

Factorisations minimales d'un cycle, une série multivariée

Philippe Biane, Matthieu Josuat-Vergès

CNRS et Université de Marne-la-Vallée

Séminaire Flajolet, 3 février 2016

Le problème d'Hurwitz

Motivé par des questions géométriques (compter les classes d'équivalence de revêtements ramifiés de la sphère), Hurwitz s'est posé la question suivante: étant donné une permutation σ , combien y a-t-il de factorisations $\sigma = t_1 \cdots t_m$ telles que

- ▶ chaque t_i est une transposition,
- ▶ la factorisation soit transitive, i.e. le groupe engendré par t_1, \dots, t_m agisse transitivement sur $\{1, \dots, n\}$,
- ▶ m ait la valeur minimale telle qu'il existe une telle factorisation transitive.

Le problème d'Hurwitz

Motivé par des questions géométriques (compter les classes d'équivalence de revêtements ramifiés de la sphère), Hurwitz s'est posé la question suivante: étant donné une permutation σ , combien y a-t-il de factorisations $\sigma = t_1 \cdots t_m$ telles que

- ▶ chaque t_i est une transposition,
- ▶ la factorisation soit transitive, i.e. le groupe engendré par t_1, \dots, t_m agisse transitivement sur $\{1, \dots, n\}$,
- ▶ m ait la valeur minimale telle qu'il existe une telle factorisation transitive.

Si σ est de type cyclique $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, le nombre est

$$n^{m-3}(n+m-2)! \prod_{i=1}^m \frac{\lambda_i^{\lambda_i}}{(\lambda_i-1)!}.$$

[Hurwitz, 1891] [Strehl, 1996] [Bousquet-Mélou-Schaeffer, 2000]

Le cas où σ est un n -cycle est déjà intéressant. La condition de transitivité est alors automatiquement vérifiée, et on obtient:

Théorème

Le nombre de factorisations du long cycle $c = (1, 2, \dots, n)$ en produit de $n - 1$ transpositions est n^{n-2} .

[Dénes, 1959]

[Moszkowski, 1989] [Goulden et Pepper, 1993] (bijections avec les arbres de Cayley)

Exemple

Les trois factorisations minimales en transposition de (123) sont:

$$(123) = (12)(23) = (13)(12) = (23)(13).$$

Une précision: pourquoi le nombre minimal de transpositions pour factoriser c est $n - 1$?

- ▶ Si t est une transposition, entre deux permutation σ et $\sigma \cdot t$, le nombre de cycles varie de ± 1 .
- ▶ Donc $t_1 \cdots t_i$ a au moins $n - i$ cycles.
- ▶ Donc $i \geq n - 1$ si $t_1 \cdots t_i$ a un seul cycle.

Les partitions non-croisées

Ce dernier résultat sur n^{n-2} peut aussi se traduire en termes de partitions non-croisées.

Définition

Une partition de $\{1, \dots, n\}$ est non-croisée si il n'existe pas $i < j < k < l$ tels que i et k soient dans un même bloc, j et l dans un autre bloc.

Exemple

La partition $126|34|5|79A|8$ est non-croisée.



Les partitions non-croisées

Notons NC_n l'ensemble des partitions non-croisées sur $\{1, \dots, n\}$.

Proposition (Kreweras, 1972)

- ▶ *Le cardinal de NC_n est le n ème nombre de Catalan $\frac{1}{2n+1} \binom{2n}{n}$.*
- ▶ *Muni de l'ordre de raffinement, NC_n est un treillis. Le minimum est la partition en singletons $1|2| \dots |n$, le maximum est la partition en un seul bloc $12 \dots n$.*
- ▶ *Le nombre de chaînes maximales $\pi_1 \triangleleft \pi_2 \triangleleft \dots \triangleleft \pi_n$ dans NC_n est n^{n-2} .*

À une permutation σ , on peut associer une partition $\Pi(\sigma)$ donnée par la décomposition en cycles.

