# Polytopes d'hypergraphes, algèbres et opérades

Bérénice Delcroix-Oger
(avec Pierre-Louis Curien (IRIF) et Emily Burgunder (IMT))

IRIF, Université Paris Diderot

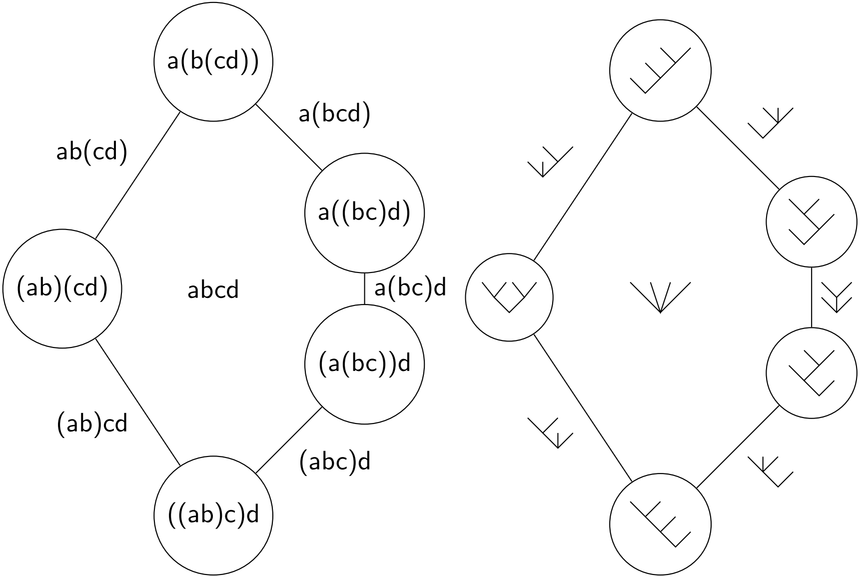
Séminaire Flajolet

Jeudi 12 Avril 2018

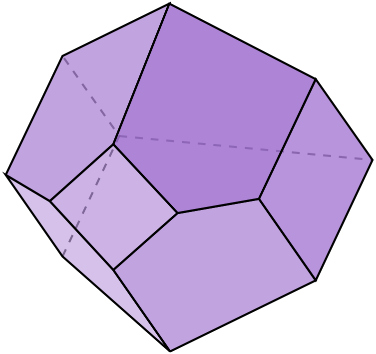
# Sommaire

# Associaèdre et permutoèdre

# Associaèdre et associativité

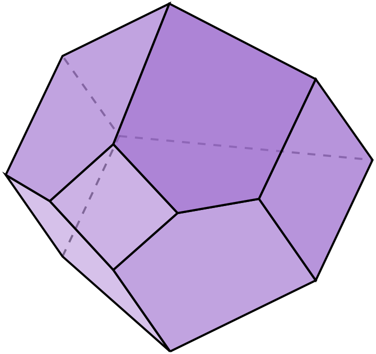


# Associaèdre



avec les faces de dimension $k$ indexées par les mots parenthésés ($\leftrightarrow$ arbres plans) avec $n-k+1$ parenthèses.

# Associaèdre



avec les faces de dimension $k$ indexées par les mots parenthésés ($\leftrightarrow$ arbres plans) avec $n-k+1$ parenthèses.

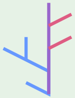
Quel produit mettre sur ces arbres plans ?

# Algèbres tridendriformes [Loday-Ronco, 2004 ; Chapoton, 2002]

## Exemple

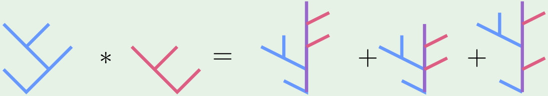
$*$

$=$



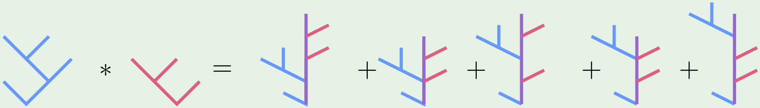
# Algèbres tridendriformes [Loday-Ronco, 2004 ; Chapoton, 2002]

## Exemple



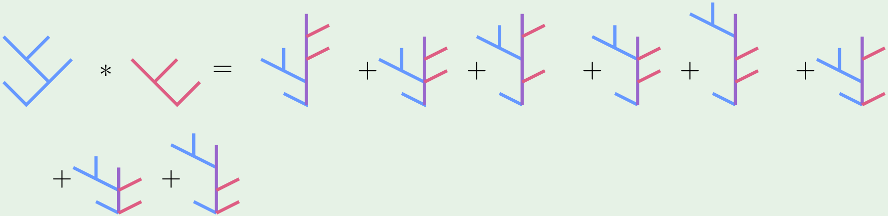
# Algèbres tridendriformes [Loday-Ronco, 2004 ; Chapoton, 2002]

## Exemple



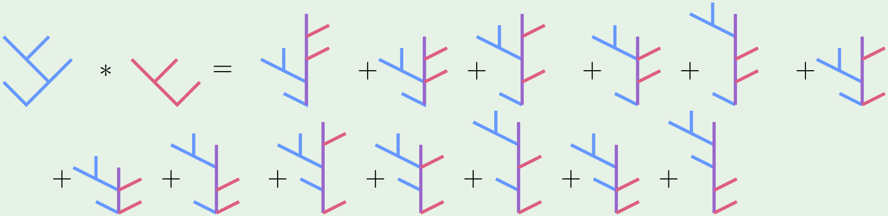
# Algèbres tridendriformes [Loday-Ronco, 2004 ; Chapoton, 2002]

