Bijections autour des bois de Schnyder

Éric Fusy
Résumé par Jérémie Bouttier

Séminaire de Combinatoire Philippe Flajolet
Institut Henri Poincaré, Séance du 31 janvier 2013

Résumé

Les bois de Schnyder sont des structures combinatoires sur les triangulations planaires (aussi graphes planaires maximaux), introduites à l'origine par Schnyder pour fournir un nouveau critère de planarité. Ces structures se sont avérées également très pertinentes d'un point de vue algorithmique et elles bénéficient d'une riche combinatoire bijective que nous survolerons ici, ainsi que des généralisations à d'autres classes de graphes.

1 Structures de Schnyder sur les triangulations simples

1.1 Définitions

Considérons une *triangulation simple* T, c'est-à-dire une triangulation planaire sans arêtes multiples et sans boucles, où une face est distinguée (*face externe*). Schnyder [1] a introduit plusieurs «structures» sur T, que nous allons définir. Ces structures sont toutes équivalentes (i.e. en bijection) entre elles.

Pour alléger la rédaction, il est utile d'introduire la notion de bon tricoloriage. Un *tricoloriage* d'un ensemble est une application qui associe à chaque élément une couleur parmi trois, mettons rouge, bleu et vert. Très souvent, on pourra naturellement énumérer les éléments dans le sens des aiguilles d'une montre. Dans ce contexte, un *bon tricoloriage* est un tricoloriage dans lequel tous les éléments rouges apparaissent consécutivement, suivis des bleus, et enfin des verts. On dira que l'ensemble est *bien tricolorié.*

Étiquetages de Schnyder Un *étiquetage de Schnyder* est un tricoloriage des coins internes de T satisfaisant les contraintes suivantes :

- l'ensemble des trois coins de chaque face interne est bien tricolorié,
- l'ensemble des coins incidents à un sommet interne est bien tricolorié,
- tous les coins incidents à un même sommet externe sont de même couleur (ce qui, par les précédentes contraintes, induit un bon tricoloriage des trois sommets externes).

Bois de Schnyder Un *bois de Schnyder* est la donnée d'un tricoloriage et d'une orientation des arêtes internes de T, telle que :

- chaque sommet interne possède trois arêtes sortantes, bien tricoloriées,
- les arêtes entrantes en chaque sommet interne sont bien tricoloriées, de plus les arêtes entrantes rouges apparaissent précisément entre la sortante bleue et la sortante verte, et il en est de même en permutant cycliquement les trois couleurs,

– toutes les arêtes internes incidentes à un même sommet externe sont de même couleur, et orientées vers celui-ci (à nouveau ceci induit un bon tricoloriage des trois sommets externes).

L'ensemble des arêtes rouges forme un arbre couvrant tous les sommets de T, sauf les sommets externes bleu et vert, et dont toutes les arêtes sont orientées en direction du sommet externe rouge. Bien sûr il en va de même pour les arêtes bleues et les arêtes vertes.

3-orientations Voici une définition qui mettra moins à l'épreuve votre vision des couleurs. Une *3-orientation* est une orientation des arêtes internes de T telle que :

– chaque sommet interne a degré sortant 3,
– chaque sommet externe a degré sortant 0.

1.2 Quelques résultats antérieurs

Applications des bois de Schnyder [1, 2] Un bois de Schnyder permet d'associer canoniquement à tout sommet A de T trois coordonnées entières de la manière suivante : dans chacun des trois arbres rouge, bleu et vert, considérons l'unique chemin orienté menant de A à la racine. Ces trois chemins partitionnent l'ensemble des faces de T en trois «aires». On note alors n_1 le nombre de triangles dans l'aire «rouge» (délimitée par les chemins bleu et vert), et on définit de même n_2 et n_3 en permutant circulairement les couleurs.

Clairement n_1, n_2 et n_3 sont des entiers positifs tels que $n_1 + n_2 + n_3$ est égal au nombre total de faces de T. Ceci donne un algorithme de tracé en lignes droites, (n_1, n_2, n_3) donnant les coordonnées de A dans le simplexe de dimension 2. De plus, cette construction est liée à un critère de planarité [1].

Comptage bijectif des triangulations munies d'un bois de Schnyder On revisite ici une bijection due à Bonichon [3] dans le contexte «dual». Considérons une triangulation T munie d'une structure de Schnyder (qu'on verra tour à tour comme un bois ou un étiquetage). On introduit alors le dual $\tilde{T}$ de T, qui est un graphe 3-régulier, et on colorie en orange les arêtes de $\tilde{T}$ duales aux arêtes rouges de T. Il y a une bijection canonique entre les coins de T et ceux de $\tilde{T}$, et en «transférant» les couleurs de l'étiquetage de Schnyder on obtient un tricoloriage des coins de $\tilde{T}$. On coupe ensuite les arêtes oranges de $\tilde{T}$ en leur milieu, ce qui donne un arbre binaire muni d'un parenthésage des feuilles. Un tel objet possède une représentation «rectilinéaire», codée par deux mots binaires, qu'on peut *in fine* mettre en bijection avec une paire ordonnée de chemins de Dyck.