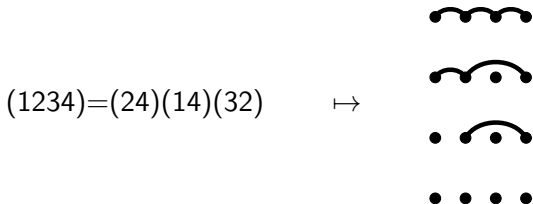
Théorème (Biane, 1997)

Soit une factorisation $c = t_1 \dots t_{n-1}$ du long cycle en transpositions. Alors

$$\Pi(\mathbf{1}), \Pi(t_1), \Pi(t_1 t_2), \dots, \Pi(t_1 \dots t_{n-1})$$

est une chaîne maximale de partitions non-croisées. Ceci définit une bijection entre factorisations du long cycle en transpositions et chaînes maximales de partitions non-croisées.

Exemple



Une idée de la preuve:

- ▶ d'abord, on montre que $t_1 \cdots t_i$ a $n - i$ cycles. En effet, le nombre de cycles varie de ± 1 pour aller de i à $i + 1$, pour $i = 0$ on a n cycles (permutation identité), pour $i = n - 1$ on a 1 cycle.
- ▶ On a
$$c.(i, j) = (1, \dots, n).(i, j) = (1, \dots, i, j + 1, \dots, n)(i + 1, \dots, j).$$
Ces deux derniers cycles ont la même structure que c lui-même (décalage cyclique sur un ensemble totalement ordonné). Et ils forment une partition non-croisée à deux blocs de $\{1, \dots, n\}$.
- ▶ En itérant le point précédent, on voit que chaque élément $\Pi(t_1 \dots t_i)$ a la structure requise (d'abord pour $i = n - 1$, puis $i \rightarrow i - 1$).

Le but de ce travail est de raffiner l'énumération des factorisations minimales (ou des chaînes de partitions non-croisées) en introduisant un poids multivarié (un monôme en des variables X_1, X_2, \dots)

Commençons par le cas à une seule variable.

Soit $\pi, \rho \in NC_n$. On suppose $\pi \triangleleft \rho$, c'est-à-dire π est obtenue à partir de ρ en "cassant" un bloc $B \in \rho$ en deux blocs B_1, B_2 . On distingue alors deux cas: B_1 et B_2 sont emboîtés, ou non.



Définition

Dans le deuxième cas, on note $\pi \sqsubset \rho$.

Soit $\pi, \rho \in NC_n$. On suppose $\pi \triangleleft \rho$, c'est-à-dire π est obtenue à partir de ρ en "cassant" un bloc $B \in \rho$ en deux blocs B_1, B_2 . On distingue alors deux cas: B_1 et B_2 sont emboîtés, ou non.



Définition

Dans le deuxième cas, on note $\pi \sqsubset \rho$.

Théorème

$$\sum X^{\#\{i: \pi_i \not\subseteq \pi_{i+1}\}} = \prod_{i=1}^{n-2} (iX + n - i)$$

où l'on somme sur les chaînes maximales de partitions non-croisées π_1, \dots, π_n .

Pourquoi définir une telle relation " \sqsubset " ?

- ▶ Elle a permis d'interpréter en termes de partitions non-croisées une formule d'équerre à un paramètre sur des arbres (formule de Postnikov–Lascoux–Du–Liu).
- ▶ On peut définir des partitions non-croisées associées à un groupe de réflexion réel (ou groupe de Coxeter fini). Les chaînes maximales de ces partitions non-croisées sont comptés par la formule de Deligne–Chapoton.

La relation " \sqsubset " peut être étendue dans ce cadre et donne un raffinement à un paramètre de la formule de Deligne–Chapoton.

Remarque

Le cas $X = 1$ du théorème redonne le cas connu (énumération non pondéré). Le cas $X = 0$ dit que le nombre de chaînes maximales $\pi_1 \sqsubset \cdots \sqsubset \pi_n$ est $(n - 1)!$. En effet, ce sont exactement les chaînes de partitions en intervalles, que l'on peut aussi interpréter comme les chaînes maximales du treillis booléen.