## Exemple



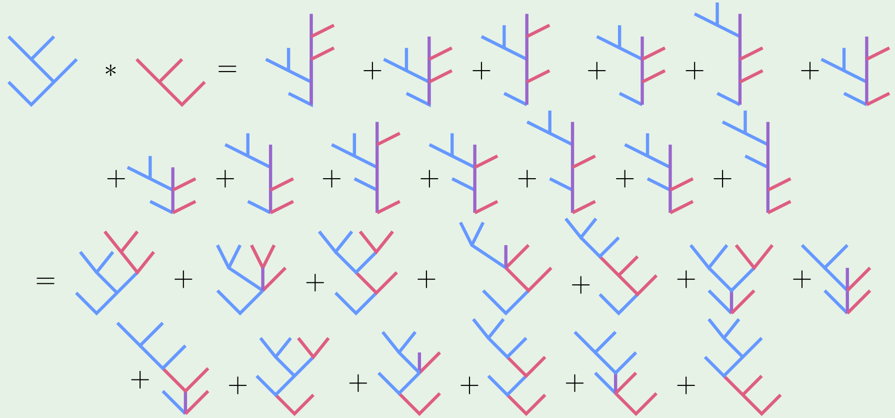
# Algèbres tridendriformes [Loday-Ronco, 2004 ; Chapoton, 2002]

## Exemple



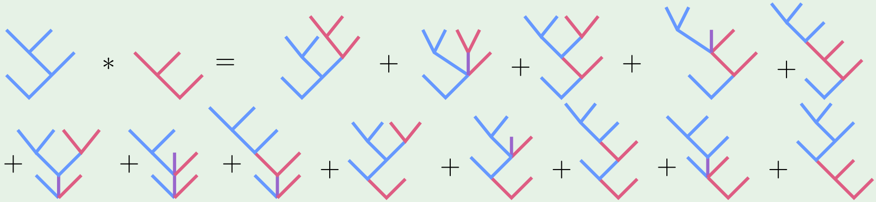
# Algèbres tridendriformes [Loday-Ronco, 2004 ; Chapoton, 2002]

## Exemple



# Algèbres tridendriformes [Loday-Ronco, 2004 ; Chapoton, 2002]

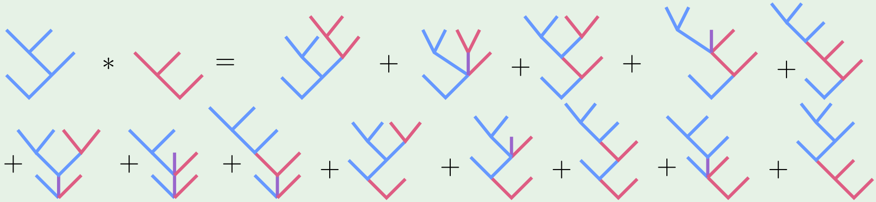
## Exemple



Produit $*$ associatif, algèbre associée libre mais engendrée par une infinité de générateurs [Vong, 2015 ; Burgunder-Curien-Ronco, 2016]

# Algèbres tridendriformes [Loday-Ronco, 2004 ; Chapoton, 2002]

## Exemple



Produit $*$ associatif, algèbre associée libre mais engendrée par une infinité de générateurs [Vong, 2015 ; Burgunder-Curien-Ronco, 2016]

## Solution :

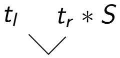
Trois types d'arbres (suivant la racine) : pourquoi ne pas couper le produit $*$ en trois ?

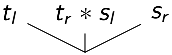
# Définition récursive des produits tridendriformes sur les arbres

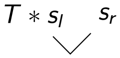
Si $T =$ 

and $S =$ 

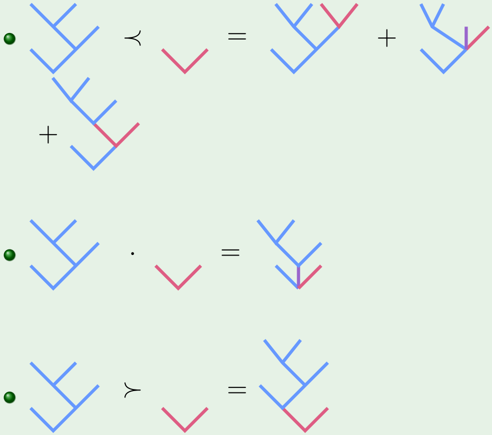
,

$T \prec S =$ 


$T \cdot S =$ 


et $T \succ S =$ 


**Exemples :**



# Algèbre tridendriforme (définition équationnelle)

## Definition (Loday, Ronco, 2004 ; Chapoton 2002)

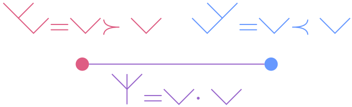
Une *algèbre tridendriforme* est un e.v. $A$ muni de $\prec: A \otimes A \to A$, $\cdot : A \otimes A \to A$ et $\succ: A \otimes A \to A$, tels que :

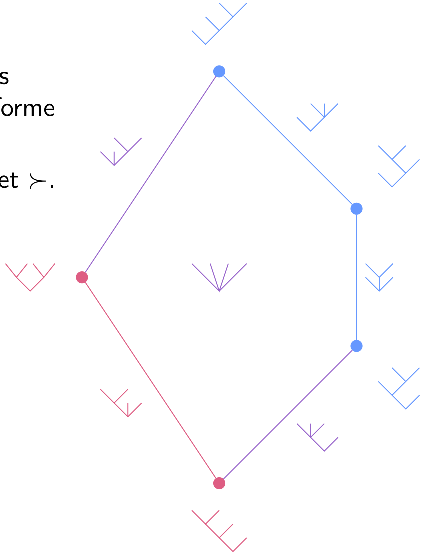
1. $(a \prec b) \prec c = a \prec (b * c)$,
2. $(a * b) \succ c = a \succ (b \succ c)$,
3. $(a \succ b) \prec c = a \succ (b \prec c)$,
4. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
5. $(a \succ b) \cdot c = a \succ (b \cdot c)$,
6. $(a \prec b) \cdot c = a \cdot (b \succ c)$,
7. $(a \cdot b) \prec c = a \cdot (b \prec c)$,

avec $* = \prec + \cdot + \succ$

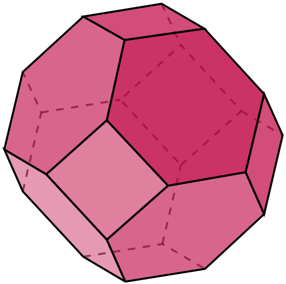
# Lien entre associaèdre et algèbre tridendriforme

