lecture Notes in Math.*, 1234 :321–350, 1986.

# Cyril Nicaud : Combinatoire des automates (le 7 avril 2011)

résumé par A. Genitrini

Cyril Nicaud nous a présenté à travers son exposé, trois méthodes afin de générer uniformément une classe d'automates, ainsi que la combinatoire sous-jacente nous permettant d'énumérer cette classe. La plupart de ces méthodes sont détaillées dans son habilitation [4].

## 1 Introduction

Tout au long de l'exposé, nous nous sommes intéressés aux automates déterministes et complets. Un automate sur l'alphabet  $\mathcal{A}$  déterministe et complet est la donnée d'un quadruplet  $(Q, \delta, q_0, F)$  où  $Q$  est l'ensemble des états,  $q_0$  est l'unique état initial,  $\delta$  est une application de  $Q \times \mathcal{A}$  dans  $Q$  et  $F$  est l'ensemble des états terminaux.

Par la suite, nous noterons  $k$  la taille de l'alphabet et  $n$  le nombre d'états. Les états seront numérotés de 1 à  $n$  et l'état initial est le numéroté par 1.

Nos automates ne contiendront pas d'états finaux. Nous devrions les appeler semi-automates mais puisque nous ne considérerons que de tels automates par la suite, par abus nous les appellerons automates. Nous pouvons par la suite choisir parmi les états ceux qui sont finaux, suivant une distribution quelconque. Enfin, nous raisonnerons sur des automates accessibles, i.e. il existe une suite de transitions permettant de passer de l'état initial à n'importe quel autre état.

L'un de nos buts est la génération aléatoire d'éléments de cette classe, suivant la loi uniforme sur l'ensemble des automates de même taille (i.e. contenant le même nombre d'états). A travers cette étude concernant la génération, nous nous intéresserons également à l'énumération asymptotique de ces objets combinatoires.

## 2 Génération de tableaux

En 2000, C. Nicaud a démontré que les automates déterministes, complets, accessibles et sans états terminaux sont en bijection avec avec une classe de tableaux marqués : les  $k$ -tableaux étendus et réalisables de taille  $n$ . Il s'agit d'un couple de  $(kn + 1)$ -uplets d'entiers  $(X, Y)$  avec  $X = (x_0, \dots, x_{kn})$  et  $Y = (y_0, y_{kn})$  et vérifiant :

- $1 \leq y_i \leq x_i \leq n$  pour tout  $i \in \{0, \dots, kn\}$ ,
- $x_{i+1} - x_i \in \{0, 1\}$  pour tout  $i \in \{0, \dots, kn - 1\}$ ,
- si  $x_{i+1} - x_i = 1$  alors  $y_{i+1} = x_{i+1}$  pour tout  $i \in \{0, \dots, kn - 1\}$ ,
- $x_i \geq (i + 1)/k$  pour tout  $i \in \{0, \dots, kn - 1\}$ .

Nous présentons un exemple d'automate et de son tableau associé sur la Figure 1. On

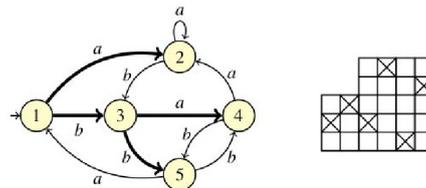


FIGURE 1 – Un automate et son tableau étendu associé

peut décomposer de manière récursive les tableaux réalisables, ce qui nous permet d'envisager une génération aléatoire par méthode récursive des automates déterministes et complets. Après un temps de pré-calcul en  $\Theta(n^2)$ , C. Nicaud a démontré que nous générons un automate en temps linéaire. Toutefois, cette génération nécessite l'usage d'entiers très grands ou alors, si nous avons recours au flottants, la génération n'est plus uniforme et cette perte est difficilement quantifiable.

### 3 Génération de partitions

Nous souhaitons établir une nouvelle bijection des automates vers d'autres objets qui sont des partitions de l'ensemble des couples (état de départ, transition) selon l'état d'arrivée. A tout automate correspond une partition. Par ailleurs les partitions associées à un automate déterministe, complet et accessible sont aisément repérables.

Un exemple d'automate et sa partition associée sont représentés sur la Figure 2. Nous di-

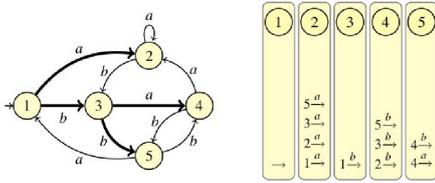


FIGURE 2 – Un automate et sa partition associée

rons qu'une partition est admissible, s'il s'agit d'une partition de  $(kn + 1)$  éléments en  $n$  parts. Afin de générer ce type d'objets, C. Nicaud s'est référé à l'article de Duchon *et al* [2] sur la génération de Boltzmann. C. Nicaud a prouvé que de nombreuses partitions sont admissibles. Expérimentalement, sur des partitions en 200 parts, environ 80% d'entre elles sont associées à un automate déterministe, complet et accessible. Par ailleurs, la méthode de Boltzmann nous donne une complexité de génération approchée en  $\Theta(n^{3/2})$ .

### 4 Génération d'applications

Voilà une autre méthode, relativement "naïve", permettant de générer uniformément des automates : pour chaque lettre de l'alphabet, il suffit de générer uniformément une application de l'ensemble des états dans lui-même. Seulement nous nous remarquons que la plupart des automates générés ne sont pas accessibles. Ainsi, en générant des automates de taille 1000, C. Nicaud a observé seulement 0.5% d'automates accessibles. De plus, cette proportion semble décroître lorsque la taille souhaitée augmente. En appliquant un résultat de Flajolet et Odlysko [3], C. Nicaud a prouvé qu'asymptotiquement, la proportion des automates accessibles était exponentiellement petite. Par conséquent, Cette méthode de génération,

avec rejet des automates non accessibles n'est pas efficace.

Toutefois, en écartant les états non accessibles depuis l'état initial, on obtient un automate nous intéressant. Le point délicat est le suivant : C. Nicaud a prouvé que la distribution des automates accessibles, issus d'un automate non accessible par cette méthode d'élagage est bien uniforme suivant la taille de l'objet obtenu. En outre, il existe une constante calculable  $\alpha$ , dépendant de la taille de l'alphabet, et telle que la distribution de la taille des automates accessibles, issus d'automates de taille  $n$  est concentrée autour de  $\alpha n$ . Enfin, C. Nicaud et A. Carayol viennent de prouver que cette méthode de génération a une complexité moyenne en  $\Theta(n^{3/2})$  pour une taille exacte et  $\Theta(n)$  en taille approchée.

En conclusion, C. Nicaud nous a présenté trois méthodes afin de générer des automates déterministes, complets et accessibles basées sur des bijections avec des tableaux, des permutations et des applications. A travers l'étude de ces générations, F. Bassino et C. Nicaud [1] ont pu expliciter l'asymptotique du nombre de tels automates :  $\Theta\left(\left\{\begin{matrix} kn + 1 \\ n \end{matrix}\right\}\right)$ , où  $\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\}$  est un nombre de Stirling de deuxième espèce énumérant les partitions.

### Références

- [1] F. Bassino and C. Nicaud. Enumeration and random generation of accessible automata. *Theor. Comput. Sci.*, 381(1-3) :86–104, 2007.
- [2] P. Duchon, P. Flajolet, G. Louchard, and G. Schaeffer. Boltzmann samplers for the random generation of combinatorial structures. *Combinatorics, Probability & Computing*, 13(4-5) :577–625, 2004.
- [3] Philippe Flajolet and Andrew M. Odlysko. Random mapping statistics. In *In Advances in Cryptology*, pages 329–354. Springer Verlag, 1990.
- [4] C. Nicaud. Analyse d'algorithmes et génération aléatoire en théorie des langages. Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, 2011.

# Catching the $k$ -NAESAT threshold

KONSTANTINOS PANAGIOTOU

*Séminaire de Combinatoire Philippe Flajolet  
Institut Henri Poincaré, Séance du 27 septembre 2012*

## 1 Problem statement

This presentation is focused on the random  $k$ -NAESAT problem, which is one of the standard benchmark problems in the theory of random Constraint Satisfaction Problems (CSPs). The input to the problem consists of a Boolean formula in  $k$ -conjunctive normal form ( $k$ -CNF). An assignment of values to the variables is called *not-all-equal satisfying* (NAESAT) if it is satisfying and there is no clause in which all literals are satisfied. Note that for any given  $k$ -clause there are  $2^k - 2$  assignments of the literals that satisfy the clause.

In the random setting, the problem is as follows: Suppose that  $x_1, \dots, x_n$  are the  $n$  random variables, and let  $m = \lceil cn \rceil$  for some real  $c > 0$ . Let  $F(n, m)$  denote a  $k$ -CNF formula with  $m$  clauses, where each clause is drawn uniformly at random from the set of all possible clauses. The central question one can ask in this context is for which  $c$  is  $F(n, m)$  NAE-satisfiable *with high probability* (whp)? This is called the *threshold* of random  $k$ -NAESAT.

## 2 Summary of previous work and contribution of this presentation

For the cases  $k = 1, 2$  the threshold is well understood. More generally, Friedgut [4] showed that there is a sharp threshold *sequence*  $c_k(n)$  such that if  $c < c_k(n)$  then  $F(n, cn)$  is satisfiable whp whereas if  $c > c_k(n)$  it is unsatisfiable whp. Achlioptas and Moore [2] gave upper and lower bounds for  $c_k(n)$  of the form  $2^{k-1} \ln 2 - \frac{1+\ln 2}{2} < c_k(n) < 2^{k-1} \ln 2 - \frac{\ln 2}{2}$ . The lower bound for  $c_k(n)$  was improved by Coja-Oghlan and Zdeborová [5] who showed that  $2^{k-1} \ln 2 - \ln 2 < c_k(n)$ . This left an additive gap of  $\frac{1}{2} \ln 2 \approx 0.347$  which this work closes. Namely, we showed that  $c_k(n)$  is equal to

$$2^{k-1} \ln 2 - \left( \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{4} \right) + \varepsilon_k$$

where  $\varepsilon_k < 2^{-k}$ .

This improvement, albeit modest at first sight, is conceptually significant for two reasons. First, we obtain (virtually) matching upper and lower bounds for the first time in a random CSP of this type. Second, we devise a rigorous method for understanding what happens at the so-called *condensation phase*, which occurs shortly before the threshold phase.

The  $k$ -NAESAT problem belongs in the class of random CSP problems (along with many other problems such as random  $k$ -SAT,  $k$ -coloring random graphs and 2-coloring random  $k$ -uniform hypergraphs). For random CSPs, statistical physicists have developed sophisticated but non-rigorous techniques, which, nevertheless, have provided a detailed picture about the structural properties and have helped raise many conjectures.

### 3 Shattering and condensation

What is the evolution of the solution space of  $k$ -NAESAT? To answer this, consider the following graph  $G_c$ . The vertices of  $G_c$  are all NAE-satisfying assignments of  $F_{n,cn}$ ; moreover, there is an edge between two solutions if and only if their Hamming distance is small, namely  $o(n)$ . Clearly, if  $c = 0$  then  $V$  contains all  $2^n$  assignments, and  $G_0$  is connected. On the other extreme, if  $c > c_k(n)$ , then  $G_c$  is empty whp.

There are two significant phases in the evolution of  $G_c$ , as  $c$  increases. The first phase, namely the *shattering* phase, occurs at about  $c_k/k$ . Here,  $G_c$  contains exponentially many clusters (hence the term “shattering”), with each cluster containing exponentially many assignments. Furthermore, the pairwise distance between clusters is roughly  $n/2$ . This phase is well-understood, thanks to previous work of Achlioptas and Ricci-Tersenghi [3] and Achlioptas and Coja-Oghlan [1]. In contrast, the *condensation* phase occurs at  $c = c_k - \left(\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}\right)$ , as demonstrated in previous work by Coja-Oghlan and Zdeborová [5].

This latter phase introduces significant difficulties in the analysis. Consider the following experiment. Suppose we choose two solutions uniformly at random from the set of NAE-satisfying assignments. In the shattering phase, we expect the Hamming distance between the solutions to be roughly  $n/2$ . However, in the condensation phase, this distance is very small, namely  $o_k(1)$ . Intuitively, this means that there are heavy correlations between solutions, which explains why previously known methods break down at the condensation threshold.