Soit $P_n(X)$ le membre de gauche dans le théorème, alors on a la récurrence:

Proposition

$$P_n(X) = \frac{2 + X(n-2)}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-2}{i-1} P_i(X) P_{n-i}(X).$$

Démonstration

Considérons d'abord l'action du long cycle sur les chaînes maximales de partitions non-croisées. Chaque orbite a n éléments, et contient exactement deux éléments tels que $\pi_{n-1} \sqsubset \pi_n$. Cela permet d'obtenir le facteur $2 + X(n-2)$.

Ensuite, soit B_1 et B_2 les deux blocs de π_{n-1} (on les numérote, quitte à diviser par deux le résultat final). En regardant ce qu'il y a sous B_1 , et sous B_2 , on voit deux chaînes de partitions non-croisées de taille i et $n-i$, ce qui permet d'écrire la récurrence.

Cette récurrence donne une équation différentielle sur la série génératrice exponentielle $\sum_{n \geq 1} P_{n-1}(X) \frac{z^n}{n!}$. On peut l'intégrer pour obtenir une équation algébrique qui est essentiellement celle de la série des nombres de Fuss-Catalan, et on en déduit la formule exacte.

Remarque

Dans le cas $X = 1$, l'identité précédente est:

$$n^{n-2} = \frac{n}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-2}{i-1} i^{i-2} (n-i)^{n-i-2}.$$

(cas particulier d'une identité d'Abel).

Et le cas multivarié ?

L'idée est la suivante: au lieu de considérer le polynôme $\sum X^{\#\{i: \pi_i \not\leq \pi_{i+1}\}}$, on va remplacer chaque puissance de X par un monôme en X_1, X_2, \dots . Le résultat est le suivant:

Théorème

$$\sum \prod_{i=1}^{n-2} X_i^{\chi[\pi_i \not\leq \pi_{i+1}]} = \prod_{i=1}^{n-2} (iX_i + n - i)$$

où l'on somme sur les chaînes de partitions non-croisées $\pi_0 \leq \dots \leq \pi_{n-1}$, et $\chi[\dots]$ vaut 1 ou 0 selon que le contenu des crochets est vrai ou faux.

Mais la preuve précédente ne s'adapte pas immédiatement. En notant $P_n(X_0, \dots, X_{n-2})$ le membre de gauche, on trouve la récurrence:

$$P_n(X_0, \dots, X_{n-2}) = \frac{2+(n-2)X_{n-2}}{2} \sum P_{\#I+1}(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots) P_{\#J+1}(X_{j_1}, X_{j_2}, \dots)$$

où l'on somme sur les décompositions $\{0, \dots, n-3\} = I \uplus J$, et $I = \{i_1, i_2, \dots\}$, $J = \{j_1, j_2, \dots\}$. Et $P_1 = 1$.

Exemple

$$P_5(X_0, X_1, X_2, X_3) = (2 + 3X_3)(P_4(X_0, X_1, X_2) + P_2(X_0)P_3(X_1, X_2) + P_2(X_1)P_3(X_0, X_2) + P_2(X_2)P_3(X_0, X_1))$$

Nous n'avons toujours pas de solution directe à cette récurrence. Mais des équations similaires apparaissent dans les travaux de Féray et Goulden sur des formules d'équerre multivariées. L'équation précédente a une solution naturelle en terme d'arbres et d'équerres, de sorte que le théorème précédent est équivalent à une formule d'équerre.

Cependant, il est possible d'avoir un énoncé plus général dont la preuve est totalement bijective. Il s'agit alors de considérer des factorisations minimales en cycles.

Définition

Soit $\underline{a} = (a_1, \dots, a_r)$ avec $a_i \geq 2$ un vecteur d'entiers. On appelle factorisation de type \underline{a} , une factorisation

$$c = \sigma_1 \dots \sigma_r$$

où σ_i est un cycle de longueur a_i .

Proposition

Il n'existe pas de telles factorisations si $\sum_{i=1}^r (a_i - 1) < n - 1$.

La factorisation est dite minimale, si $\sum_{i=1}^r (a_i - 1) = n - 1$.