- Faces de l'associaèdre étiquetées par des arbres plans (base de l'algèbre tridendriforme libre)
- Faces de dimension 0 obtenues avec $\prec$ et $\succ$.
  $\cdot \implies$ dim $+1$





# Cas du permutoèdre



- Faces étiquetées par les surjections

**Exemples :**

1
11, 12, 21
111, 112, 121, 211, 122, 212, 221, 123, 132, 213, 231, 312, 321

- Existence d'une algèbre sur les surjections WQSym (contenant l'algèbre de Malvenuto-Reutenauer)
- Existence d'une opérade des surjections

# Algèbre sur les surjections WQSym [Duchamp-Hivert-Novelli-Thibon, 2011]

$$u \# v = \sum_{\substack{\mathrm{pack}(\alpha)=u \\ \mathrm{pack}(\beta)=v \\ c_\#}} \alpha\beta,$$

où $c_\# = \min(\alpha) < \min(\beta)$ pour $\# = \prec$,
$c_\# = \min(\alpha) = \min(\beta)$ pour $\# = \cdot$,
et $c_\# = \min(\alpha) > \min(\beta)$ pour $\# = \succ$.

**Exemple :**

$$11 \succ 221 = 22221 + 33221 + 22331$$

$$11 \cdot 221 = 11221$$

$$11 \prec 221 = 11332$$

# Algèbre sur les surjections WQSym [Duchamp-Hivert-Novelli-Thibon, 2011]

$$u\#v = \sum_{\substack{\mathrm{pack}(\alpha)=u \\ \mathrm{pack}(\beta)=v \\ c_\#}} \alpha\beta,$$

où $c_\# = \min(\alpha) < \min(\beta)$ pour $\# = \prec$,
$c_\# = \min(\alpha) = \min(\beta)$ pour $\# = \cdot$,
et $c_\# = \min(\alpha) > \min(\beta)$ pour $\# = \succ$.

**Exemple :**

$$\begin{aligned} 11 \succ 221 &= 22221 + 33221 + 22331 \\ 11 \cdot 221 &= 11221 \\ 11 \prec 221 &= 11332 \end{aligned}$$

Produits tridendriformes $\Rightarrow$ WQSym algèbre tridendriforme libre sur une infinité de générateurs

# Questions

Dans la littérature,

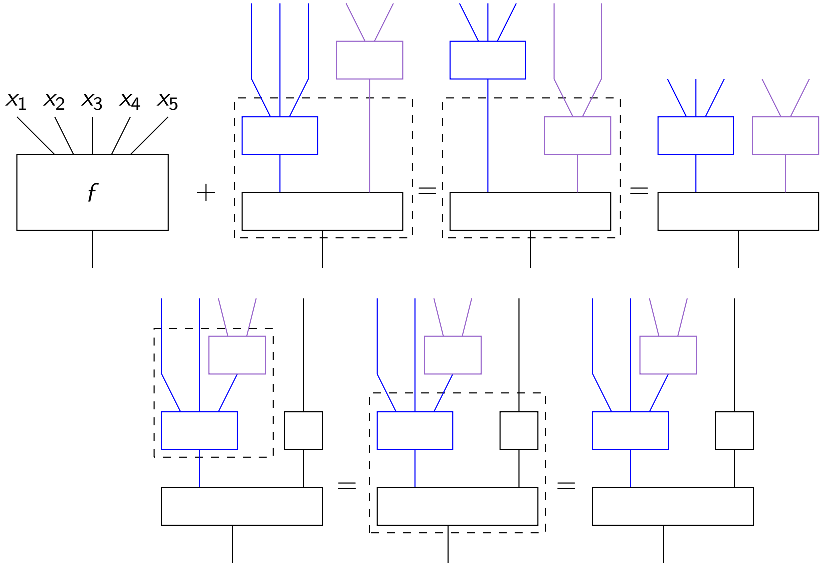
- Étiquetage de faces de polytopes sur des structures combinatoires
- algèbres (opérades) associées à ces structures combinatoires

**Question :**

Quelles sont les liens entre les structures combinatoires, les polytopes et les opérades associées ?

# Opérades et polytopes

# Qu'est-ce qu'une opérade ? [May, Boardman-Vogt, 70s]



# Qu'est-ce qu'une opérade ?

## Définition (May, Boardman-Vogt, 70s)

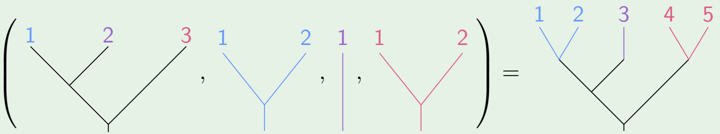
Une opérade $\mathcal{P}$ est un couple formé de :

- une famille $\{\mathcal{P}(n)\}_{n\geq 1}$ d'e.v. ,
- une opération de composition associative donnée par :

$$\gamma : \mathcal{P}(k) \otimes \mathcal{P}(i_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{P}(i_k) \to \mathcal{P}(i_1 + \ldots + i_k)$$

## Premier exemple :

- $\mathcal{P}(n) = \mathrm{PBT}_n$ avec $\mathrm{PBT}_n$ l'e.v. des arbres binaires plans à $n$ feuilles $\{1, \ldots, n\}$ (de gauche à droite) et $\gamma$ la greffe sur les feuilles (magmatic operad Mag)



# Qu'est-ce qu'une opérade symétrique ?

## Définition (May, Boardman-Vogt, 70s)

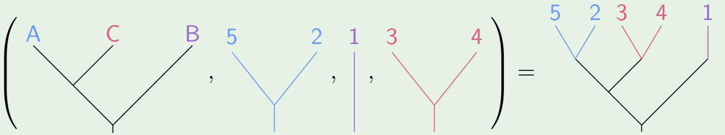
Une opérade symétrique $\mathcal{P}$ est un couple formé de :