### 4 Outline of our approach

In order to tame the difficulties observed at the condensation phase, we need to address two separate problems. The first has to do with counting *atypical* assignments, namely assignments contained in small clusters. Physicists have already provided evidence that in almost all assignments in a cluster, most variables are *frozen*, i.e., they take the same value. The problem is that there is simply no way to tell whether a given variable is frozen: deciding this is NP-hard in the worst case. Instead, we are going to work with a simple parameter that turns out to be a good substitute for the frozen variables. To this end, observe that if a variable  $x$  is frozen, then there is at least one clause  $C$  such that if we assigned  $x$  the opposite value, then  $C$  would be violated. We call a variable *blocked* if it is contained in such a clause. We were able to show that most blocked variables are frozen, and thus suffices to count NAE-satisfying assignments with sufficiently many blocked variables.

To understand why we need to fix further parameters of the formula, let us define the degree  $d_x$  of a variable  $x$  as the number of times that  $x$  occurs in the random formula  $F$ . Let  $d = (d_x)_{x \in V}$  be the degree sequence of  $F$ . It is well known that in the “plain” random formula the degree of each variable is asymptotically Poisson with mean  $km/n$ . On the other hand, if we condition on some specific satisfying assignment that has “too many” blocked variables, then the degrees are not asymptotically Poisson anymore. Indeed, the degree  $d_x$  is the sum of the number  $s_x$  of clauses that  $x$  supports, and the number  $d'_x$  of times that  $x$  appears otherwise. While  $d'_x$  is asymptotically Poisson with mean smaller than  $km/n$  as the non-critical clauses do not affect the number of blocked variables at all,  $s_x$  is not, since it corresponds to an atypical outcome of a random experiment. The precise distribution of  $s_x$  is quite non-trivial, but it is not difficult to verify that  $s_x$  does not have a Poisson distribution.

## References

- [1] D. Achlioptas, A. Coja-Oghlan: Algorithmic barriers from phase transitions. Proc. 49th FOCS (2008) 793–802.
- [2] D. Achlioptas, C. Moore: Random  $k$ -SAT: two moments suffice to cross a sharp threshold. SIAM Journal on Computing **36** (2006) 740–762.
- [3] D. Achlioptas, F. Ricci-Tersenghi: On the solution space geometry of random constraint satisfaction problems. Proc. 38th STOC (2006) 130–139.
- [4] E. Friedgut: Hunting for sharp thresholds. Random Struct. Algorithms **26** (2005) 37–51
- [5] A. Coja-Oghlan, L. Zdeborová: The condensation transition in random hypergraph 2-coloring. Proc. 23rd SODA (2012), to appear.

February 3rd 2011, 14.00:  
*Arun Ram (Univ. Melbourne-Australia)*  
**Polytopes, shuffles, quivers and flags**  
Transcription by A. Sportiello

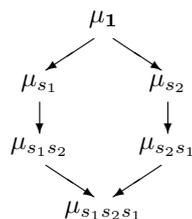
### Abstract

[by the Author] There are two geometries that show remarkable similarities: that of quiver varieties and that of affine flag varieties. By work of Braverman-Gaiitsgory and Gaussent-Littelmann and Kashiwara-Saito and Kamnitzer-Baumann one sees the crystals, in the sense of Kashiwara, coming from both quivers and flags. In the picture of Leclerc-Geiss-Schroer one sees how elements of the shuffle algebra come from quiver varieties. In joint work with A. Ghitza and S. Kannan we are seeing shuffle elements coming from affine flag varieties. Following my recent joint work Ghitza and Kannan, I will explain the purely combinatorial approach for seeing the moment polytopes and the shuffle elements.

## 1 Introduction

The beginning of my collaboration with Ghitza and Kannan was the confluence of our different expertises, with the aim of investigating possible relations among *global sections of the flag variety*  $H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$ , on which Kannan has worked for a long time, and *MV-cycles of type  $\lambda$* .

We will now define these objects, but before this let us first introduce the related concept of *MV polytope*. A good picture of such a structure is the classical diagram for the Bruhat order of the symmetric group over 3 elements<sup>1</sup>



This object is not still a polytope in the sense we are interested in (we have to associate “lengths” to the edges, and, to have a MV polytope, these lengths have to satisfy certain relations). Furthermore, we haven’t still made clear in which sense it is a polytope, and not just a polygon, i.e. where is the “interior”.

<sup>1</sup>Here and in the following,  $s_i$  denotes the transposition of  $i$  and  $i + 1$ .

We will come back on this later on, but for the moment just keep this picture in mind, of “how a MV polytope looks like”.

It is known that MV polytopes have a 1-to-1 relation with *column-strict Young Tableaux*, that is, tableaux looking like

1	1	1	2	3
2	2	3		
3	4			

This relation has been object of my interests for a long time. In particular, I tried to extend it to other Lie groups and root systems. However, in the following we will not specially make use of the relation between MV polytopes and column-strict tableaux. We will instead concentrate on the relation of these polytopes with three other “objects”: MV cycles  $Z_b$ , Pre-projective algebra modules  $\Lambda_b$ , and quiver Hecke algebra modules  $L_b$ . In a sense, an appropriate “shadow” operation on these objects, consisting in extracting a character, naturally leads to consider MV polytopes.

While this “shadow” procedure has been long investigated for the last two cases (in particular, by Kamnitzer and Baumann for pre-projective algebra modules, and by Lusztig, Kashiwara, Khovanov-Lauda and others for quiver Hecke algebra modules), the parallel construction for MV cycles was investigated so far, again by Kamnitzer, only up to a certain extent, and one of our original contributions to the picture is on this subject.

The character formulas are valued in an algebra of words (possibly, including a parameter  $q$ ). A remarkable aspect of the topic at hand is that, not obviously, they take value in a rather “tiny” subalgebra of the free algebra, the *Shuffle Algebra*  $\mathbb{C}[N]$ , that we go to define in the following section.

The character  $\text{ch}(L_b)$  is related to the construction of the so-called *dual canonical basis* in the shuffle algebra, and is primarily related to quantum groups. The character  $\text{ch}(\Lambda_b)$  is related to the construction of the *dual semi-canonical basis*. Also the character  $\text{ch}(Z_b)$  leads to the construction of a basis, that we will call *dual MV basis*.

## 2 The Shuffle Algebra

Let  $\mathcal{F}$  be the free associative algebra generated by the letters  $f_1, \dots, f_n$ . Thus, the generic monomials are nothing but finite *words* in this alphabet. The *shuffle product*  $\circ : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  is defined through its action on pairs of monomials. For  $u$  and  $v$  words of length  $k$  and  $\ell$  respectively,

$$u \circ v := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell} / \mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_\ell} \sigma(uv), \quad (1)$$

that is, we sum over all reorderings of the symbols  $u_1 \cdots u_k v_1 \cdots v_\ell$ , which preserve the ordering of  $u_i$ 's among themselves, and of  $v_j$ 's among themselves. For example,  $ab \circ cd$  consists of  $\binom{4}{2} = 6$  summands

$$ab \circ cd = abcd + acbd + acdb + cabd + cadb + cdab$$

that, if  $u$  and  $v$  contain the same letters, can get combined, e.g.

$$ab \circ ba = abba + abba + abab + baba + baab + baab = 2(abba + baab) + abab + baba .$$

The shuffle algebra  $\mathbb{C}[N]$  is the  $\circ$ -subalgebra generated by  $f_1, \dots, f_N$ . Note that it is indeed a non-trivial subalgebra, as not all words can be generated, but only certain combinations.

In our perspective, the generators  $f_1, \dots, f_N$  will correspond to the co-roots  $\alpha_i^\vee$  in the root system of a Lie Algebra. You can consider the example of  $A_n$  root systems, by taking  $\alpha_i \equiv \alpha_i^\vee = e_i - e_{i+1}$ , where  $e_i$  are vectors of a canonical basis of  $\mathbb{R}^{n+1}$ . The Weyl group is the symmetric group, in which transpositions  $s_i$  and the reversal operator  $w_0$  (the “bottom” element in the Bruhat lattice), are faithfully represented as

$$s_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} ; \quad w_0 = \begin{pmatrix} & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} .$$

The MV polytope corresponding to  $\text{ch}(L_b)$  is the convex hull of a collection of terms, corresponding to the set of possible paths. For example, if we have generators  $\alpha_1^\vee$  and  $\alpha_2^\vee$ , the character is  $\text{ch}(L_b) = f_1 f_2 \circ f_2 f_1 = abba + abba + abab + baba + baab + baab$ .

**[I don’t get the construction in the generic case. And by the way,  $f_1 f_2$  is not in the shuffle algebra!]**

The polytope  $b$  is then constructed by taking the convex hull of these six terms, where the two generators are represented as south-west and south-east arrows, and words are represented through concatenation of the elementary steps. In particular, from the terms above we obtain a sort of “filled hexagon”, that **[in which sense?]** corresponds to the hexagonal diagram shown at the beginning.

### 3 Quiver Hecke Algebra Modules

The *Khovanov-Lauda-Rouquier*, or *quiver Hecke algebra*  $R_d$  has generators

$$\{e_u\}_{u \text{ words of length } d}, \quad y_1, \dots, y_d, \quad \psi_1, \dots, \psi_d .$$

The words  $u$  of length  $d$  will be taken as basis vectors  $|u\rangle$  of a linear space, and the generators  $e_u$  are one-dimensional projectors, in particular they satisfy  $\sum_u e_u = 1$  and  $e_u e_v = \delta_{uv} e_u$ . Generators  $y_j$  are the analogous of Murphy elements in the symmetric group, in particular they commute among themselves, while the  $\psi_j$ ’s are the analogous of simple transpositions. There are several other

relations in the definition of the algebra, but let me skip a precise definition here. What I want to stress is the fact that  $R_d$  is  $\mathbb{Z}$ -graded. This should sound surprising, as it is notoriously hard to give a grading structure to the comparison counterpart, the symmetric group.

More precisely, for  $M$  a graded  $R_d$ -module,

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M[i] = \bigoplus_u \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} e_u M[i], \quad (2)$$

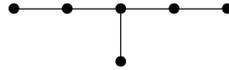
the character is

$$\text{ch}(M) = \sum_i \sum_u \dim(e_u M[i]) q^i |u\rangle, \quad (3)$$

i.e. a linear combination of words, which is an element of the  $q$ -shuffle algebra (an appropriate  $q$ -deformation of the shuffle algebra, with  $q = 1$  corresponding to the case defined above).

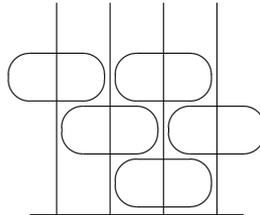
A result contained in a paper by Kleshchev and myself is the classification of the homogeneous simple  $R_d$ -modules.

One must consider Dynkin diagrams, such, e.g.,  $E_6$

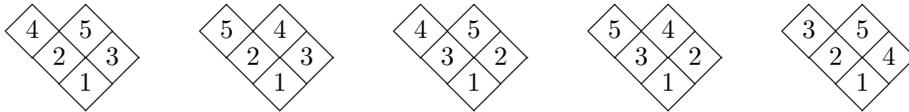


and interpret them as adjacency structures, for the construction of “heaps” (in the case of simply-laced diagrams, while in the non-simply-laced cases a more complicated ‘folding’ procedure is involved).

For example, for  $A_4$  we could have the heap



The module associated to this heap has dimension 5, which corresponds to the 5 possible ‘histories’ in the heap construction, conveniently encoded through (rotated) standard Young Tableaux



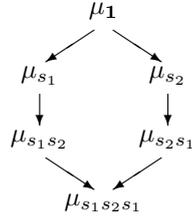
Then, the character  $\text{ch}(L_b)$  associated to the module is a linear combination of words associated to these diagrams, where, in the word, the  $i$ -th letter is  $f_j$  if, in the diagram, the entry  $i$  is in the  $j$ -th diagonal. In our example,

$$\text{ch}(L_b) = f_3 f_2 f_4 f_1 f_3 + f_3 f_2 f_4 f_3 f_1 + f_3 f_4 f_2 f_1 f_3 + f_3 f_4 f_2 f_3 f_1 + f_3 f_2 f_1 f_4 f_3.$$

Thus, this construction for the character of quiver modules is related to standard Young tableaux. As we will motivate in the following, quiver Hecke algebra modules are related to MV polytopes, that in turns are related to column-strict tableaux. Although apparently similar objects, these two families of tableaux quite seldomly get mixed in natural combinatorial constructions, and the subject at hand is a remarkable exception to this feature.