Théorème

Le nombre de factorisations minimales de c de type \underline{a} est n^{r-1} .

[Biane 1997] Preuve bijective par récurrence sur r .

[Goulden et Jackson 1996] Caractères et fonctions symétriques

[Krattenthaler et Müller 2010] Formules très générales pour les factorisations minimales dans les groupes de Coxeter selon des types cycliques quelconques.

[Du et Liu 2013] Preuve bijective

À une factorisation $\sigma_1 \dots \sigma_r$ de type \underline{a} , on peut toujours associer une suite de partitions non-croisées π_0, \dots, π_r avec $\pi_i = \Pi(\sigma_1 \dots \sigma_i)$.

Ainsi ces factorisations sont en bijection avec des suites π_0, \dots, π_r caractérisée par:

- ▶ $\pi_r = \hat{1}$ la partition maximale,
- ▶ π_{i-1} est obtenue à partir de π_i en scindant un bloc $B \in \pi_i$ en $a_i - 1$ blocs, tel que:
 - ▶ soit chacun des $a_i - 1$ nouveaux blocs est un intervalle dans B :



- ▶ soit $a_i - 2$ nouveaux blocs sont des intervalles voisins dans B et le dernier bloc est au-dessus:



On note $\pi_{i-1} \sqsubset \pi_i$ dans le premier cas, $\pi_{i-1} \not\sqsubset \pi_i$ dans le deuxième.

Théorème

Soit $b_i = \sum_{j=1}^i (a_j - 1)$. On a

$$\sum \prod_{i=0}^{r-1} X_i^{\chi[\pi_i \not\prec \pi_{i+1}]} = \prod_{i=1}^{r-1} (b_i X_i + n - b_i).$$

où l'on somme sur les chaînes de partitions non-croisées π_0, \dots, π_r correspondant aux factorisations minimales de c de type \underline{a} .

Cela prouve en particulier le cas précédent pour les factorisations en transpositions ($r = n - 1$, $a_i = 2$, $b_i = i$).

Et la preuve peut se faire par récurrence sur r .

Soit $P_{\underline{a}}(X_1, \dots, X_{r-1})$ le polynôme pour l'énumération raffinée des factorisations de type $\underline{a} = (a_1, \dots, a_r)$.

Pour prouver le théorème, il suffit de montrer

$$P_{\underline{a}}(X_1, \dots, X_{r-1}) = P_{\underline{a}'}(X_1, \dots, X_{r-2}) \times ((n - a_r)X_{r-1} + a_r).$$

avec $\underline{a}' = (a_1, \dots, a_{r-2}, a_{r-1} + a_r - 1)$. En effet un récurrence immédiate donne la forme factorisée pour $P_{\underline{a}}$.

Cela se fait en définissant une application Ψ qui à une factorisation de type \underline{a} associe une factorisation de type \underline{a}' , telle que:

- ▶ chaque élément dans l'image a n pré-images,
- ▶ un élément et son image ont le même poids $\prod X_j$, sauf éventuellement pour le facteur X_{r-1} .
- ▶ parmi les n préimages d'un élément, $n - a_r$ ont un facteur X_{r-1} dans leur poids $\prod X_j$, les autres non.

Soit $P_{\underline{a}}(X_1, \dots, X_{r-1})$ le polynôme pour l'énumération raffinée des factorisations de type $\underline{a} = (a_1, \dots, a_r)$.

Pour prouver le théorème, il suffit de montrer

$$P_{\underline{a}}(X_1, \dots, X_{r-1}) = P_{\underline{a}'}(X_1, \dots, X_{r-2}) \times ((n - a_r)X_{r-1} + a_r).$$

avec $\underline{a}' = (a_1, \dots, a_{r-2}, a_{r-1} + a_r - 1)$. En effet une récurrence immédiate donne la forme factorisée pour $P_{\underline{a}}$.