- une famille $\{\mathcal{P}(n)\}_{n\geq 1}$ de $\mathfrak{S}_n$-modules (e.v. + action de $\mathfrak{S}_n$),
- une opération de composition associative compatible à l'action du groupe symétrique donnée sur toute partition $\pi \in \mathcal{P}(n)$ par :

$$\gamma : \mathcal{P}(\pi) \otimes \mathcal{P}(\pi_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{P}(\pi_k) \to \mathcal{P}(n)$$

## Premier exemple symétrique :

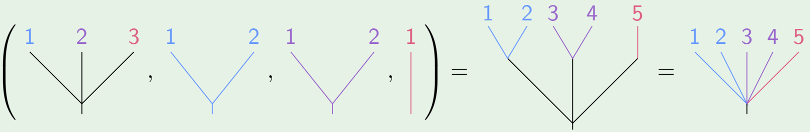
- $\mathcal{P}(n) = \mathrm{PBT}_n$ avec $\mathrm{PBT}_n$ l'e.v. des arbres binaires plans à $n$ feuilles $\{1, \ldots, n\}$ (de gauche à droite) et $\gamma$ la greffe sur les feuilles (magmatic operad Mag), pour $\pi = \{A, B, C\}$, avec $A = \{2, 5\}$, $B = \{1\}$ et $C = \{3, 4\}$



# Qu'est-ce qu'une opérade ?

## Exemples :

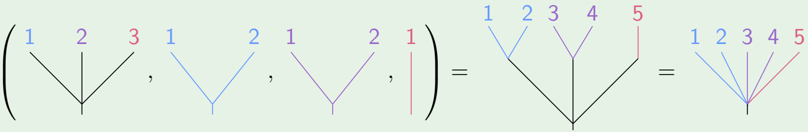
- $\mathcal{P}(n) = \mathbb{K}.\{x_1 \dots x_n\}$ (opérade associative Liste :  )



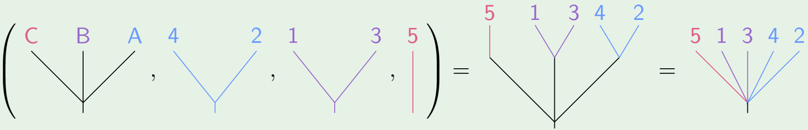
# Qu'est-ce qu'une opérade ?

## Exemples :

- $\mathcal{P}(n) = \mathbb{K}.\{x_1 \dots x_n\}$ (opérade associative Liste :  )

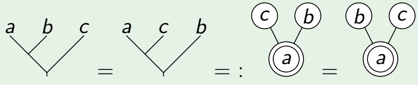



- $\mathcal{P}(n) = \mathbb{K}.\{x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)} | \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ (version symétrique de associative) :

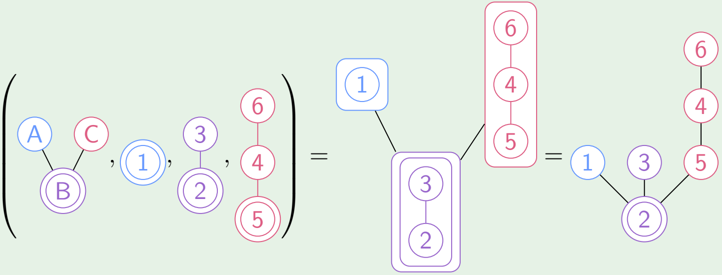


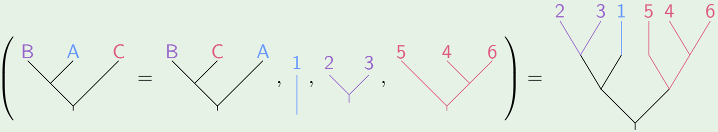
# Dernier exemple [Livernet, 2006] :

- $\mathcal{P}(n) = \mathrm{RT}_n$ the vector spaces of rooted trees with $\gamma$ the composition of trees inside nodes (Non-Associative Permutative operad NAP :




)



# Opérade sur les surjections Surj [Burgunder-Curien-D.O., 18+ ; version graduée : Chapoton, 2002]

$1125443562 \to (\{1,2\},\{3,10\},\{7\},\{5,6\},\{4,8\},\{9\})$ (Composition d'ensemble)

## Composition de l'opérade

Notant $u = (u_1, \ldots, u_p) = (u_1, \tilde{u})$ et $v = (v_1, \ldots, v_q) = (v_1, \tilde{v})$, la composition est donnée par :

$$\begin{aligned}
\gamma((\{A\},\{B\}), u, v) &= \gamma((\{B\},\{A\}), v, u) \\
&= (u_1, \gamma(A * B, \tilde{u}, v)) \text{ si } \tilde{u} \neq \emptyset; \quad = (u_1, v) \text{ sinon} \\
\gamma((\{AB\}), u, v) &= (u_1 \cup v_1, \gamma(A * B, \tilde{u}, \tilde{v})) \text{ si } \tilde{u} \neq \emptyset \text{ et } \tilde{v} \neq \emptyset \\
&= (u_1 \cup v_1, \tilde{u}) \text{ si } \tilde{v} = \emptyset \\
&= (u_1 \cup v_1, \tilde{v}) \text{ si } \tilde{u} = \emptyset \\
A * B &= (\{A\},\{B\}) + (\{B\},\{A\}) + (\{AB\})
\end{aligned}$$

## Opérade sur les surjections Surj  [B.-C.-D.O., 18+]

$1125443562 \to (\{1,2\},\{3,10\},\{7\},\{5,6\},\{4,8\},\{9\})$ (Composition d'ensemble)