## 4 MV polytopes

A MV polytope  $b$  is defined as the convex hull of its vertices. The vertices are in bijection with the elements of a Weyl group  $W_0$ ,  $V = \{\mu_w\}_{w \in W_0}$ . Recall the  $\mathfrak{S}_3$  example we gave at the beginning



Consider a minimal-length path from the top ( $\mathbf{1}$ ) to the bottom ( $w_0$ ) of the lattice,  $w_0 = s_{i_1} s_{i_1} \cdots s_{i_N}$ . The  $i$ -perimeter, or *Lusztig parametrization* of  $b$  is the datum of a set of integer lengths along this path,

$$\text{per}_i(b) = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_N) \quad (4)$$

with, disregarding for a moment the rest of the diagram,

$$\mu_{\mathbf{1}} \xrightarrow{\ell_1} \mu_{s_{i_1}} \xrightarrow{\ell_2} \mu_{s_{i_1} s_{i_2}} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\ell_N} \mu_{w_0 = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_N}}$$

The set of lengths on any other path (that we could call “ $j$ -perimeter”) is then determined completely, through a construction of “local deformations” whose elementary moves are Coxeter moves  $R_{i+1}^{i+1}{}^i$  ( $i$  and  $i+1$  are names for adjacent sites on the Dynkin diagram, allusive to the  $A_n$  case) and  $R_i^j$  for  $i, j$  not adjacent on the Dynkin diagram, corresponding to the relations in the algebra  $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$  and  $s_i s_j = s_j s_i$  for  $i$  and  $j$  not adjacent. The local transformations are

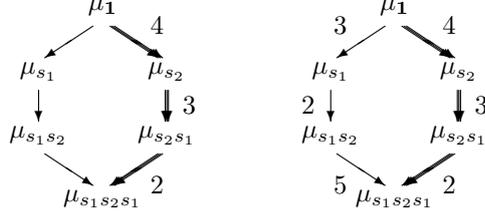
$$R_{i,j}^j(\ell_\alpha, \ell_{\alpha+1}) = (\ell_{\alpha+1}, \ell_\alpha); \quad (5)$$

$$R_{i,i+1}^{i+1}{}^i(\ell_\alpha, \ell_{\alpha+1}, \ell_{\alpha+2}) = (\ell_\alpha + \ell_{\alpha+1} - \hat{\ell}, \hat{\ell}, \ell_\alpha + \ell_{\alpha+1} - \hat{\ell}) \quad (6)$$

$$\hat{\ell} = \min(\ell_\alpha, \ell_{\alpha+2}).$$

It is a nice exercise to check that indeed also the second operation is an involution. In our example, taking as  $i$ -path the right-most one and as perimeter

$(\ell_1, \dots, \ell_3) = (4, 3, 2)$ , we obtain for the only other path the sequence  $(3, 2, 5)$ :



We are now ready to define completely a MV polytope: it is a polytope, whose vertices are constructed from a Weyl group in the way described above, together with a set of lengths satisfying the relations above.

We can give alternate generators  $\tilde{f}_i$ , called *crystal operators*, that have a simple increment action on the  $i$ -perimeter. If  $s_{i_a}$  is used at the  $a$ -th step of the  $i$ -path construction of  $w_0$ , and  $b$  has parametrization  $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_N)$ , then the new polytope  $\tilde{f}_{i_a} b$  has  $i$ -perimeter

$$\text{per}_i(\tilde{f}_{i_a} b) = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{a-1}, \ell_a + 1, \ell_{a+1}, \dots, \ell_N). \quad (7)$$

Thus, defining the polytope  $b_+$  composed of a single node and no intervals (corresponding to the trivial group containing only the identity), any polytope  $b$  can be constructed through an appropriate sequence of crystal operators

$$b = \tilde{f}_{i_1}^{c_1} \tilde{f}_{i_2}^{c_2} \dots \tilde{f}_{i_N}^{c_N} b_+ \quad (8)$$

[I don't get this... if the operator increases all the lengths of the steps using the same transposition, how do you get different lengths, e.g., for the first and third step in our example? what is the sequence of  $\tilde{f}$  that grows our example of  $\mathfrak{S}_3$  with  $(4, 3, 2)$  starting from  $b_+$  ?]

## 5 MV cycles

Call  $\mathbb{C}((t))$  the set of Laurent formal power series with complex coefficients,

$$\mathbb{C}((t)) = \{a_{-c} t^{-c} + a_{-c+1} t^{-c+1} + \dots\}_{a_i \in \mathbb{C}, -c \in \mathbb{Z}}. \quad (9)$$

We will then consider a group  $G$  of matrices with coefficients in this field. For simplicity just assume that  $G = \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C}((t)))$ , but our construction would work also for generic Kac-Moody Algebras. Within  $G$ , consider the subgroup of lower-triangular matrices with 1's on the diagonal,

$$\mathcal{U}^- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq G$$

with generators

$$y_i(at^j) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & 0 & \\ \text{\scriptsize } i\text{-th row} & & at^j & 1 & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Furthermore, use the shortcut  $\mathcal{K}$  for our field  $\mathbb{C}((t))$ <sup>2</sup>

Define the diagonal matrices  $t_{\lambda^\vee} := \text{diag}(t^{\lambda_i})$ , with  $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ .

Clearly,  $G/\mathcal{K}$  is the loop Grassmannian, and Cartan or Iwasara decompositions are essential tools to have control over it. The first choice corresponds to describe  $G$  as

$$G = \bigsqcup_{\lambda^\vee} \mathcal{K} t_{\lambda^\vee} \mathcal{K}, \quad (10)$$

while the second choice gives

$$G = \bigsqcup_{\mu^\vee} \mathcal{U}^- t_{\mu^\vee} \mathcal{K}. \quad (11)$$

The *Mirković-Vilonen cycles* of type  $\lambda^\vee$  and weight  $\mu^\vee$ , (i.e., the MV cycles), are the irreducible components  $Z_b$  in the space (closure operation is understood)

$$Z_b \in \text{Irr}(\mathcal{K} t_{\lambda^\vee} \mathcal{K} \cap \mathcal{U}^- t_{\mu^\vee} \mathcal{K}). \quad (12)$$

They are a natural object if one is interested in the question of which cosets are contained in the intersection. In particular, the  $Z_b$ 's contain the information on their subgroups.

It is a result of Kamnitzer that MV-cycles are indexed by MV-polytopes  $b$ . Furthermore, by Baumann and Gaussent we have a parallel between the “growth” construction on the polytope, and an analogous construction on the cycle. If

$$b = \tilde{f}_{i_1}^{c_1} \tilde{f}_{i_2}^{c_2} \cdots \tilde{f}_{i_N}^{c_N} b_+, \quad (13)$$

then, a single step of the growth process is expressed in terms of the generators  $y_i(at^j)$

$$Z_b = y_{i_1}(t^{e_1} \mathbb{C}[t^{-1}]_{c_1}^* ). \quad (14)$$

<sup>2</sup>[I actually missed the definition of  $\mathcal{K}$ ]... after some desperate google search (for “loop grassmannian”), I found:

Sergey Arkhipov; Roman Bezrukavnikov; Victor Ginzburg  
*Quantum groups, the loop Grassmannian, and the Springer resolution*,  
 J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), 595-678.

<http://www.ams.org/journals/jams/2004-17-03/S0894-0347-04-00454-0/>

that, on bottom of page 41, states: — Let  $\mathcal{K} = \mathbb{C}((z))$  be the field of formal Laurent power series, and  $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[z]] \subset \mathcal{K}$  its ring of integers, that is, the ring of formal power series regular at  $z = 0$ . Write  $G^\vee(\mathcal{K})$ , resp.  $G^\vee(\mathcal{O})$ , for the set of  $\mathcal{K}$ -rational, resp.  $\mathcal{O}$ -rational, points of  $G^\vee$ . The coset space  $\text{Gr} := G^\vee(\mathcal{K})/G^\vee(\mathcal{O})$  is called the *loop Grassmannian*. — With the hope that this article follows the same notations as the speaker, I will thus assume this in the following.

Here  $e_j$  is just the scalar product

$$e_j = \langle \alpha_{i_j}, -c_{j+1}\alpha_{i_{j+1}}^\vee - \cdots - c_N\alpha_{i_N}^\vee \rangle \quad (15)$$

and the space  $\mathbb{C}[t^{-1}]_c^*$  is the linear space of polynomials of degree  $c$  in  $t^{-1}$ , with no constant term. Thus, it has dimension  $c$ . In particular, the dimension of a  $Z_b$  cycle is calculated in a straightforward way.

Thus, let  $Z_b$  be a cycle of dimension  $d$ . The analogous of the growth process is called here a *composition series*. It is a choice  $(i_1, \dots, i_d; j_1, \dots, j_d)$  such that  $Z_b$  is the space

$$Z_b = \{y_{i_1}(a_1 t^{j_1}) \cdots y_{i_d}(a_d t^{j_d}) \mathcal{K}\}_{a_1, \dots, a_d \in \mathbb{C}^*}. \quad (16)$$

Then, the character of  $Z_b$  is the generating function of the composition series of  $b$

$$\text{ch}(Z_b) = \sum_{(i_1, \dots, i_d; j_1, \dots, j_d)} f_{i_1} \cdots f_{i_d}, \quad (17)$$

which is again an element in the Shuffle Algebra.

# Automatic Proofs of Identities

Bruno Salvy

summary of the talk by Flavia Stan

Séminaire Philippe Flajolet. May 26, 2011

## Abstract

We present the ideas behind algorithmic proofs of identities involving sums and integrals of large classes of special functions. Recent results allowed a new extension of the class of holonomic functions.

## 1 Introduction

Dictionaries of mathematical formulas like Abramowitz and Stegun's *Handbook of Mathematical Functions* are among the most cited and used by scientists. This type of collections were traditionally prepared, checked and proof-read by specialists from various domains. With the development of computer algebra systems, algorithms lead to error-free and automatic ways to generate, manipulate and prove entries from these tables. However, the implementation of special functions in systems like Maple or Mathematica still relies heavily on table look-up techniques.

The latest step in the evolution of these handbooks is combining the way information can be retrieved from a website, as a front-end to computer algebra algorithms. The Dynamic Dictionary of Mathematical Functions (DDMF)<sup>1</sup> is a project employing these two aspects. Its end-result is a website containing interactive tables of properties for various special functions. All formulas and graphics are generated in real-time by computer algebra routines. This web-interaction is flexible enough, for example, to deliver more digits of numerical values for which correctness is guaranteed or generate and display proofs of various properties.

The symbolic computation engine behind the DDMF is based on very recent algorithms [2, 7] as well as on standard Maple routines. Procedures from the package `gfun` [8] are used heavily to manipulate differential and recurrence relations satisfied by holonomic functions. A version of `gfun` is integrated in the Maple system.

In the DDMF, mathematical functions are modeled as linear differential or recurrence equations coupled with finite sets of initial values. Functions or sequences that can be viewed as solutions of such linear relations constitute about 25% of Sloane's *Encyclopedia of Integer Sequences* and, more importantly, 60% of Abramowitz and Stegun's handbook. Based on

---

<sup>1</sup><http://ddmf.msr-inria.inria.fr/>

this data structure, computer algebra algorithms can determine and prove identities involving a large variety of special functions.

Initiated by Zeilberger, the method of creative telescoping leads to automatic proofs of special function identities. It was first applied to definite summation problems with hypergeometric summands [10, 9] and later to holonomic systems of differential and difference equations [11, 6]. We extend its input class with types of non-holonomic functions [5].

In this talk we present the ideas which lie at the foundation of algorithms for proving special functions identities, i.e., confinement in finite dimension and creative telescoping. We also discuss our extension of these algorithms to classes of non-holonomic functions.

## 2 Confinement in finite dimension

Given  $k + 1$  vectors  $v_0, v_1, \dots, v_k$  from a  $k$ -dimensional vector space over a field  $F$ , there exists an identity

$$c_0 v_0 + c_1 v_1 + \dots + c_k v_k = 0$$

with coefficients in  $F$ . This simple idea can be exploited to find difference or differential equations satisfied by certain classes of functions. For this we will confine the function and all its derivatives, respectively its shifts, in a vector space of finite dimension.