Cela se fait en définissant une application Ψ qui à une factorisation de type \underline{a} associe une factorisation de type \underline{a}' , telle que:

- ▶ chaque élément dans l'image a n pré-images,
- ▶ un élément et son image ont le même poids $\prod X_j$, sauf éventuellement pour le facteur X_{r-1} .
- ▶ parmi les n préimages d'un élément, $n - a_r$ ont un facteur X_{r-1} dans leur poids $\prod X_j$, les autres non.

Comment définir l'application Ψ ?

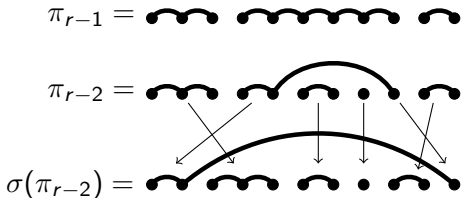
Soit (π_0, \dots, π_r) une chaîne de partitions pour \underline{a} .

L'idée est de regarder la chaîne de partitions $(\pi_0, \dots, \pi_{r-2}, \pi_r)$, qui a exactement les bons nombres de blocs.

En général, on peut prendre

$\Psi(\pi_0, \dots, \pi_r) = (\sigma(\pi_0), \dots, \sigma(\pi_{r-2}), \sigma(\pi_r))$ pour une permutation σ qui réarrange les blocs de π_{r-2} (i.e. elle est croissante sur chaque bloc de σ_{r-2} , ainsi elle préserve la structure sur les raffinements et donc le poids en X_i pour $i < r - 1$).

Il y a de nombreux cas à regarder... Par exemple:



Ou alors:

$$\pi_{r-1} = \text{diagram with 8 dots and arcs: a large arc from dot 1 to dot 7, and a smaller arc from dot 2 to dot 3. Dots 4, 5, 6, 7 are isolated. A vertical line is at dot 4.$$

$$\pi_{r-2} = \text{diagram with 8 dots and arcs: a large arc from dot 1 to dot 7, and two smaller arcs from dot 2 to dot 3 and dot 4 to dot 5. Dots 6, 7 are isolated. Dots 2, 3, 4, 5 are connected to dots 1, 2, 3, 4 respectively by vertical arrows. A vertical line is at dot 4.$$

$$\sigma(\pi_{r-2}) = \text{diagram with 8 dots and arcs: a large arc from dot 1 to dot 7, and a smaller arc from dot 2 to dot 3. Dots 4, 5, 6, 7 are isolated. Dots 2, 3, 4, 5 are connected to dots 1, 2, 3, 4 respectively by vertical arrows. A vertical line is at dot 4.$$

$$\pi_{r-1} = \text{diagram with 8 dots and arcs: a large arc from dot 1 to dot 7, and a smaller arc from dot 2 to dot 3. Dots 4, 5, 6, 7 are isolated. A vertical line is at dot 4.$$

$$\pi_{r-2} = \text{diagram with 8 dots and arcs: a large arc from dot 1 to dot 7, and two smaller arcs from dot 2 to dot 3 and dot 4 to dot 5. Dots 6, 7 are isolated. Dots 2, 3, 4, 5 are connected to dots 1, 2, 3, 4 respectively by vertical arrows. A vertical line is at dot 4.$$

$$\sigma(\pi_{r-2}) = \text{diagram with 8 dots and arcs: a large arc from dot 1 to dot 7, and a smaller arc from dot 2 to dot 3. Dots 4, 5, 6, 7 are isolated. Dots 2, 3, 4, 5 are connected to dots 1, 2, 3, 4 respectively by vertical arrows. A vertical line is at dot 4.$$

etc. (une dizaine de cas en tout).

Et ensuite ?

- ▶ Il n'y a pas de version multivariée dans les groupes de Coxeter en général, mais cela semble être toujours le cas dans les permutations signées (travail en cours...)
- ▶ Au lieu des factorisations minimales en cycles, on peut regarder les chaînes de partitions non-croisées à rangs fixés, dont l'énumération est un produit de coefficients binomiaux. On conjecture un raffinement à $2r$ paramètres dont une spécialisation donne l'énumération des factorisations minimales (travail en commun avec Jang Soo Kim).

Merci de votre attention