### Composition de l'opérade

Notant $u=(u_1,\dots,u_p)=(u_1,\tilde u)$ et $v=(v_1,\dots,v_q)=(v_1,\tilde v)$, la composition est donnée par :

$$
\begin{aligned}
\gamma((\{A\},\{B\}),u,v) &= \gamma((\{B\},\{A\}),v,u)\\
&= (u_1,\gamma(A*B,\tilde u,v)) \text{ si } \tilde u\neq\emptyset; \qquad = (u_1,v) \text{ sinon}\\
\gamma((\{AB\}),u,v) &= (u_1\cup v_1,\gamma(A*B,\tilde u,\tilde v)) \text{ si } \tilde u\neq\emptyset \text{ et } \tilde v\neq\emptyset\\
&= (u_1\cup v_1,\tilde u) \text{ si } \tilde v=\emptyset\\
&= (u_1\cup v_1,\tilde v) \text{ si } \tilde u=\emptyset\\
A*B &= (\{A\},\{B\})+(\{B\},\{A\})+(\{AB\})
\end{aligned}
$$

### Exemple :

$$
\begin{aligned}
\gamma((\{B\},\{A\}),(\{1,3\}),(\{4\},\{2,5\})) =& (\{4\},\{1,3,2,5\})+(\{4\},\{1,3\},\{2,5\})\\
&+(\{4\},\{2,5\},\{1,3\})\\
\gamma((\{AB\}),(\{1,3\}),(\{4\},\{2,5\})) =& (\{1,3,4\},\{2,5\})
\end{aligned}
$$

# Algèbre sur une opérade

## Définition (Loday-Vallette)

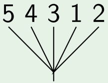
Soit $\mathcal{O}$ une opérade. Une algèbre sur $\mathcal{O}$ est

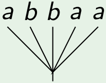
- un espace vectoriel $A$
- muni d'une famille de morphismes $\mathcal{O}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} A^n \to A$.

La $\mathcal{O}$-algèbre $A$ est libre sur un e.v. $V$ ssi $A = \bigoplus (\mathcal{O}(n) \otimes V^{\otimes n})$. Dans ce cas, $A$ est noté $\mathcal{O}(V)$.

## Exemples :

- L'algèbre des mots $\Sigma^*$ sur un alphabet $\Sigma$ muni de la concaténation est l'algèbre associative libre sur $\mathrm{Vect}(\Sigma)$.

$\Bigg($ 

$; a, a, b, b, a \Bigg) =$ 

$= abbaa$

- L'e.v. des surjections (mots tassés) muni de la concaténation est une algèbre associative (non libre).

$$1 \cdot 1 = 11 \qquad 12 \cdot 1 = 1 \cdot 21$$

# Algèbre sur une opérade

## Définition (Loday-Vallette)

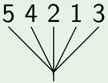
Soit $\mathcal{O}$ une opérade. Une algèbre sur $\mathcal{O}$ est

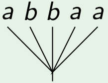
- un espace vectoriel $A$
- muni d'une famille de morphismes $\mathcal{O}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} A^n \to A$.

La $\mathcal{O}$-algèbre $A$ est libre sur un e.v. $V$ ssi $A = \bigoplus (\mathcal{O}(n) \otimes V^{\otimes n})$. Dans ce cas, $A$ est noté $\mathcal{O}(V)$.

## Exemples :

- L'algèbre des mots $\Sigma^*$ sur un alphabet $\Sigma$ muni de la concaténation est l'algèbre associative libre sur $\text{Vect}(\Sigma)$.

$\Bigg($ 

$; a, b, a, b, a \Bigg) =$ 

$= abbaa$

- L'e.v. des surjections (mots tassés) muni de la concaténation est une algèbre associative (non libre).

$$1 \cdot 1 = 11 \qquad 12 \cdot 1 = 1 \cdot 21$$

# Algèbre associée à Surj

## Proposition [Burgunder-Curien-D.O., 18+]

Les algèbres sur l'opérade Surj sont les algèbres munies de trois opérations $\prec = (\{1\},\{2\})$, $\succ = (\{2\},\{1\})$ et $\cdot = (\{1,2\})$ vérifiant les relations suivantes, pour tous éléments $x$, $y$ et $z$ :

- $* = \prec + \cdot + \succ$ et $\cdot$ sont associatives,
- $x \prec y = y \succ x$
- $(x \prec y) \prec z = x \prec (y * z) = (x \prec y) \prec z$,
- $(x \cdot y) \prec z = x \cdot (y \prec z) = y \cdot (x \prec z)$.

## Proposition [Burgunder-Curien-D.O., 18+]

L'algèbre libre sur un élément associé aux compositions d'ensembles est l'algèbre des compositions d'entiers munie des produits :

- $u \prec v = v \succ u = (u_1, \tilde{u} * v)$
- $u \cdot v = (u_1 + v_1, \tilde{u} * \tilde{v})$,

avec $u * v = u \prec v + v \prec u + u \cdot v$ et $\emptyset * u = u * \emptyset = \delta_{u \neq \emptyset} u$

# Feuille de route

**Objectif :**

Trouver des opérades dont les objets sous-jacents sont les structures combinatoires étiquetant les faces des polytopes.
($\Leftrightarrow$ Munir l'e.v. engendré par les étiquettes des faces d'une structure d'algèbre libre sur un générateur dans le cas non symétrique)

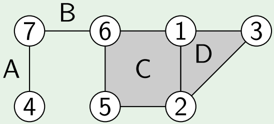
# Hypergraphes

## Définition

Un *hypergraphe (de sommets $V$)* est un couple $(V, E)$ où :

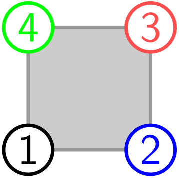
- $V$ est un ensemble fini, (*ensemble de sommets*)
- $E$ est un ensemble d'ensembles d'au moins 2 sommets, $E \subset \mathcal{P}(V)$, avec $|e| \geq 2$ pour toute arête $e \in E$.