For example, to prove the identity

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

we consider the function  $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x - 1$  and show that it satisfies a linear differential equation of order at most 4.

Since both  $\sin$  and  $\cos$  are defined by the differential equation  $y'' + y = 0$  (but different sets of initial values), the functions  $\sin^2$  and  $\cos^2$  will also be defined by a common differential equation. Indeed, by induction we see that  $y^2$  and all its derivatives belong to the vector space generated by  $\{y^2, yy', y'^2\}$ . Thus  $y^2$  is the solution of an order 3 differential equation, independent of any initial conditions. This equation is therefore satisfied by  $\sin^2, \cos^2$  and their sum.

This means, the sum of squares and all its derivatives are confined in a vector space of dimension 3. Additionally, the constant function is a solution of  $y' = 0$ . Since derivation is a linear operation, the function  $f(x)$  and its derivatives belong to a vector space of dimension 4, i.e., the sum of the dimensions determined above. This implies that  $f$  solves a differential equation of order at most 4. Using Cauchy's theorem, the proof is completed by checking 4 initial values, e.g., by the Maple call

$$\begin{aligned} &> \text{series}(\sin^2 x + \cos^2 x - 1, x, 4); \\ &\quad O(x^4). \end{aligned}$$

By a similar dimension argument, Cassini's identity for the Fibonacci numbers  $F_n$  can be proven. For this purpose, it suffices to check whether the first 5 initial values of the function  $f(n) = F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} + (-1)^n$  are zero.

The crucial point in the proof was the dimension argument which led to the existence of a differential equation for the squares and the sums of functions involved. This type of closure properties follow along the same lines for the entire class of  $\partial$ -finite functions which we shortly discuss in the following section.

## 2.1 Gröebner bases in Ore algebras

Let us consider an example in several variables for identities obtained with the confinement method. Going back to Gauß (1812), the contiguity relations for the hypergeometric series

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n$$

are recurrences involving the shifts with respect to the parameters  $a, b, c$ . Here, the Pochhammer symbol  $(x)_n$  denotes the rising factorial  $x(x+1)\dots(x+n-1)$  for  $n \in \mathbb{N}$  and  $x \in \mathbb{C}$ .

Contiguity relations result from confining  $F$ , its derivatives with respect to  $z$  and its shifts in the other parameters to a vector space of finite dimension. For example, let  $u_{a,n}$  denote the hypergeometric term of the series  $F$ . From the ratios  $\frac{u_{a,n+1}}{u_{a,n}}$  and  $\frac{u_{a+1,n}}{u_{a,n}}$  two mixed difference-differential equations follow

$$z(1-z)F'' + (c - (a+b+1)z)F' - abF = 0,$$

$$S_a F = \frac{z}{a} F' + F \text{ with } S_a F := F(a+1, b; c; z).$$

By induction we see that all higher order shifts and derivatives can be expressed via the two equations in terms of elements from the set  $\{F, F'\}$ .

The general framework for studying mixed difference-differential equations is that of Ore algebras [6], denoted by  $\mathcal{A} = \mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_n \rangle \langle \partial_1, \dots, \partial_n \rangle$  where  $\mathbb{K}$  is a field. The  $\partial_{x_i}$ 's represent either a derivation operator  $D_{x_i}$ , a shift operator  $S_{x_i}$  or a more general Ore operator with respect to the variable  $x_i$ .

Back to our example, we consider the left ideal  $\mathcal{I}$  spanned by the two difference-differential operators in  $\mathcal{A} = \mathbb{Q}\langle a, b, c, z \rangle \langle \partial_z, S_a \rangle$ . Since all higher order shifts and derivatives of  $F$  can be expressed using the two equations,  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$  has vector-space dimension 2 over  $\mathbb{Q}\langle a, b, c, z \rangle$ . Therefore  $S_a^2 F, S_a F$  and  $F$  must be linearly dependent. By simple linear algebra we arrive at the contiguity relation

$$(a+1)(z-1)S_a^2 F + ((b-a-1)z + 2 - c + 2a)S_a F + (c-a-1)F = 0.$$

In the same way we prove Mehler's identity for Hermite polynomials

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)H_n(y) \frac{u^n}{n!} = \frac{1}{\sqrt{1-4u^2}} \exp\left(\frac{4u(xy - u(x^2 + y^2))}{1-4u^2}\right).$$

Since the computations become more involved we call procedures from the package `gfun`.

Other computations of this type are facilitated by the use of Gröbner bases in the setting of Ore algebras [6]. Generalizing both Gaussian elimination to find linear dependence between vectors and Euclidean division from univariate polynomials, Gröbner bases can be used to find unique representations of elements in these more complicated structures in terms of finitely many generators.

To define the Gröbner basis of an ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ , we introduce a well order on the set of monomials in the  $\partial_{x_i}$ 's. Additionally,  $1 = \partial_{x_1}^0 \dots \partial_{x_n}^0$  has to be its minimal element. A Gröbner basis of the (left) ideal  $\mathcal{I}$  can be visualized as the corners of a staircase in the multidimensional lattice  $\mathbb{N}^n$ . Elements of the algebra modulo this ideal  $\mathcal{I}$  can be written as linear combinations of the monomials under the staircase. To find a unique representation of an element in  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ , we use a generalized Euclidean division algorithm with respect to the given Gröbner basis of the ideal. This unique remainder is called the normal form of the given element.

When the set of monomials under the staircase is finite,  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$  is the finite dimensional vector space over  $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$  generated by these monomials. In this case  $\mathcal{I}$  is called  $\partial$ -finite and all computations modulo this ideal can be formulated in terms of linear algebra. For an infinite dimensional vector space  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$  we generalize the notion of dimension using the Hilbert function. This generalization defines a  $\partial$ -finite ideal as zero-dimensional.

The set of operators annihilating a given function  $f$  has the algebraic structure of a left ideal and is denoted by  $\text{ann} f$ . When its annihilating ideal is  $\partial$ -finite, we also refer to the function as  $\partial$ -finite. Functions of this type include, for instance, the classical orthogonal polynomials considered with respect to the shift operator in the index and differentiation in the argument. The hypergeometric series of the previous example also fulfill this property. On the other hand, the Stirling numbers  $S_2(n, k)$  are not  $\partial$ -finite. Their annihilating ideal is generated by the relation

$$S_2(n, k) = S_2(n-1, k-1) + kS_2(n-1, k)$$

and has Hilbert dimension 1 in  $\mathbb{Q}(n, k) \langle \partial_n, \partial_k \rangle$ .

Using dimensional arguments similar to the ones from the proofs of the above identities, we find the following closure properties for the class of  $\partial$ -finite functions

$$\begin{aligned} \dim \text{ann}(f + g) &\leq \max(\dim \text{ann} f, \dim \text{ann} g), \\ \dim \text{ann}(fg) &\leq \dim \text{ann} f + \dim \text{ann} g, \\ \dim \text{ann} \partial f &\leq \dim \text{ann} f. \end{aligned}$$

The Maple package `Mgfun` [3] implements closure properties in the  $\partial$ -finite case together with algorithms for computing generators of these ideals. It also includes an extension of Zeilberger's creative telescoping method to  $\partial$ -finite ideals [4]. We discuss these aspects in the next section.

### 3 Creative telescoping

To illustrate the idea of creative telescoping we prove the identity

$$I_n := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

by rewriting Pascal's triangle as

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} - \binom{n}{k}$$

and summing over all  $0 \leq k \leq n+1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Solving the first order recurrence  $I_{n+1} = 2I_n$  and checking an initial condition completes the proof. In general, we have a recurrence for the sum

$$F_n = \sum_k u_{n,k} \tag{1}$$

provided one can determine operators  $A(n, S_n)$  and  $B(n, k, S_n, S_k)$  such that

$$(A(n, S_n) + \Delta_k B(n, k, S_n, S_k)) u_{n,k} = 0.$$

Using the telescoping property of the forward-difference operator  $\Delta_k$  and assuming a summand having finite support included in the summation range, we obtain a homogeneous recurrence for the sum  $A(n, S_n)F_n = 0$ .

Similarly, in the integration case,

$$I(x) := \int_{\Omega} u(x, y) dy, \tag{2}$$

we obtain a differential equation after determining operators  $A(x, \partial_x)$  and  $B(x, y, \partial_x, \partial_y)$  satisfying

$$(A(x, \partial_x) + \partial_y B(x, y, \partial_x, \partial_y)) u(x, y) = 0.$$

Creative telescoping can be viewed as an algorithmic combination of differentiation under the integral sign and integration by parts. Let us prove here that the equation  $zJ_0'' + J_0' + zJ_0 = 0$  together with the initial value  $J_0(0) = 1$  define the Bessel function

$$J_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos zt}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

By successive differentiation under the integral sign, we have

$$\begin{aligned} I(z) &= \int_0^1 \frac{\cos zt}{\sqrt{1-t^2}} dt, & I'(z) &= \int_0^1 -t \frac{\sin zt}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ I''(z) &= -I(z) + \int_0^1 \sqrt{1-t^2} \cos zt dt. \end{aligned}$$

After integration by parts, the last identity leads to the desired differential equation.

$$\begin{aligned} I''(z) + I(z) &= \sqrt{1-t^2} \frac{\sin zt}{z} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\sin zt}{z} dt \\ &= \int_0^1 \partial_t \left( \frac{1-t^2}{zt} \partial_z \right) \frac{\cos zt}{\sqrt{1-t^2}} dt - \frac{I'(z)}{z}. \end{aligned}$$

We denote by  $A(z, \partial_z) = z\partial_z^2 + \partial_z + z$  the operator from the Ore algebra  $\mathbb{Q}(z) \langle \partial_z \rangle$ . In this way we found that  $A(z, \partial_z) - \partial_t \frac{1-t^2}{t} \partial_z$  belongs to the annihilating ideal of the integrand of  $I(z)$ .

Note that several non-algorithmic aspects were involved in the approach. For a large class of integrals, it is not clear how to integrate by parts, in particular, which parts to choose. Additionally, a bound for the degree of the differential equation is not known. This last issue means that termination of the method is not guaranteed.

In the general setting of the integral (2) the input of the creative telescoping method are operators belonging to the annihilating ideal of the integrand  $u$ . These operators generate an ideal  $\mathcal{I}$  in the Ore algebra  $\mathbb{Q}(x, y) \langle \partial_x, \partial_y \rangle$ . The output are operators  $A, B$  from this algebra such that the relation  $A - \partial_y B$  annihilates  $u$  and  $A \in \mathbb{Q}(x) \langle \partial_x \rangle$ . The summation problem (1) can be formulated in similar terms. In other words, we search for the set of telescopers of the ideal  $\mathcal{I}$  with respect to  $y$ , denoted by

$$T_y(\mathcal{I}) := (\mathcal{I} + \partial_y \mathbb{Q}(x, y) \langle \partial_x, \partial_y \rangle) \cap \mathbb{Q}(x) \langle \partial_x \rangle.$$

An extension of Zeilberger's fast algorithm to  $\partial$ -finite functions is presented in [3, 6]. It proceeds by making an ansatz for the operators  $A, B$  and computing the normal form of  $Q := A - \partial_y B \in \mathcal{I}$  with respect to a given Gröbner basis  $\mathcal{G}$  of the ideal  $\mathcal{I}$ . Since the operator  $Q$  is confined to the annihilating ideal  $\mathcal{I}$ , all coefficients of its normal must be zero. This leads to a coupled system of equations for the unknown coefficients of the operators  $A$  and  $B$ .

In the  $\partial$ -finite case, the operator  $B$  can be written as a linear combination of the monomials under the staircase of  $\mathcal{G}$ . We proceed by increasing the total degree in the ansatz for  $A$  till a solution for the resulting system of equations is found. This procedure is guaranteed to terminate if we start with an integrand  $u$  from Zeilberger's class of holonomic functions for which  $T_y(\mathcal{I})$  is non-trivial.

In [5] the algorithm was extended to types of non-holonomic functions. We introduce a new class of functions and give an upper bound for the dimension of  $T_y(\mathcal{I})$  which provides termination of the approach.