En appliquant le lemme de Lindström-Gessel-Viennot, on obtient en corollaire de cette bijection une expression pour le nombre s_n de triangulations à $n + 3$ sommets internes munies d'un bois de Schnyder, à savoir

$$s_n = \mathrm{Cat}_n \mathrm{Cat}_{n+2} - (\mathrm{Cat}_{n+1})^2 = \frac{6(2n)!(2n+2)!}{n!(n+1)!(n+2)!(n+3)!}. \tag{1}$$

1.3 Comptage bijectif des triangulations simples

Treillis des structures de Schnyder L'ensemble des structures de Schnyder sur T est en fait un treillis distributif [4, 5]. La relation de couverture est donnée par les «flips», et se formule de manière simple dans le langage des 3-orientations : étant donné une 3-orientation, s'il existe un 3-cycle orienté dans le sens direct, alors on obtient une 3-orientation couvrant la précédente en retournant les arêtes de ce cycle. (La version bois est obtenue de manière immédiate en «recoloriant».) La 3-orientation minimale est celle qui ne contient aucun cycle indirect.

Orientations et mobiles Considérons l'ensemble $\mathcal{O}$ des cartes planes (avec une face externe distinguée) munies d'une orientation des arêtes internes, telles que :

- il n'existe aucun cycle indirect,
- de tout sommet interne on peut accéder au cycle externe par un chemin orienté,
- le cycle externe est un «puits» (i.e. un sommet externe n'a aucune arête sortante).

Considérons par ailleurs l'ensemble $\mathcal{M}$ des *mobiles*, i.e. des arbres plans bipartis (i.e. dont les sommets sont bicoloriés en noir et blanc) d'où pointent des flèches (appelées *bourgeons*) en chaque sommet noir. Il existe une *bijection-maîtresse* [6] entre $\mathcal{O}$ et $\mathcal{M}$, construite à l'aide des règles «locales», et induisant les correspondances suivantes :

- une face interne de degré k dans $O \in \mathcal{O}$ correspond à un sommet noir de degré k dans $M \in \mathcal{M}$,
- un sommet interne de degré sortant ℓ dans $O \in \mathcal{O}$ correspond à un sommet blanc de degré ℓ dans $M \in \mathcal{M}$.

Spécialisation au cas des triangulations simples En considérant la 3-orientation minimale, on obtient une bijection entre l'ensemble des triangulations simples et une sous-famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}$ où toutes les faces ont degré 3, et tous les sommets internes ont degré sortant 3. En spécialisant la bijection-maîtresse, on obtient une bijection entre $\mathcal{F}$ et l'ensemble des mobiles dont tous les sommets ont degré 3. On retrouve ainsi une bijection connue [7]. Mentionnons qu'une autre bijection avait été précédemment obtenue par Poulalhon et Schaeffer [8].

Application au comptage Appliquons la bijection au cas d'une triangulation ayant une face interne marqué. On obtient un mobile ayant un sommet noir distingué, et en coupant à ce sommet on obtient trois arbres enracinés qui sont soit restreints à des flèches, soit en bijection avec arbres quaternaires. Notons t_n le nombre de triangulations simples enracinées à $n+3$ sommets, et introduisons la série génératrice $F(x) = \sum_n t_n x^{2n+1}$. On déduit immédiatement que

$$F'(x) = (1+u)^3 \qquad \text{où} \qquad u = x^2(1+u)^4. \tag{2}$$

Par inversion de Lagrange, on retrouve le résultat de Tutte [9]

$$t_n = \frac{2(4n+1)!}{(n+1)!(3n+2)!}. \tag{3}$$

Une formulation coloriée de la bijection Prenons l'étiquetage de Schnyder associé à une 3-orientation. On remplace alors chaque triangle interne par une «étoile» (en ajoutant un sommet noir au milieu), chaque coin donnant une arête. En transférant les couleurs, on obtient une carte bipartie telle que les sommets noirs ont degré trois, et les arêtes incidentes à un sommet (noir ou blanc) sont bien tricoloriées.

Pour chaque sommet blanc interne, on coupe alors toutes les arêtes incidentes, sauf la dernière de chaque couleur. On efface ensuite les sommets externes et leurs demi-arêtes incidentes. On obtient alors un mobile, dont il est facile de se convaincre qu'il coïncide avec celui obtenu par la bijection-maîtresse.