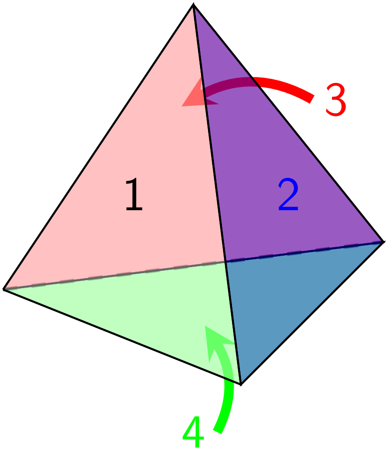
## Exemple d'un hypergraphe sur $[1; 7]$




.

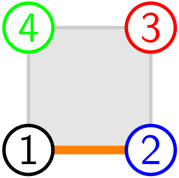
# Polytopes d'hypergraphes [Dosen, Petric] (=nestoèdre [Postnikov])

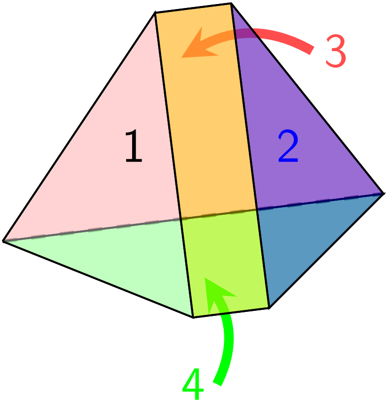



Par défaut, l'hypergraphe contient une arête contenant tous les sommets.

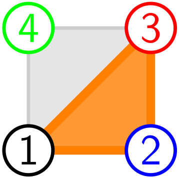
# Polytopes d'hypergraphes [Dosen, Petric] (=nestoèdre [Postnikov])

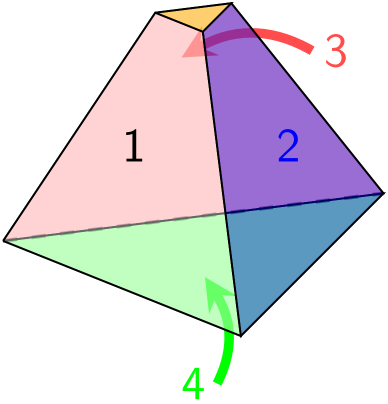



L'arête $\{a_1, \ldots, a_n\}$ correspond à la troncature de $a_1 \cap \ldots \cap a_n$.

# Polytopes d'hypergraphes [Dosen, Petric] (=nestoèdre [Postnikov])

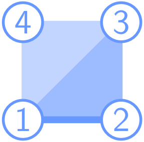


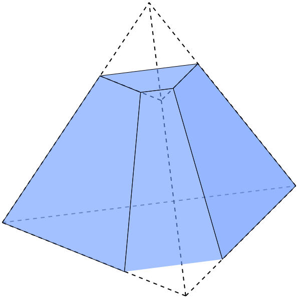




L'arête $\{a_1, \ldots, a_n\}$ correspond à la troncature de $a_1 \cap \ldots \cap a_n$.
La troncature de $a_1 \cap \ldots \cap a_p \cap b$ et $a_1 \cap \ldots \cap a_p \cap c$ nécessite celle de $a_1 \cap \ldots \cap a_p$.

# Polytopes d'hypergraphes [Dosen, Petric] (=nestoèdre [Postnikov])

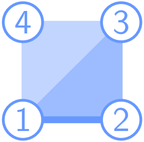
Exemple de la troncature associée à l'hypergraphe en drapeau :

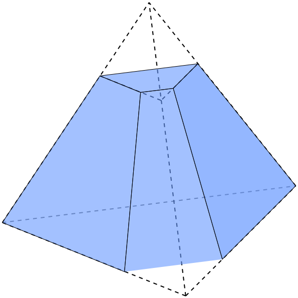


# Polytopes d'hypergraphes [Dosen, Petric] (=nestoèdre [Postnikov])

Exemple de la troncature associée à l'hypergraphe en drapeau :



C'est un cube !

# Constructions = tubages = épines

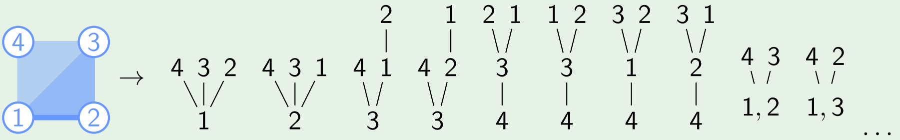
## Construction [Postnikov ; Dosen-Petric ; Curien-Ivanovic-Obradovic]

La démolition d'un hypergraphe $H$ est définie récursivement. Pour $E \in V(H)$ (l'ensemble des sommets de $H$),

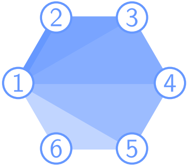
- Si $E = V(H)$, la démolition associée est l'arbre enraciné sur un sommet de racine $E$,
- Sinon, notant $(T_1, \ldots, T_n)$ les démolitions de chacune des composantes connexes de $H - E$, une démolition de l'hypergraphe tout entier peut être obtenue en greffant ces arbres sur une racine étiquetée $E$.

L'ensemble des démolitions étiquette les faces des polytopes.