Let us go back to the simple example of Pascal's identity for the sequence of summands  $\binom{n}{k}_{n, k \geq 0}$ . To discover this identity algorithmically we want to find the operator  $S_n S_k - S_k - 1$  in the annihilating ideal of  $\binom{n}{k}$ . We start with a Gröbner basis of this ideal which has leading terms  $\{S_n, S_k\}$  and only the minimal monomial under the resulting staircase. Reducing all monomials of degree  $s \leq 2$

$$1 \rightarrow 1, \quad S_n \rightarrow \frac{n+1}{n+1-k} 1, \quad S_k \rightarrow \frac{n-k}{k+1} 1, \quad S_n S_k \rightarrow \frac{n+1}{k+1} 1,$$

$$S_n^2 \rightarrow \frac{(n+1)(n+2)}{(n+1-k)(n+2-k)} 1, \quad S_k^2 \rightarrow \frac{(n-k)(n-k-1)}{(k+1)(k+2)} 1$$

we compute their common denominator

$$D_2 = (k+1)(k+2)(n+1-k)(n+2-k).$$

All operators  $D_2 S_n^\alpha S_k^\beta$  for  $\alpha + \beta \leq 2$  are confined in the vector space over  $\mathbb{Q}(n)$  generated by  $\{1, k, k^2, k^3, k^4\}$ . The linear dependency between these operators will deliver the identity we want to prove.

Additionally, this technique leads to a sequence of polynomials with the property  $\deg D_s = O(s)$ . On the other hand the number of operators  $S_n^\alpha S_k^\beta$  with  $\alpha + \beta \leq s$  is given by  $\binom{s+2}{2}$  and behaves like  $O(s^2)$  as  $s$  tends to infinity. Since the number of operators will eventually exceed the dimension of the vector space confining them, an identity can be found. This property holds for all holonomic functions.

More generally we define the notion of polynomial growth for an ideal  $\mathcal{I} \subset \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n) \langle \partial_1, \dots, \partial_n \rangle$  with respect to a given graded order. This means the existence of a sequence of polynomials  $P_s \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  such that for all monomials  $\partial_1^{a_1} \dots \partial_n^{a_n}$  with  $\sum_{i=1}^n a_i \leq s$  the operator  $P_s \partial_1^{a_1} \dots \partial_n^{a_n}$  has a normal form with polynomial coefficients of degrees  $O(s^p)$  with respect to the Gröbner basis of  $\mathcal{I}$ . In this case the ideal has polynomial growth  $p$  in the graded order used for the computation of the Gröbner basis.

The main result from [5] is a bound on the dimension of the ideal  $T_y(\mathcal{I})$ . Namely, if  $\mathcal{I}$  has polynomial growth  $p$  with respect to a given graded order, we have

$$\dim T_y(\mathcal{I}) \leq \max(\dim(\mathcal{I}) + p - 1, 0).$$

As soon as the bound on the right-hand side of this inequality is smaller than the number of variables remaining after integration or summation, a non-trivial identity exists and can be found.

For instance, coming back to the Stirling numbers of the first and second kind we obtain annihilating ideals of dimension 1 and polynomial growth 1. Using the above bound on the telescoping ideal, we can algorithmically find Frobenius identity

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{m-k} k! \binom{n-k}{m-k} S_2(n+1, k+1) = S_1(n, m).$$

## 4 Conclusions

In the Dynamic Dictionary of Mathematical Functions (DDMF) project [1], linear differential or difference equations together with finite sets of initial values form data structures for storing and manipulating special functions. The main goal of the project is that all formulas in this library are generated and proven dynamically through summation and integration algorithms. We present the foundations of these algorithms, namely the idea of confinement in finite dimension and the method of creative telescoping. We also discuss our extension of their input class to include non-holonomic functions.

Our generalized algorithms rely on the notion of polynomial growth defined in [5]. For an arbitrary ideal in an arbitrary Ore algebra, it is not clear how to determine its polynomial growth algorithmically. Future research will focus on this open question by reducing the notion of polynomial growth to an intrinsic property of the given ideal.

## References

- [1] BENOIT, A., CHYZAK, F., DARRASSE, A., GERHOLD, S., MEZZAROBBA, M., AND SALVY, B. The Dynamic Dictionary of Mathematical Functions (DDMF). In *Proceedings of ICMS'10* (2010), vol. 6327 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 35–41.
- [2] BENOIT, A., AND SALVY, B. Chebyshev expansions for solutions of linear differential equations. In *Proceedings of ISSAC'09* (2009), ACM, pp. 23–30.
- [3] CHYZAK, F. *Fonctions holonomes en calcul formel*. Thèse universitaire, École polytechnique, 1998. INRIA, TU 0531. 227 pages.
- [4] CHYZAK, F. An extension of Zeilberger’s fast algorithm to general holonomic functions. *Discrete Mathematics* 217, 1-3 (2000), 115–134.
- [5] CHYZAK, F., KAUSERS, M., AND SALVY, B. A Non-Holonomic Systems Approach to Special Function Identities. In *Proceedings of ISSAC'09* (2009), ACM, pp. 111–118.
- [6] CHYZAK, F., AND SALVY, B. Non-commutative elimination in Ore algebras proves multivariate holonomic identities. *Journal of Symbolic Computation* 26, 2 (1998), 187–227.
- [7] MEZZAROBBA, M., AND SALVY, B. Effective bounds for P-recursive sequences. *Journal of Symbolic Computation* 45, 10 (2010), 1075–1096.
- [8] SALVY, B., AND ZIMMERMANN, P. Gfun: a Maple package for the manipulation of generating and holonomic functions in one variable. *ACM Transactions on Mathematical Software* 20, 2 (1994), 163–177.
- [9] WILF, H. S., AND ZEILBERGER, D. An algorithmic proof theory for hypergeometric (ordinary and “ $q$ ”) multisum/integral identities. *Invent. Math.* 108, 3 (1992), 575–633.
- [10] ZEILBERGER, D. A fast algorithm for proving terminating hypergeometric identities. *Discrete Math.* 80, 2 (1990), 207–211.
- [11] ZEILBERGER, D. A holonomic systems approach to special functions identities. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 32, 3 (1990), 321–368.

# Mots, chemins, arbres, cartes

*Gilles Schaeffer*

Résumé par *Charles Delorme*

Séminaire de combinatoire énumérative et analytique de l'IHP - 2010-11

## Résumé

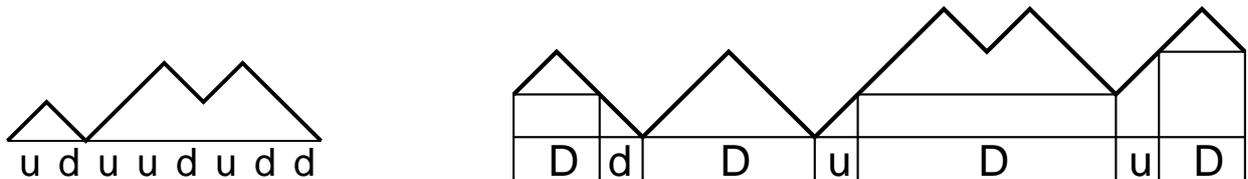
L'exploration d'un chemin permet d'en donner un codage par un mot. L'exploration d'un arbre plan permet d'en donner un codage par un chemin. L'exploration d'une carte plane permet d'en donner un codage par un arbre.

Ces assertions couvrent plusieurs énoncés précis de bijections entre différentes familles de chemins, d'arbres et de cartes, donc certaines obtenues encore tout récemment. Ces bijections ont de multiples applications, de la génération aléatoire au dessin automatique de graphes, en passant par la conception de structures de données compactes et l'étude des distances dans les grandes cartes aléatoires.

Mon but sera cependant plutôt de montrer l'élégance de ces résultats et des formules qui en résultent. Ceci sera l'occasion de vanter quelques outils bijectifs classiques : mots bien parenthésés, lemme cyclique, parcours en largeur et en profondeur, orientations minimales.

## 1 Mots et chemins

Les chemins formés de pas vers la droite, avec à chaque fois une montée ou une descente se codent avec des mots sur l'alphabet  $\{u, d\}$ . On s'intéresse, entre autres à ceux qui partant de 0 aboutissent à 0 sans passer sous le niveau de départ : mots de Dyck. Ils se décrivent, en notant le premier passage en 0 après le départ par la règle  $D = \{\} + uDdD$ , ce qui fournit une manière de les compter (parmi bien d'autres), la fonction génératrice est  $f(z) = 1 + z^2 f(z)^2$  (un  $z$  pour la première montée, un pour la descente qui précède le premier retour en 0). Ce qui livre le nombre de ces mots de longueur  $2n$  par application du binôme de Newton  $[z^t](f) = \binom{2n}{n} / (n+1)$ , les fameux nombres de Catalan.



Les chemins qui partant du niveau  $\ell$  descendent au niveau 0, sans passer en dessous de 0 arrivent au niveau  $k$  en  $n$  pas (avec  $n+k+\ell$  pair), se décrivent avec une suite de  $\ell$   $d$  puis  $k$   $u$  intercalés entre  $k+\ell+1$   $D$  (voir figure avec  $\ell = 1$  et  $k = 2$ ) d'où la série génératrice  $z^{k+\ell} f(z)^{k+\ell+1}$ . Le coefficient de  $z^{2n}$  dans  $f(z)^k$  est  $\binom{2n+k-1}{n} \frac{k}{n+k}$ .

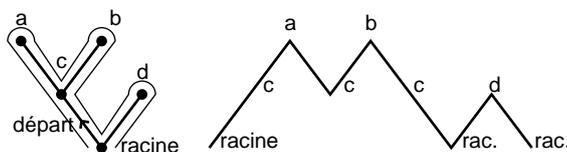
Une application : le potentiel d'une marche aléatoire avec à chaque instant probabilité  $p$  de monter, et  $q = 1-p$  de descendre d'un cran, avec chute et noyade dans la rivière locale en passant

au dessous de 0. Le potentiel est l'espérance du nombre de passages en  $\ell$  en partant de  $k$  : c'est donc  $\sum_{t=0}^k C^{2t+1}(pq)^t p^{\ell-k}$  si  $\ell \geq k$  et  $\sum_{t=0}^{\ell} C^{2t+1}pq^t q^{k-\ell}$  si  $k \geq \ell$ , avec  $C = (1 - \sqrt{1 - 4pq})/(2pq)$ .

Une autre technique est une occurrence du lemme cyclique de Raney (on peut en voir une variante dans [4, p. 345-346]). On compte tous les mots de longueur  $2n + 1$  avec  $n$  montées et  $n + 1$  descentes. Il y en a  $\binom{2n+1}{n}$ . En permutant circulairement les lettres, on tombe sur exactement un mot qui soit un mot de Dyck suivi d'une descente, celui où "les montées sont le mieux groupées vers le début" : il y en a donc  $\binom{2n+1}{n}/(2n + 1) = \binom{2n}{n}/(n + 1)$ .

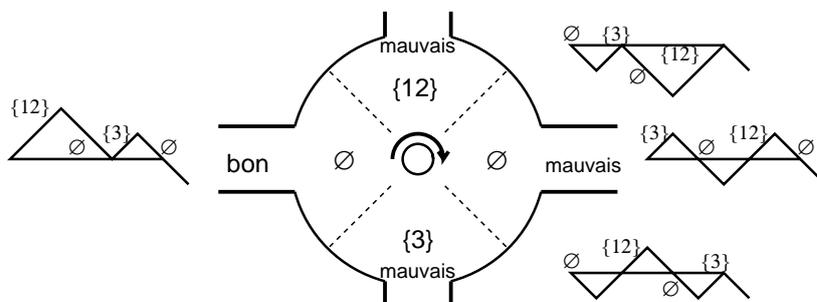
## 2 Chemins et arbres

On fait aisément apparaître une bijection entre les chemins de Dyck de longueur  $2n$  les arbres à  $n$  arêtes placés dans le plan (avec racine et arête de départ) : on fait le tour de l'arbre en le laissant à droite, et on enregistre si à chaque passage près d'un sommet on s'est éloigné ou rapproché de la racine.



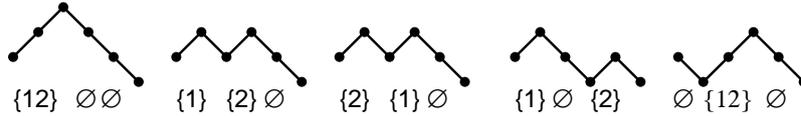
## 3 Chemins et fonctions de stationnement

. On a un parc circulaire à  $n$  places et un accès. Il y a  $n$  voitures à garer. Chaque voiture choisit au préalable une place. Si lorsqu'elle arrive sa place est déjà prise, elle prend la première place disponible après la sienne. Les bonnes fonctions sont celles qui garantissent que, quelque soit l'ordre d'arrivée des voitures, elles pourront se garer selon cette règle. Ceci ne marche bien sûr que si les places choisies sont plutôt vers les premières et que l'accès reste libre. On peut, en remplaçant la fonction  $f$  par  $f + k \pmod{n + 1}$  (autrement dit en faisant tourner le chemin d'arrivée au parc), garantir l'existence d'une et une seule bonne fonction parmi les  $n + 1$  de la forme  $f + k \pmod{n + 1}$ ,  $0 \leq k \leq n$ .