2 Extensions

Nous allons étendre l'approche bijective précédente à deux classes de cartes généralisant les triangulations simples :

1. les cartes 3-connexes, pour lesquelles nous allons étendre la formulation «coloriée» de la bijection, et aboutir à une généralisation de (3),

2. les d-angulations de maille d, pour lesquelles nous allons étendre la formulation «orientée» de la bijection, et aboutir à une généralisation de (2).

2.1 Cartes 3-connexes

Rappelons qu'un graphe est dit 3-connexe s'il faut supprimer au moins 3 sommets pour le déconnecter. Une triangulation est 3-connexe si et seulement si elle est simple. Considérons à présent une carte plane où trois sommets externes sont distingués et bien tricoloriés : la carte est dite *quasi 3-connexe* si en complétant la carte par un triangle reliant les trois sommets marqués (tracé dans la face externe), la carte résultante est 3-connexe. On note $\mathcal{Q}_{i,j}$ l'ensemble des cartes quasi 3-connexes à $i+3$ sommets et j faces internes. Remarquons que les triangulations simples sont retrouvées en prenant la plus grande valeur possible de j à i fixé ($j = 2i + 1$).

Dualité La famille des cartes quasi 3-connexes est stable par dualité (modulo un traitement légèrement différent de la face externe), ce qui implique que $\mathcal{Q}_{i,j}$ est en bijection avec $\mathcal{Q}_{j,i}$. Cette dualité se voit aisément en introduisant la *cartes des coins* : étant donné une carte quasi 3-connexe G, on remplace chaque face par une étoile, comme précédemment (il faut traiter la face externe comme étant divisée en trois), et on aboutit à une carte C qui est une dissection d'un hexagone par des faces quadrangulaires. La 3-connexité de G équivaut à demander que C soit «irréductible», i.e. que les seuls 4-cycles y soient les contours des faces. La carte duale G^* possède la même carte des coins C.

Étiquetages de Schnyder Cette notion peut être étendue au cas des cartes 3-connexes [10, 11] : il s'agit d'un tricoloriage des coins tel quel :
- l'ensemble des coins de chaque face interne est bien tricolorié,
- l'ensemble des coins d'un sommet non marqué est bien tricolorié,
- tous les coins incidents à un même sommet marqué sont de la même couleur que celui-ci,
- l'ensemble des coins externes incidents à des sommets non marqués est bien tricolorié, de plus les coins rouges apparaissent précisément entre les sommets marqués bleu et vert, et de même en permutant cycliquement les couleurs.

Mentionnons qu'il existe d'autres incarnations de ces objets sous forme de bois de Schnyder et de 3-orientations.

Étant donné une carte quasi 3-connexe G, ses étiquetages de Schnyder sont en bijection avec ceux de G^*, comme on peut voir par un «transfert» des couleurs analogue à celui de la section 1.2. Cette dualité se voit à nouveau de manière agréable sur la carte des coins C, puisqu'un étiquetage de Schnyder de G équivaut à un tricoloriage des arêtes internes de C tel qu'autour de chaque sommet interne, les arêtes sont bien tricoloriées. À nouveau, l'ensemble des étiquetages de Schnyder de G forme un treillis distributif [11] (la notion de «flip» étendant celle du cas des triangulations).

Comptage bijectif des cartes quasi 3-connexes On munit à présent G de son étiquetage minimal, et on considère la carte des coins C tricoloriée associée. Pour chaque sommet interne de C, on coupe toutes les arêtes incidentes, sauf la dernière de chaque couleur : l'objet résultat est alors un arbre binaire non enraciné [7], dont les sommets sont bicoloriés et les arêtes tricoloriées. Si G comporte $i + 3$ sommets et j faces internes, alors l'arbre comporte i sommets noirs et j sommets blancs. Ceci conduit à une formule de comptage pour les cartes quasi 3-connexes avec une face interne marquée : cela revient à compter des triples d'arbres binaires enracinés, en contrôlant séparément les nombres de sommets noirs et blanc (la racine étant noire). Si on pose

$q_{i,j} = |\mathcal{Q}_{i,j}|$, et $F(x_\circ, x_\bullet) = \sum_{i,j} q_{i,j} x_\circ^i x_\bullet^j$, alors il suit de la bijection que

$$\frac{\partial}{\partial x_\bullet} F(x_\circ, x_\bullet) = (1+U)^3 \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} U = x_\circ(1+V)^2 \\ V = x_\bullet(1+U)^2 \end{cases}, \tag{4}$$

et par inversion de Lagrange on retrouve le résultat de Mullin-Schellenberg [12]

$$q_{i,j} = \frac{3}{(2i+1)(2j+1)} \binom{2i+1}{j} \binom{2j+1}{i}. \tag{5}$$

On retrouve (3) dans le cas «extrémal» $j = 2i + 1$.