## Premier exemple :

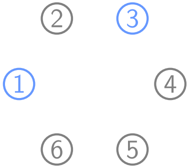


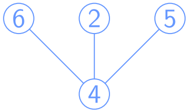
# Cas du cube



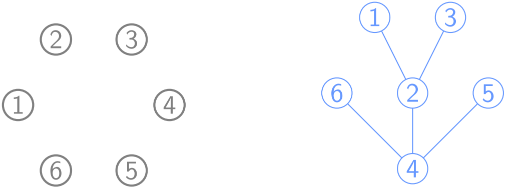
# Cas du cube

# Cas du cube

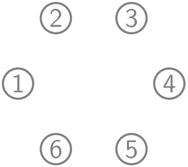


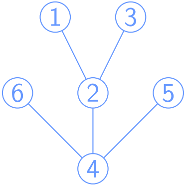



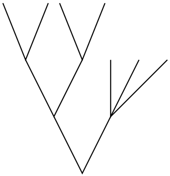
# Cas du cube

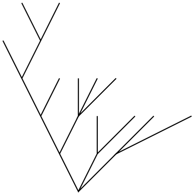


# Cas du cube

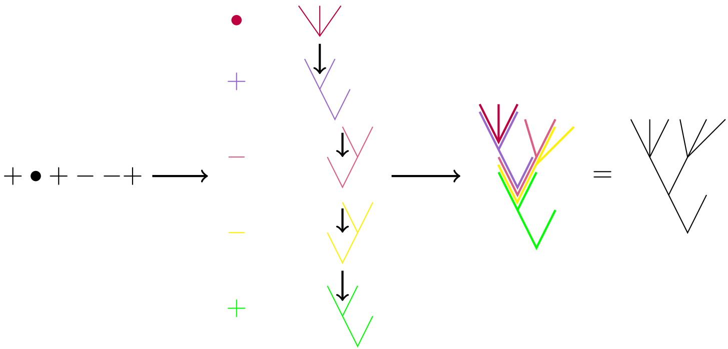




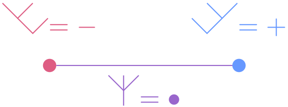
# Cas du cube : lien avec $3^n$



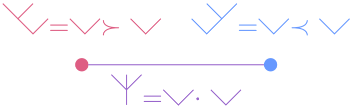
# Interprétation combinatoire des démolitions

Simplexe À une face $\{a_1, \ldots, a_k\}$ de dimension $k$ est associé l'ensemble multipointé $(V(H), \{a_1, \ldots, a_k\})$

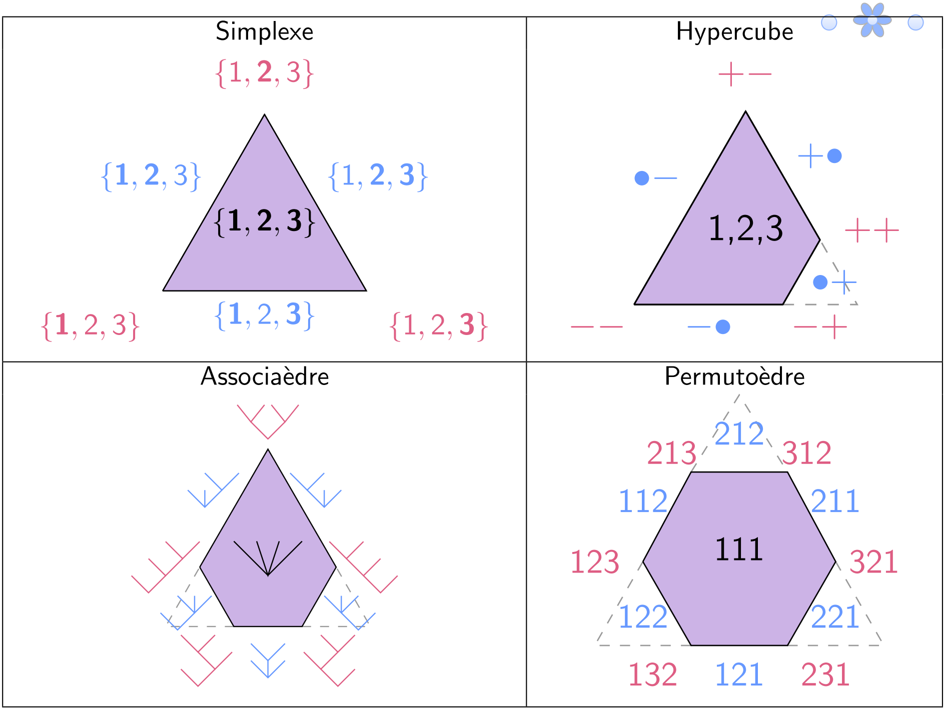

Cube À une face de dimension $k$ est associé l'ensemble des mots de longueur $n-1$ sur $+, -$ avec $k$ $\bullet$ (ou des arbres peignés à gauche)



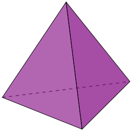
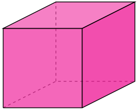
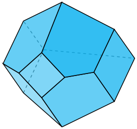
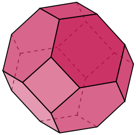
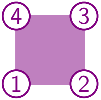
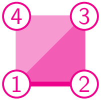
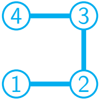
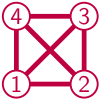

Associaèdre À chaque face est associée un arbre plan

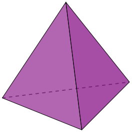
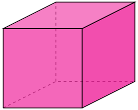
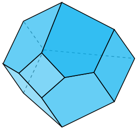
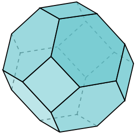
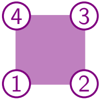
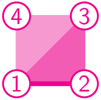
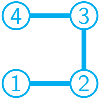
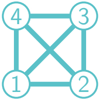


Permutoèdre À chaque face de dimension $k$ est associée une surjection de hauteur $k$



Simplexe
{1, 2, 3}
{1, 2, 3}
{1, 2, 3}
{1, 2, 3}
{1, 2, 3}
{1, 2, 3}
{1, 2, 3}
Hypercube
+−
•−
+•
1,2,3
++
•+
−−
−•
−+
Associaèdre
Permutoèdre
212
213
312
112
211
111
123
321
122
221
132
121
231

| Polytope | Simplexe | Hypercube | Associaèdre | Permutoèdre |
|---|---|---|---|---|
| Photo |  |  |  |  |
| Hypergraphe associé |  |  |  |  |
| Objet combinatoire | ensembles multipointés | arbres peignés gauches | arbres plans | surjections |
| Cardinal | $2^{n+1}-1$ (A074909) | $3^n$ (A013609) | Super-Catalan (A001003) | nbrs de Fubini (A000670) |

| Polytope | Simplexe | Hypercube | Associaèdre | Permutoèdre |
|---|---|---|---|---|
| Photo |  |  |  |  |
| Hypergraphe associé |   |   |   |   |
| Opérade | Trias [Loday-Ronco, Chapoton] | Tricube | Tridendriform [Loday-Ronco, Chapoton] | Surj (version filtrée de [Chapoton]) |