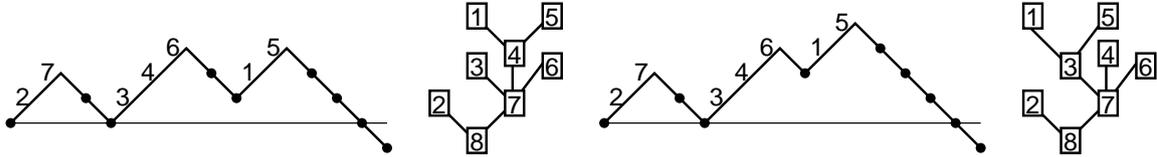
Il y a en tout  $(n + 1)^n$  fonctions, donc  $(n + 1)^{n-1}$  bonnes fonctions. En effet l'on peut attacher à chaque fonction un chemin : si la place (ou accès)  $i$  est choisie par  $u$  voiture, on met  $u$  montées, puis une descente. On a donc en tout  $n$  montées qui correspondent aux  $n$  voitures et  $n + 1$  descentes.

Pour  $n = 2$ , voici les 3 fonctions acceptables, puis deux parmi les 6 mauvaises, avec les chemins correspondants : à chaque case est attachée son image réciproque par  $f$ .



Ce nombre  $(n + 1)^{n-1}$  évoque irrésistiblement celui des arbres étiquetés à  $n + 1$  sommets.

On va numéroter les montées du chemin avec les valeurs de la fonction en ordre croissant et bâtir un arbre étiqueté, où la racine est repérée par la plus haute étiquette, comme le montrent les deux exemples : qui suivent



## 4 Cartes et arbres

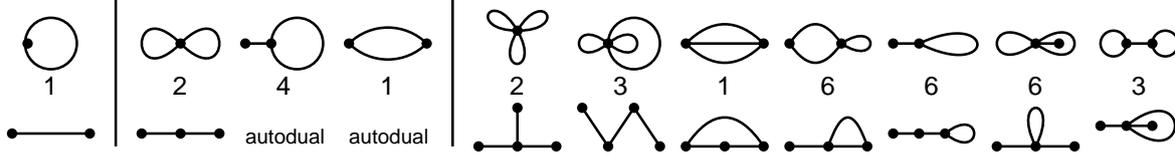
Une carte est un plongement d'un graphe (planaire, pouvant avoir des boucles et des arêtes multiples) dans le plan. On tient compte des sommets, des arêtes et des faces. La formule d'Euler s'applique, les nombres  $s$  de sommets,  $a$  d'arêtes et  $f$  de faces satisfont  $s + f = a + 2$ .

Le nombre de cartes à  $n$  arêtes est

$$\frac{3^n \cdot 2}{(n + 2)(n + 1)} \binom{2n}{n}$$

en ayant marqué une arête, un sommet et une face incidents à cette arête (enracinement) Voir [6] (où sont dessinées les 2 figures pour  $n = 1$  et les 9 figures pour  $n = 2$ ) ou [5, A000168]

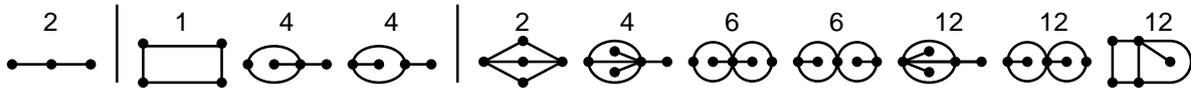
Voici les formes sans orientation des cartes à 1, 2, 3 arêtes et pour chacune (et sa duale) le nombre d'enracinements dissemblables



Le nombre des quadrangulations à  $n$  faces, et donc  $2n$  arêtes et  $n + 2$  sommets (toujours avec enracinement) est aussi [3]

$$\frac{3^n \cdot 2}{(n + 2)(n + 1)} \binom{2n}{n}$$

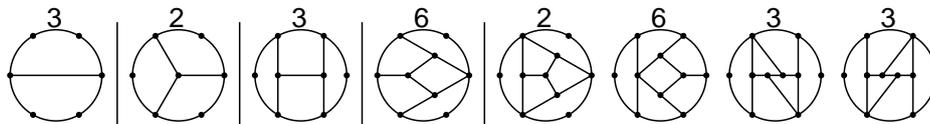
Voici les formes sans orientation des quadrangulations à 1, 2 ou 3 faces, avec pour chacune le nombre d'enracinements dissemblables



Les quadrangulations sans isthmes, ni arêtes multiples, ni séparateurs à 4 sommets d'un hexagone ayant ses six sommets distincts) se dénombrent avec les nombres, ([5, A007054] où  $n$  est le nombre de sommets supplémentaires, et l'enracinement se faisant avec la face hexagonale.

$$\frac{6}{(n + 1)(n + 2)} \binom{2n}{n}.$$

Voici les formes, pour au plus 6 faces en plus de la face hexagonale, avec le nombre d'énracinements non isomorphes possibles (nécessairement diviseur de 6) : les deux derniers sont symétriques, mais dans une symétrie qui renverse l'orientation.



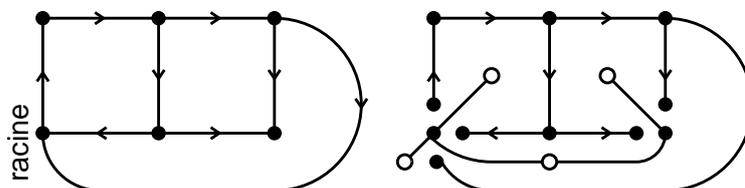
Le nombre des cartes sans boucles à  $n$  arêtes (voir figure ci-dessous, pour au plus 3 arêtes), ainsi que celui des cartes 3-connexes avec  $2n + 2$  sommets de degré 3, (toujours avec enracinement), ou leurs duales, cartes 3-connexes avec  $2n + 2$  faces triangulaires, sans boucles ni arêtes multiples. est [5, A000260]

$$\frac{2}{n(n+1)} \binom{4n+1}{n-1}$$



Donnons un aperçu des objets manipulés pour obtenir certains de ces dénombrements.

On part d'une carte munie d'une orientation telle que l'on peut aller de la racine à tout sommet par un chemin gauche (sans entrée à gauche). On garde ces chemins ; ils constituent un premier arbre. On éclate les sommets en préservant les chemins gauches : on obtient un autre arbre, dont les sommets correspondent aux sommets éclatés et aux faces de la carte, avec des arêtes correspondant aux incidences sommets–faces de la carte. Ces deux arbres sont d'une certaine façon accouplés et celui extrait de la carte orientée sert à “décorer” l'autre. On trouve ainsi un produit où apparaissent le nombre des arbres  $\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$  et le nombre des “bourgeons” possibles, *a priori*  $3^n$  par arbre, mais une condition similaire à celle des fonctions de stationnement amène à n'en garder que  $\frac{2}{n+2}$ .



## Références

- [1] O. Bernardi, É Fusy (2010) A bijection for triangulations, quadrangulations, pentagulations etc. [ArXiv:1007.1292v3](https://arxiv.org/abs/1007.1292v3) [math.CO]
- [2] F. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi, J. B. Zuber (1978) Planar diagrams *Commun. math. Phys.* 50 p. 35–51
- [3] G. Chapuy, M. Marcus, G. Schaeffer (2008) A bijection for rooted maps on orientable surfaces [ArXiv:0712.3649v2](https://arxiv.org/abs/0712.3649v2) [math.CO]
- [4] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik (1987) *Concrete Mathematics* Addison Wesley
- [5] N. J. A. Sloane On-line encyclopedia of integer sequences <http://oeis.org/>
- [6] W.T. Tutte (1973) The enumerative theory of planar maps. In *Survey combin. Theory, Sympos. Colorado State Univ., Colorado 1971*, pages 437–448.

# Autour de la conjecture de Razumov-Stroganov

Andrea SPORTIELLO

Résumé par Olivier ROUSSEL

Séminaire de Combinatoire Énumérative et Analytique

*Institut Henri Poincaré*

Année 2010 – 2011

## Résumé

Il existe trois familles de structures aléatoires, issues de la combinatoire énumérative et de la physique statistique :

1. Un modèle physique concernant la chaîne de spins quantiques de type XXZ qui peut être formulée en termes de « boucles denses de type  $\mathcal{O}(1)$  » sur un cylindre semi-infini.
2. Des objets combinatoires appelés *Matrices à Signes Alternant* (MSA), introduits par Robbins et Rumsey il y a 25 ans, qui peuvent être interprétés comme des configurations du modèle à six sommets, un modèle intégrable dans le sens de Baxter.
3. Un modèle de pavages d'un hexagone par des losanges, pavages qui peuvent également être interprétés comme des surfaces aléatoires en trois dimensions de type *Partitions Planes* (plus précisément, *Partitions Planes Totalement Symétriques Auto-Complémentaires*, PPTSAC).

Ces modèles s'énumèrent de la même manière (autrement dit, normalisation de la fonction d'onde sur la chaîne XXZ de longueur  $n = \#MSA$  sur un carré de taille  $n = \#PPTSAC$  sur un hexagone de taille  $2n$ ), de plus certains dénombrements plus raffinés sont les mêmes. En particulier, les deux premiers modèles ont des dénombrements identiques quand on se restreint aux « classes de topologie » (structures de couplage), qui sont non-locales, et en nombre exponentiel ( $\sim 4^n$ ). Cette propriété a été conjecturée par Razumov et Stroganov en 2001, et prouvée par Cantini et moi-même, en 2010. Deux ingrédients de la preuve sont l'analyse d'une chaîne de Markov à opérateurs dans une algèbre de Temperley-Lieb associée au modèle de boucles denses, et la généralisation d'une certaine bijection naturelle sur l'ensemble des MSA introduite par Wieland et appelée « giration ».

La conjecture de Razumov Stroganov (maintenant théorème de Cantini-Sportiello [1]) relie entre eux deux modèles combinatoires distincts : d'une part les *configurations de boucles compactes* (ou encore *fully packed loop* FPL) et le modèle de *boucles denses de type  $\mathcal{O}(1)$  sur un cylindre semi-infini*. La conjecture statue alors que ces deux modèles s'énumèrent de la même façon. De plus, on peut relier par ailleurs, via des résultats déjà connus, les FPL sur le carré  $n \times n$  avec les *Matrices à Signe Alternant* (ou *Alternating Sign Matrices*, ASM) de taille  $n \times n$ , ou encore aux *Partitions Planes AutoComplémentaires et Totalement Symétriques* (ou *Totally Symmetric, SelfComplementary Plane Partitions*, TSSCPP) sur un hexagone de taille  $2n$ . Tout ces modèles s'énumèrent donc de la même façon

## 1 Association d'un *couplage plan*

On peut en effet associer à chacun de ces deux modèles précédents un *couplage plan*. Il s'agit d'un appariement de  $2n$  points répartis sur un cercle, sans croisements.

**Pour les FPL :** Un FPL de taille  $n$  est un sous-graphe d'une grille carrée  $n \times n$ , dont chaque sommet est de degré exactement 2. Au bord de la grille, un sommet sur deux, en alternance, a une arête sortante. Considérons alors un FPL de taille  $n$ . Dans celui-ci, chacune des  $2n$  arête au bord est reliée à une autre, par un unique chemin, formant ainsi un couplage des arêtes (sans croisements aucun). On peut ainsi associer un unique *couplage plan* à chaque FPL.

**Pour les boucles denses :** Une *configuration de boucles denses* sur un semi-cylindre de périmètre  $2n$  est une application de  $\{1, \dots, 2n\} \times \mathbb{N}$  dans  $\{0, 1\}$  : on « pave » le semi-cylindre avec deux type de tuiles différentes : soit  $\nearrow$  soit  $\nwarrow$ . On crée ainsi des « chemins » sur notre cylindre. La majorité sont des boucles ; on peut associer un *couplage plan* en suivant les chemins qui démarrent ou finissent sur le bord.