2.2 d-angulations de maille d

Rappelons que la *maille* d'un graphe est la longueur minimale d'un cycle. Une carte est simple si et seulement si sa maille est supérieure ou égale à 3. Si la maille est égale à d, alors toutes les faces ont degré au moins d (en particulier une triangulation est simple si et seulement si elle a maille 3).

Fixons un entier $d \geq 3$, on considère alors l'ensemble des *d-angulations* (i.e. des cartes dont toutes les faces ont degré d) planes de maille d. Par la relation d'Euler, le rapport du nombre d'arêtes internes au nombre de sommets internes est $d/(d-2)$. Étant donné une d-angulation G, on considère la carte $(d-2)G$ dans laquelle chaque arête de G est remplacée par $d-2$ copies «parallèles». Alors G est de maille d si et seulement si $(d-2)G$ possède une orientation dans laquelle tout sommet interne a degré sortant d [6]. Une telle $d/(d-2)$-*orientation* peut également être vue une application car à chaque demi-arête associe un «flux sortant», de telle sorte que le flux total sur chaque arête interne est $d-2$ et le flux total sur chaque sommet interne est d. On peut également donner des formulations en termes d'étiquetages ou bois de Schnyder.

L'ensemble des $d/(d-2)$-orientations d'une d-angulation fixée peut être muni d'une structure de treillis, un flip consistant à incrémenter le flux dans le sens indirect. L'orientation minimale est alors celle ne contenant aucun circuit indirect. On peut alors appliquer la bijection-maîtresse (dans une formulation faisant intervenir les flux) pour transformer la carte en un mobile «pondéré» d'un certain type. Cette bijection se traduit directement en termes de séries génératrices : on est amené à introduire une famille $(L_0, L_1, \ldots, L_d)$ de séries comptant les mobiles en fonction du poids (flux) de leur arête-racine, spécifiées par

$$\begin{cases} L_0 = x(1+L_{d-2})^{d-1} \\ L_d = 1 \\ L_i = \sum_{j>0} L_{d-2-j} L_{i+j}, \quad i = 1, \ldots, d-1 \end{cases}.$$

Alors, la série génératrice $F_d(x)$ des d-angulations de maille d (comptées avec poids x par face interne) est donnée par

$$F_d'(x) = (1 + L_{d-2})^d.$$

Mentionnons qu'une autre bijection (faisant intervenir des «arbres bourgeonnants») a été donnée par Albenque et Poulalhon [13].

Références

[1] W. Schnyder, *Planar graphs and poset dimension*, Order 5(4) 323–343, 1989.

[2] W. Schnyder, *Embedding planar graphs in the grid*, Symposium on Discrete Algorithms (SODA) 138–148, 1990.

[3] N. Bonichon, *A bijection between realizers of maximal plane graphs and pairs of non-crossing dyck paths*, Proceedings of FPSAC'02 123–132, 2002.

[4] P. Ossona de Mendez, *Orientations bipolaires*, Thèse de doctorat, École des hautes études en sciences sociales, Paris, 1994.

[5] E. Brehm, *3-orientations and Schnyder 3–tree-decompositions*, Diplomarbeit, Freie Universität Berlin, 2000.

[6] O. Bernardi et É. Fusy, *A bijection for triangulations, quadrangulations, pentagulations, etc.*, Journal of Combinatorial Theory Ser. A119(1) 218–244, 2012 ; arXiv:1007.1292 [math.CO].

[7] É. Fusy, D. Poulalhon et G. Schaeffer, *Dissections, orientations, and trees, with applications to optimal mesh encoding and to random sampling*, Transactions on Algorithms 4(2) 19, 2008 ; arXiv:0810.2608 [math.CO].

[8] D. Poulalhon et G. Schaeffer, *A bijection for triangulations of a polygon with interior points and multiple edges*, Theoretical Computer Science 307(2) 385–401, 2003.

[9] W.T. Tutte, *A census of planar triangulations*, Canad. J. Math. 14 21–38, 1962.

[10] E. Miller, *Planar graphs as minimal resolutions of trivariate monomial ideals*, Documenta Math. 7 43–90, 2002.

[11] S. Felsner, *Lattice structures from planar graphs*, Electron. J. Combin. 11(1), 2004.

[12] R. Mullin and P. Schellenberg, *The enumeration of c-nets via quadrangulations*, J. Combin. Theory 4 259-276, 1968.

[13] M. Albenque et D. Poulalhon, *Generic method for bijections between blossoming trees and planar maps*, 2013 ; arXiv:1305.1312 [math.CO].