# Tristructures

# Familles de graphes (cas non symétrique)

## Définition [Ronco, 2011]

Soit $G = \{G_n^i, n \geq 1, 1 \leq i \leq g_n\}$ une famille de graphes simples, où $G_n^i$ est un graphe sur $\{1, \ldots, n\}$ pour tout i. Cette famille est admissible si

- il existe un ensemble de fonctions associatives :
$$\alpha(n, m) : \{1, \ldots, g_n\} \times \{1, \ldots, g_m\} \to \{1, \ldots, g_{n+m}\}$$
- $\forall k, l \geq 1,\ k + l = n,\ G_n^{\alpha(k,l)(i,j)}\Big|_{\{1,\ldots,k\}}$ (resp. $G_n^{\alpha(k,l)(i,j)}\Big|_{\{k+1,\ldots,n\}}$) est obtenu depuis $G_k^i$ (resp. $G_l^j$) en retirant des arêtes (resp. et décalant les sommets).

Cette condition d'admissibilité implique que l'ordre induit sur $\{1, \ldots, k\}$ (resp. $\{k + 1, \ldots, k + l\}$) par une démolition de $G_n^{\alpha(k,l)(i,j)}$ correspond effectivement à une démolition de $G_k^i$ (resp. $G_l^j$).

# Produit $*$

## Définition [Ronco, 2011]

Notant $\mathcal{C}(G)$, l'e.v. des démolitions d'un graphe G, on définit le produit suivant :

$$* : \mathcal{C}(G_k^i) \times \mathcal{C}(G_l^j) \to \mathcal{C}(G_n^{\alpha(k,l)(i,j)})$$
$$T * W = \sum U,$$

où la somme parcourt l'ensemble des $U \in \mathcal{C}(G_n^{\alpha(k,l)(i,j)})$ tq :

- $y \in \mathrm{Desc}_U(x) \implies y \in \mathrm{Desc}_S(x)$ $(S = T \text{ ou } W)$

## Théorème (Ronco, 2011)

*Si tous les graphes sont connexes et* $\forall k, l \geq 1$, $k + l = n$,
$G_n^{\alpha(k,l)(i,j)}\Big|_{\{1,\dots,k\}} = G_k^i$ *et* $G_n^{\alpha(k,l)(i,j)}\Big|_{\{k+1,\dots,n\}} = G_l^j + k$,
*le produit* $*$ *est associatif.*

# Tristructures

Soit $\{H_n\}_{n\geq 1}$ une famille d'hypergraphes,
$H_n$ hypergraphe sur $n$ sommets.

Pour $T = \begin{array}{c} T_1 \ \cdots \ T_n \\ \diagdown \ \mid \ \diagup \\ T_0 \end{array} \in \mathcal{C}(G_k)$ et $S = \begin{array}{c} S_1 \ \cdots \ S_m \\ \diagdown \ \mid \ \diagup \\ S_0 \end{array} \in \mathcal{C}(G_l)$ définissons :

- $T \prec S = \sum_{U_0 = T_0} U$
- $T \succ S = \sum_{U_0 = S_0} U$
- $T \cdot S = \sum_{U_0 = T_0 \cup S_0} U$,

où la somme parcourt l'ensemble des $U \in \mathcal{C}(G_{k+l})$ tq :

- $x \in V(U) \implies x \in V(T) \cup V(W)$
- $x, y \in V(U) \cap V(S)$ $(S = T \text{ ou } W)$, $y \in \mathrm{Desc}_S(x) \implies x \notin \mathrm{Desc}_U(x)$

## Cas symétrique

il faut chaque $H_n$ invariant par l'action de $\mathfrak{S}_n$ $\to$ considérer des orbites d'hypergraphes ?

# Exemple : Trialgèbre du simplexe (=Trias)

Les démolitions des simplexes sont les ensembles multipointés.

Les opérations précédentes sont alors données par :

$$T \prec S = T \cup \bar{S}, \;\; T \succ S = \bar{T} \cup S, \;\; T \cdot S = T \cup S,$$

où $\bar{T}$ (resp. $\bar{S}$) est l'ensemble sous-jacent à l'ensemble multi-pointé $T$ (resp. $S$).

Cette algèbre est l'algèbre Trias introduite par Loday et Ronco.

# Exemple : Trialgèbre des hypercubes (=nouveau !)

Les démolitions de l'hypercube sont les mots sur $\{+,-,\bullet\}$ de longueur $n-1$.
$=$ mots sur $\{+,-,\bullet\}$ de longueur $n$ commençant par $+$

Les opérations précédentes sont données par :

$$\begin{aligned} u \prec v &= u(-^{|v|}), \\ u \succ (v_1+v_2) &= (u * v_1) + v_2, \\ u \cdot (v_1+v_2) &= u(-^{|v_1|}) \bullet v_2, \end{aligned}$$

où $v_2$ est un mot de $\{-,\bullet\}$, $* = \prec + \succ + \cdot$ et $u * \epsilon = u$.

L'opérade associée est Tricube.

# Bilan

## Fait

- Cadre unifié pour les tristructures sur des polytopes d'hypergraphes
- Nouveaux exemples d'opérades
- Méthode du blue print

## À venir

- Définir les conditions exactes qui permettent d'associer une opérade à la tristructure
- Munir les algèbres d'une structure d'algèbre de Hopf,
- Étudier les variantes quantifiées de ces algèbres :

$$a * b = a \prec b + q \ a \cdot b + a \succ b,$$

- Regarder les liens entre les algèbres venant de troncatures de polytopes (par exemple le lien entre surjections et tridendriforme),
- Étudier d'autres exemples, ...

Merci de votre attention !