Crible cyclique pour des partitions non-croisées généralisées associées aux groupes de réflexion complexes

Christian Krattenthaler
Résumé par Philippe Biane

Séminaire de Combinatoire Philippe Flajolet
Institut Henri Poincaré, Séance du 24 mai 2012

Résumé

Le crible cyclique est un phénomène énumeratif énoncé par Reiner, Stanton et White. Bessis et Reiner ont proposé deux conjectures sur des phénomènes de crible cyclique pour les partitions non-croisées généralisées associées aux groupes de réflexion complexes de Armstrong et Bessis. Je commencerai en expliquant ce qu'est le crible cyclique et les partitions non-croisées généralisées, et ensuite j'exposerai les idées principales d'une démonstration de ces deux conjectures. Ce travail a été effectué en partie avec Thomas Müller.

1 Le crible cyclique

1.1 Définition

On a une notion de crible cyclique lorsqu'un ensemble combinatoire M, sur lequel agit un groupe cyclique G d'ordre n, engendré par g, est tel qu'il existe un polynôme P vérifiant

$$Fix_M(g^p) = P(e^{2i\pi p/n}).$$

Ici $Fix_M(h)$ désigne le nombre de points fixes de $h \in G$ agissant sur M. De façon équivalente, on a

$$P(q) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j q^j \mod q^n - 1$$

où a_j est le nombre d'orbites dont l'ordre du stabilisateur divise j.

1.2 Historique

Le premier exemple remonte à Stembridge (dans le cas $q = -1$) et concerne les partitions planes. Le concept général est apparu dans un article de Reiner, Stanton et White [2] en 2004.

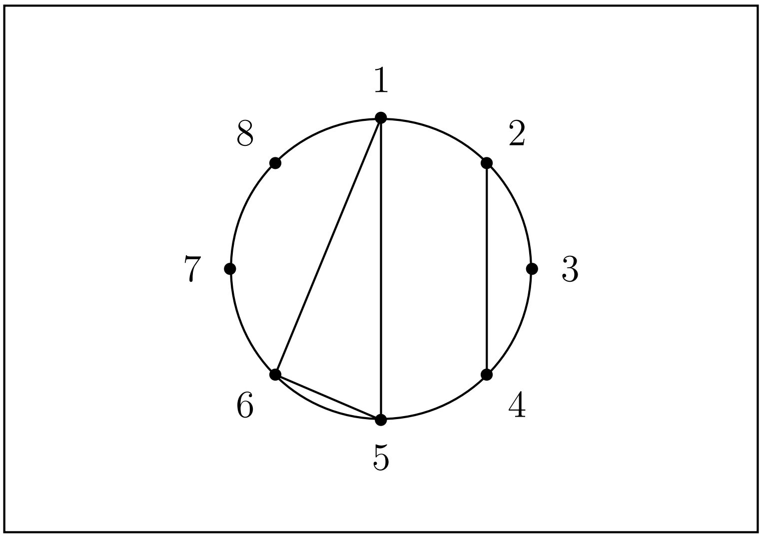
2 Partitions non-croisées et crible cyclique

2.1 Partitions non-croisées

Une partition de $\{1, \ldots, n\}$ est dite non-croisée si chaque fois que $i < j < k < l$ et i, k sont dans la même part et j, l dans la même part, alors cette part contient i, j, k, l.

Si on place les points $\{1, \ldots, n\}$ autour d'un cercle et que l'on trace les polygones correspondant aux parts de la partition, alors la partition est non-croisée si les polygones ne se croisent pas.

Exemple :



La partition $\{1, 5, 6\} \cup \{2, 4\} \cup \{3\} \cup \{7\} \cup \{8\}$.

Les partitions non-croisées $NC(n)$ forment un treillis autodual. Elles sont comptées par les nombres de Catalan.

2.2 Partitions non-croisées m-divisibles

Une partition non-croisée est dite m-divisible si toutes ses parts ont un cardinal divisible par m. Les partitions non-croisées m-divisibles de nm forment un sous-treillis de $NC(nm)$, compté par des nombres de Catalan généralisés $\frac{1}{n}\binom{n(m+1)}{n-1}$. Le groupe cyclique des rotations d'angle multiple de $2\pi/mn$ agit sur cet ensemble, et le phénomène de crible cyclique est vérifié pour cette action avec

$$P(q) = \frac{1}{[n]_q} \begin{bmatrix} n(m+1) \\ n-1 \end{bmatrix}_q .$$

On peut montrer aussi que les partitions non-croisées dont toutes les parts sont de taille *égale* à m sont comptées par $\frac{1}{n}\binom{nm}{n-1}$, et on a encore le phénomène du crible cyclique pour les rotations avec