À partir de ces deux modèles, on associe donc un même objet : un *couplage plan* de taille  $2n$ . La conjecture de Razumov Stroganov affirme que la probabilité d'obtenir un couplage donné depuis un FPL est la même que depuis un modèle de boucles denses sur un semi-cylindre infini. Formellement, si on note  $\tilde{\psi}_n(\pi)$  la probabilité d'obtenir le couplage plan  $\pi$  dans le modèle de « boucles denses de type  $\mathcal{O}(1)$  » sur un cylindre semi-infini  $\{1, \dots, 2n\} \times \mathbb{N}$  ; et  $\psi_n(\pi)$  celle d'obtenir le couplage plan  $\pi$  pour les FPL sur le carré  $n \times n$  (avec mesure uniforme), alors

$$\tilde{\psi}_n(\pi) = \psi_n(\pi)$$

## 2 Preuve du théorème de la conjecture

Cette dernière se base sur plusieurs idées principales :

1. **Étendre les domaines des FPL :** Cantini et Sportiello ont réussi à étendre et généraliser la notion de FPL à des domaines plus généraux que des carrés : ils conservent la condition d'alternance aux bords, mais l'intérieur de leurs domaines peut être bien plus complexe qu'un simple carré.
2. **La giration de Wieland :** Cela consiste à effectuer une rotation d'un cran du couplage plan. Cette dernière, bijective sur les couplages de taille  $2n$ , peut se traduire en une bijection non triviale sur les FPL sur le carré  $n \times n$ . Si on note  $R$  cette rotation, alors  $\psi_n(R\pi) = \psi_n(\pi)$ . En sus de cette opération, on peut définir  $2n$  opérateurs  $e_i$  sur les couplages plans de taille  $2n$ . L'opérateur  $e_i$  appliqué à un couplage  $\pi$  remplace les deux paires  $\{i, j\}$  et  $\{i + 1, k\}$  par  $\{i, i + 1\}$  et  $\{j, k\}$  (et laisse le reste inchangé).
3. **Appliquer ces opérateurs sur les cylindres semi-infini :** On considère un tel cylindre semi-infini, et on lui ajoute une « couche » de tuiles i.i.d. avec probabilité  $p$ . On obtient alors un nouveau cylindre semi-infini, et on peut recommencer. Lorsque l'on fait tendre  $p$  vers 0, presque toutes les « couches » agiront comme une simple rotation sur le couplage plan associé (c'est à dire  $\pi \mapsto R\pi$ ). Les couches non-triviales agiront alors comme  $\pi \mapsto Re_j\pi$  pour un certain  $j$ .

En utilisant ensuite ces résultats, Cantini et Sportielli montrent en fait que

$$\tilde{\psi}_n(\pi) = \psi_n^\Lambda(\pi)$$

où  $\psi_n^\Lambda$  est la probabilité d'obtenir le couplage plan  $\pi$  pour les FPL sur le *domaine généralisé* de taille  $n$ .

## Références

- [1] L. Cantini and A. Sportiello. Proof of the Razumov-Stroganov conjecture. *ArXiv e-prints*, March 2010. [arXiv:1003.3376](https://arxiv.org/abs/1003.3376)

# Réalisations polynomiales d'algèbres de Hopf combinatoires

JEAN-YVES THIBON

Résumé par VINCENT VONG

*Séminaire de Combinatoire Philippe Flajolet  
Institut Henri Poincaré, Séance du 27 janvier 2012*

## Résumé

L'idée d'utiliser des algèbres de Hopf en combinatoire n'est pas très récente, elle remonte au moins à Rota dans les années 1970. Toutefois, c'est seulement depuis une quinzaine d'années qu'on a vu apparaître de nombreux exemples nouveaux. Ces algèbres de Hopf combinatoires (AHC) sont formées de combinaisons linéaires formelles d'objets combinatoires classiques, et leurs opérations (produit et coproduit) s'expriment en termes d'algorithmes de composition ou de décomposition de tels objets. Ces exemples sont souvent reliés (par des homomorphismes) aux fonctions symétriques ou quasi-symétriques. Or, ces dernières sont définies au moyen de variables auxiliaires, et leurs opérations sont induites par le produit ordinaire des polynômes, et une opération simple de dédoublement des variables. Il est donc tentant de rechercher des variables auxiliaires permettant une description similaire des autres AHC. Lorsque cela est possible, on parle de réalisation polynomiale de l'algèbre. On obtient alors en général une simplification importante de la théorie, ainsi que de nouvelles bases qui semblent paver la voie vers une théorie des fonctions spéciales non-commutatives.

## 1 Les fonctions symétriques

Les fonctions symétriques sont apparues très tôt dans l'histoire des mathématiques. Elles ont largement été étudiées par de nombreux mathématiciens comme par exemple Lagrange pour la résolution d'équations polynomiales. Aujourd'hui, il existe une littérature conséquente à leurs sujets [2]. Elles apparaissent dans de nombreux domaines, a priori sans rapport : par exemple, elles interviennent en théorie des représentations, où certains changements de bases des polynômes symétriques donnent les tables des caractères des groupes symétriques et des groupes unitaires. Elles ont également une interprétation combinatoire, qui sont celles des partitions d'entiers, en effet, les bases de ces fonctions sont paramétrées par elles. Ceci ouvre un nouveau champ d'exploration pour les objets combinatoires : peut-on à l'instar des partitions, étant donné une classe combinatoire, trouver des "polynômes" en une infinité de variables qui encodent chaque objet ? Et quels sont les liens entre ce nouvel ensemble et les fonctions symétriques ?

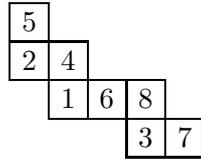
## 2 Généralisation des fonctions symétriques : un pas vers un monde "Hopfien"

Commençons avec les fonctions symétriques non commutatives [1]. Pour les construire, on va partir d'un objet combinatoire bien familier : les permutations.

### 2.1 Algèbres des descentes

Soit  $\sigma$  une permutation. Une descente est un  $i$  tel que  $\sigma(i) > \sigma(i + 1)$ . Par exemple, la permutation 52416837 a des descentes en position 1, 3, 6. L'ensemble des descentes de  $\sigma$  est

noté  $Des(\sigma)$ . Il correspond naturellement un ensemble de composition noté  $C$ , que l'on peut voir comme la suite des longueurs des mots formant la décomposition de  $\sigma$  en facteurs croissants[3]. On peut le visualiser sous la forme d'un ruban. Par exemple, on a :



Dans notre cas, on a  $C(\sigma) = (1, 2, 3, 2)$ . Une idée est de regrouper les permutations ayant les mêmes descentes. On peut définir sur ces rubans un produit qui conserve la structure de rubans comme ceci : soient  $R_1 = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  et  $R_2 = (b_1, \dots, b_l)$  deux rubans non étiquetés. On pose :  $R_1 \cdot R_2 = (a_1, \dots, a_k + b_1, b_2, \dots, b_l) + (a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l)$ . On peut le visualiser graphiquement comme la concaténation verticale ou horizontale de deux rubans. Ainsi, on obtient une structure d'algèbre sur les compositions.

## 2.2 Une réalisation polynomiale sur les compositions d'entiers

La notion de descente s'étend aisément aux mots sur un alphabet totalement ordonné. Ainsi, à une composition fixée  $R$ , on peut lui associer la somme des mots ayant comme descente cette décomposition ( $\sum_{Des(w)=R} w$ ). On remarquera que le produit de telle somme, donne encore des combinaisons linéaires de telle somme, d'ailleurs donnée par la règle précédente ( $\sum_{Des(w)=R_1} w \cdot \sum_{Des(w)=R_2} w = \sum_{Des(w) \in R_1 \cdot R_2} w$ ). Ainsi, on peut voir les compositions comme une sous-algèbre des polynômes sur un alphabet totalement ordonné infini. On en a obtenu une réalisation polynomiale.

## 3 Un bouquet d'exemples

Le principe est le suivant : on arrive à trouver une fonction des mots (ou bimots) sur un alphabet possédant certaine propriété (par exemple totalement ordonné) vers l'objet combinatoire qui nous intéresse. Sous des hypothèses de compatibilité de l'application, on pourra mettre des structures algébriques sur l'objet combinatoire.

### 3.1 Encore des permutations

#### 3.1.1 standardisation d'un mot

Pour les permutations, la fonction sur les mots sera la standardisation. Soit  $A$  un alphabet totalement ordonné. Soit  $w$  un mot sur  $A$  de longueur  $n$ . le standardisé de  $w$  (noté  $std(w)$ ) est la permutation de taille  $n$  qui possède exactement les même inversions que le mot  $w$ , une inversion de  $w$  étant un couple  $(i, j)$  tel que  $i < j$ , et  $w_i > w_j$ . Par exemple, on a :

$$std(13215598) = 14325687$$

#### 3.1.2 Réalisation polynomiale

Soient  $\sigma$  et  $\tau$  deux permutations. On pose :

$$G_\sigma = \sum_{std(w)=\sigma} w$$

On remarque que  $G_\sigma \cdot G_\tau$  est encore une somme de  $G_\gamma$ , où  $\gamma$  décrit un sous-ensemble des permutations. Ainsi, les permutations se voient comme une sous-algèbre de l'algèbre de mots sur  $A$ .

## 3.2 Les fonctions de parking

### 3.2.1 Définition

On se place sur l'alphabet  $\mathbb{N}^*$ . On dit qu'un mot  $w$  est une fonction de parking si après avoir trié  $w$ , on obtient le mot  $v$ ,  $v$  vérifie  $v_i \leq i$  pour tout  $i$ .

### 3.2.2 Parkisation d'un mot

Soit  $w$  un mot sur  $\mathbb{N}$ . le procédé de parkization est le suivant : on trie le mot que l'on note  $v$ . Si  $w$  est de parking, on a rien à faire. Sinon, on considère le premier  $i$  tel que  $v_i > i$ , et on soustrait de 1 toutes les lettres  $v_j$  avec  $j \geq i$ . Si le nouveau mot est de parking, on remet le mot dans l'ordre de celui de  $w$ , sinon, on répète l'opération précédente. Par exemple,  $w = 139457$  n'est pas de parking, appliquons l'algorithme à  $w$  : on obtient successivement 128346, 127345, et enfin 126345. On notera  $Park(w)$  le parkizé de  $w$ .

### 3.2.3 Réalisation polynomiale

Comme précédemment sur les permutations, on peut aussi voir les fonctions de parking comme une sous-algèbre des mots sur  $\mathbb{N}^*$ . Dans ce cas, on considère les mots qui ont le même parkizé. On constate une forte analogie avec les fonctions quasi-symétriques.

## 4 Tableau de synthèse

objets combinatoires	une fonction des mots sur un objet	une réalisation polynomiale
partitions	occurences des differentes lettres	fonctions symétriques
compositions	descentes d'un mot	fonctions symétriques N.C
permutations	standardisation d'un mot	fonctions quasi-symétriques
fonctions de parking	parkization d'un mot	PQSym
arbres binaires	arbre binaire décroissant du mot	PBT

## Références

- [1] I. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V. S. Retakh, and J. Y. Thibon. Noncommutative symmetric functions. *Advances in mathematics*, July 1995.
- [2] I. Macdonald. *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. Oxford Science Publications, 1979.
- [3] J.-C. Novelli and J.-Y. Thibon. Parking functions and descent algebras. 2007.

# Continuation analytique de polytopes

MICHÈLE VERGNE

Résumé par MATTHIEU JOSUAT-VERGÈS

*Séminaire de Combinatoire Philippe Flajolet  
Institut Henri Poincaré, Séance du 31 janvier 2013*

## Résumé

Soit  $\mathfrak{p}(b)$  un polytope défini par  $N$  inéquations linéaires  $\langle \mu_1, x \rangle \leq b_1, \langle \mu_2, x \rangle \leq b_2, \dots, \langle \mu_N, x \rangle \leq b_N$ . Lorsque le paramètre  $b$  varie dans un petit voisinage du paramètre initial  $b^0$ , le polytope  $\mathfrak{p}(b)$  garde la même forme. En particulier, son volume  $\text{Vol}(b)$  est donné par une fonction polynomiale de  $b$ , lorsque  $b$  est proche de la valeur  $b^0$ . Ce polynôme change lorsque  $b$  passe un mur. Varchenko a défini une “continuation analytique”  $A(b)$  de  $\mathfrak{p}(b)$  : une réunion signée de polytopes  $Q_i(b)$ , de diverses dimensions. Si  $b$  est proche de  $b^0$ ,  $A(b) = \mathfrak{p}(b)$ , mais  $A(b)$  est “analytique” en  $b$ . Par exemple le volume de  $A(b)$  (une somme signée de volumes) est un polynôme en  $b$  pour tout  $b \in \mathbb{R}^n$ . Nous avons donné une formule de saut pour  $A(b)$ . Cette étude est une version ensembliste de la variation en fonction du fibré en lignes  $L$  du support du module  $\sum_i (-1)^i H_i(M, O(L))$  lorsque  $M$  est une variété torique. En particulier, on retrouve les formules de saut de Paradan pour le nombre de points entiers dans le polytope  $\mathfrak{p}(b)$ , lorsque le paramètre  $b$  passe un mur. Travail commun avec Nicole Berline.

## 1 Introduction

Soit  $\mathfrak{p}$  un polytope dans  $\mathbb{R}^n$ . On peut le définir par des inégalités :  $\mathfrak{p}$  est l’ensemble des vecteurs  $v$  satisfaisant

$$\langle \mu_i, v \rangle \leq b_i$$

pour  $1 \leq i \leq N$ , où les  $\mu_i$  sont des vecteurs, et les  $b_i$  réels. On écrit  $\mathfrak{p}(b)$  pour marquer la dépendance en  $b = (b_i)_{1 \leq i \leq N}$ , le polytope initial correspondant à une valeur  $b^0$ .

Son volume  $\text{Vol}(\mathfrak{p})$  est égal à un polynôme  $E(b)$  dans un voisinage de  $b^0$ . Mais lorsque la structure combinatoire du polytope change, on sort a priori du domaine de polynomialité.

Plus généralement, soit  $\Lambda$  un réseau (on pourra supposer  $\Lambda = \mathbb{Z}^n$ ), considérons le polynôme d’Ehrhart :

$$E_\Lambda(b) = \text{Card}(\mathfrak{p} \cap \Lambda).$$

C’est un polynôme en  $b_1, \dots, b_N$  lorsque le polytope est à sommets entiers (dans  $\Lambda$ ), et un quasi-polynôme s’il est à sommets rationnels. En tant que tel, il est bien défini pour toute valeur de  $b \in \mathbb{R}^N$ , mais il a une interprétation naturelle uniquement lorsque  $b$  est au voisinage de  $b^0$ .

Ainsi la dépendance en  $b$  du polytope  $\mathfrak{p}(b)$  a des défauts de régularité. La notion de prolongement analytique de polytope, de même que celle des fonctions réelles, revient à se demander si l’on peut définir  $\mathfrak{p}(b)$  pour tout  $b \in \mathbb{R}^N$  de manière régulière. Comme le polynôme volume  $E(b)$  est bien défini pour tout  $b \in \mathbb{R}^N$ , on demande que ce soit le volume du polytope prolongé. De même pour le polynôme d’Ehrhart.

## 2 Prolongement analytique

Dans ce qui suit, lorsque  $X \subset \mathbb{R}^n$ , on note  $[X]$  sa fonction indicatrice.

**Définition 2.1.** On appelle *prolongement analytique* du polytope  $\mathfrak{p}$  une fonction  $A(b)$  vérifiant :

- pour tout  $b \in \mathbb{R}^N$ ,  $A(b)$  est une fonction  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ , de la forme  $\sum c_i [P_i]$  où les  $P_i$  sont des polytopes (de dimensions variées) et  $c_i \in \mathbb{Z}$ ,
- pour  $b$  dans un voisinage de  $b^0$ ,  $A(b) = [\mathfrak{p}(b)]$ ,
- le polynôme volume satisfait

$$E(b) = \int_{\mathbb{R}^n} A(b)(x) dx$$

pour tout  $b \in \mathbb{R}^N$ ,

- le polynôme d'Ehrhart satisfait

$$E_\Lambda(b) = \sum_{x \in \Lambda} A(b)(x)$$

pour tout  $b \in \mathbb{R}^N$ .

Dans la combinaison linéaire  $A(b) = \sum c_i [P_i]$ , les  $P_i$  sont de dimensions variées car on peut faire apparaître des polytopes semi-ouverts. Par exemple, l'intervalle  $[0, b_1]$  de  $\mathbb{R}$  admet un prolongement quand  $b_1 < 0$ , qui est l'intervalle semi-ouvert  $(b_1, 0]$ .

Une construction de Varchenko [4] montre l'existence d'un tel prolongement analytique. Nous présentons ci-dessous une autre construction, basée sur l'identité de Brianchon-Gram.

Nous avons besoin de la notion suivante. Soit  $F$  une face du polytope  $\mathfrak{p}$ , i.e. il existe  $\Delta_F \subset \{1, \dots, N\}$  tel que  $F$  soit l'ensemble des  $v$  avec

$$\begin{aligned} \mu_i(v) &= b_i \text{ si } i \in \Delta, \\ \mu_i(v) &\leq b_i \text{ sinon.} \end{aligned}$$

On appelle cône tangent de  $\mathfrak{p}$  en  $F$  l'ensemble :

$$T_F(\mathfrak{p}) = \{v \in \mathbb{R}^n : \mu_i(v) \leq b_i \text{ pour } i \in \Delta\}.$$

En particulier, pour  $\Delta = \emptyset$  (la face maximale), on obtient  $\mathbb{R}^n$ , et pour  $\Delta = \{1, \dots, N\}$  (la face vide), on obtient  $\mathfrak{p}$ . Ces cônes tangents sont des polyèdres et non des polytopes (ils sont non bornés à part le cas de  $\mathfrak{p}$  lui-même). On a :

**Proposition 2.2** (Identité de Brianchon-Gram).

$$[\mathfrak{p}] = \sum_F (-1)^{\dim F} [T_F(\mathfrak{p})],$$

où la somme porte sur les faces non-vides de  $\mathfrak{p}$ .

(Remarquons que comme  $\mathfrak{p} = T_\emptyset(\mathfrak{p})$ , et  $\dim \emptyset = -1$ , cette égalité peut aussi s'écrire  $0 = \sum_F (-1)^{\dim F} [T_F(\mathfrak{p})]$  où la somme porte sur toutes les faces.)

Ce résultat permet de donner une continuation analytique du polytope, car la dépendance en  $b$  des cônes tangents est régulière. On définit, pour tout  $b \in \mathbb{R}^N$  :

$$\text{Cone}(\Delta_F, b) = \{v \in \mathbb{R}^n : \mu_i(v) \leq b_i \text{ pour } i \in \Delta_F\}.$$

Clairement,  $\text{Cone}(\Delta_F, b) = T_F(\mathfrak{p}(b))$  lorsque  $b$  est dans un voisinage de  $b^0$ .

**Théorème 2.3.** *La fonction*

$$A(b) = \sum_F (-1)^{\dim F} [\text{Cone}(\Delta_F, b)]$$

où la somme porte sur les faces non-vides de  $\mathfrak{p}$ , est un prolongement analytique de  $\mathfrak{p}(b)$ .

Par l'identité de Brianchon-Gram,  $A(b) = [\mathfrak{p}(b)]$  lorsque  $b$  est au voisinage de la valeur  $b^0$ . Les autres points ne sont pas évidents. Par exemple, bien que chacun des cônes soit non borné, une simplification a lieu de sorte que pour tout  $b$ ,  $A(b)$  est à support borné.

Mentionnons sans donner de détails la formule de Brion, qui permet de prouver

$$E_\Lambda(b) = \sum_{x \in \Lambda} A(b)(x)$$

à partir de notre définition de  $A(b)$ . C'est une formule qui donne la série génératrice des points entiers du polytope  $\mathfrak{p}$  comme la somme des séries des points entiers des cônes tangents. Comme pour l'identité de Brianchon-Gram, il y a une simplification : chacun des cônes tangents donne une série rationnelle, mais la somme est un polynôme.

### 3 La formule des sauts

On se demande quand le paramètre  $b$  sort du domaine où  $A(p) = [\mathfrak{p}(b)]$ , et quel est alors la différence entre les deux quantités.

On peut construire une famille  $\mathcal{H}$  d'hyperplans qui a la propriété suivante. On appelle chambre une composante connexe de  $\mathbb{R}^n \setminus \cup \mathcal{H}$ . Alors dans chacune des chambres, la combinatoire de  $A(b)$  ne change pas, i.e. on peut écrire  $A(b) = \sum_i c_i [Q_i(b)]$  où les  $c_i$  sont fixés et la combinatoire de chaque polytope  $Q_i(b)$  ne change pas.

Explicitement,  $\mathcal{H}$  contient un hyperplan  $H_C$  pour chaque famille  $C \subset \{1, \dots, N\}$  telle que  $\text{Card}(C) = n + 1$ , et les  $\mu_i$  pour  $i \in C$  engendrent  $\mathbb{R}^n$ . L'hyperplan  $H_C$  est l'ensemble des  $b$  tels que

$$\sum_{i \in C} c_i b_i = 0,$$

où les  $c_i$  (non tous nuls) sont tels que  $\sum_{i \in C} c_i \mu_i = 0$ . On peut comprendre cette définition de la façon suivante : pour  $b$  générique, les  $n + 1$  hyperplans d'équation  $\langle \mu_i, x \rangle = b$ ,  $i \in C$  ont une intersection vide,  $b$  est dans  $H_C$  lorsque l'intersection contient un point.

Soit  $\tau_0$  la chambre contenant la valeur initiale  $b^0$ . Il existe une formule des sauts pour décrire la différence entre  $\mathfrak{p}(b)$  et sa continuation analytique  $A(b)$  lorsque  $b$  est dans une chambre donnée  $\tau_1$  voisine de  $\tau_0$ . Les chambres  $\tau_0$  et  $\tau_1$  sont séparées par un hyperplan  $H_C$  bien défini d'équation  $\sum_{i \in C} c_i b_i$ , comme ci-dessus. Les coefficients  $c_i$  étant uniques à une constante près, on peut les choisir tels que

$$\sum_{i \in C} c_i b_i^0 > 0$$

où  $b^0 = (b_i^0)_{1 \leq i \leq N}$ . Soit  $\mathfrak{p}(\text{Flip}; b)$  l'ensemble des  $v$  satisfaisant

$$\begin{cases} \langle \mu_i, v \rangle > b_i & \text{si } c_j > 0, \\ \langle \mu_i, v \rangle \leq b_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors :

**Théorème 3.1** (Formule des sauts). *Si  $b$  est dans une chambre  $\tau_1$  voisine de  $\tau_0$ , on a :*

$$A(b) = [\mathfrak{p}(b)] - (-1)^{|\text{Flip}|} [\mathfrak{p}(\text{Flip}; b)].$$

## 4 Variétés toriques

À un polytope  $\mathfrak{p}$  à sommets rationnels on peut associer une variété torique  $M$ , munie d'un fibré en droites  $\mathcal{L}$  ample et équivariant pour l'action du tore [2]. Dans le cas du polytope  $\mathfrak{p}(b)$  qui varie avec  $b$ , la variété torique est fixée et seul le fibré  $\mathcal{L}_b$  varie.

Dans ce contexte, le polynôme d'Ehrhart a une interprétation en termes de cohomologie, en particulier le nombre de points entiers du polytope est la dimension de l'espace  $H^0(M, \mathcal{L}_b)$  des sections holomorphes du fibré.

La formule des sauts présentée ci-dessus a d'abord été obtenue dans ce contexte géométrique par Paradan [3].

## Références

- [1] N. Berline et M. Vergne. Analytic continuation of a parametric polytope and wall-crossing. In *Configuration Spaces Geometry, Combinatorics and Topology* Publications of the Scuola Normale Superiore, Vol. 14. (2013).
- [2] W. Fulton. *Introduction to toric varieties*, Annals of Math. Studies. 131, Princeton University Press, 1993.
- [3] P.-E. Paradan. Wall-crossing formulas in Hamiltonian geometry. *Progress in Mathematics* 292, (2011), 295–344
- [4] A. N. Varchenko. Combinatorics and topology of the arrangement of affine hyperplanes in the real space. *Functional Anal. Appl.* 21, no. 1 (1987), 9–19 ; Russian original publ. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 21 (1987), no. 1, p.11–22.