$$P(q) = \frac{1}{[n]_q} \begin{bmatrix} nm \\ n-1 \end{bmatrix}_q .$$

3 Partitions non-croisées associées aux groupes de réflexion complexes

3.1 Ordre absolu sur le groupe symétrique

On définit la longueur $l(\sigma)$ d'une permutation σ comme le plus petit k tel que $\sigma = t_1 \dots t_k$ pour des transpositions $t_1, \dots, t_k$. En fait $l(\sigma) = n - c(\sigma)$ où $c(\sigma)$ est le nombre de cycles de σ. Il existe une relation d'ordre sur le groupe symétrique qui vérifie $\sigma \leq_T \pi$ si $l(\sigma) + l(\sigma^{-1}\pi) = l(\pi)$. On peut montrer que les permutations $\sigma \leq_T c_n$ où c_n est le cycle $(123 \dots n)$ sont en bijection avec $NC(n)$ (il suffit pour cela de considérer la partition donnée par les cycles de σ).

3.2 Groupes de réflexion complexes

Une réflexion complexe est une transformation linéaire de $\mathbf{C}^d$ qui laisse fixe un hyperplan et qui est d'ordre fini. Un groupe de réflexion complexe est un groupe (supposé fini dans cet exposé) engendré par des réflexions complexes. Ces groupes ont été classifiés par Shephard et Todd [3] : un tel groupe est produit de sous-groupes irréductibles, et pour ces groupes irréductibles il existe une famille infinie à trois paramètres entiers $G(d, e, n)$ (avec $e|d$) et des groupes exceptionnels $G_4, G_5, \dots, G_{37}$.

Ainsi, $G(d, e, n)$ est formé des matrices qui sont le produit d'une matrice de permutation par une matrice diagonale D satifaisant $D^d = I$ et $\det(D)^{d/e} = 1$. En particulier on a $G(1, 1, n) = S_n$, $G(2, 1, n) = B_n$, et $G(2, 2, n) = D_n$.

3.3 Groupes bien engendrés

Un groupe de réflexion complexe de rang n est dit *bien engendré* s'il est engendré par n réflexions. Les groupes irréductibles ont été classifiés par Shephard et Todd, ce sont ceux des séries $G(d, 1, n)$ et $G(e, e, n)$, ainsi que certain des groupes exceptionnels.

On définit l'ordre $\leq_T$ pour ces groupes de la même façon que pour le groupe symétrique, en utilisant les réflexions au lieu des transpositions. Dans la suite on considère des groupes bien engendrés.

3.4 Partitions non-croisées associées aux groupes de réflexion complexes

Les exposants $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ d'un groupe de réflexion complexe bien engendré sont les degrés des générateurs des invariants polynomiaux de G. Par exemple pour S_n, qui est de rang $n - 1$, agissant sur l'hyperplan $\sum_i x_i = 0$ de $\mathbf{C}^n$, ces degrés sont $2, 3, \dots, n$ (penser aux fonctions symétriques élémentaires). On appelle $h = d_n$ le plus grand de ces degrés, que l'on nomme nombre de Coxeter.

Un élément régulier dans G est un élément qui a une valeur propre ζ dont l'espace propre n'est contenu dans aucun hyperplan de réflexion. Un élément de Coxeter est un élément régulier dont la valeur propre ζ correspondante est une racine primitive h^e de l'unité. Si c est un élément de Coxeter, alors les partitions non-croisées associées à G et c sont les $w \in G$ tels que $w \leq_T c$. On montre que les partitions non-croisées forment un treillis autodual, gradué, qui est compté par des nombres de Catalan généralisés $\prod_i \frac{h+d_i}{d_i}$.

3.5 Partitions non-croisées m-divisibles

Cette notion est dûe à Armstrong [1]. Soit c un élément de Coxeter, une partition non-croisée m-divisible est une suite $(w_0, w_1, \dots, w_m)$ d'éléments de G telle que $w_0 \dots w_m = c$ et $l(w_0) + \dots l(w_m) = l(c)$. Il existe une relation d'ordre sur les partitions non-croisées m-divisibles : $(v_0, v_1, \dots, v_m) \leq (w_0, w_1, \dots, w_m)$ si $v_i \leq w_i, i = 1, \dots, m$ et c'est un semi-treillis, gradué par le rang.

Dans le cas de S_n on retrouve la notion usuelle : si $c = (12 \dots n) = w_0 \dots w_m$ alors on remplace $w_1, \dots w_m$ par leur "gonflement" $\hat{w}_k$ en remplaçant i dans w_k par $(m-1)i + k$. Alors la permutation $z = (12 \dots nm)\hat{w}_1^{-1} \dots w_m^{-1}$ est une partition non-croisée m-divisible.

Dans le cas général, le nombre de telles partitions est

$$\prod_i \frac{mh + d_i}{d_i}$$

(d'après Athanasiadis, Bessis, Corran, Chapoton, Edelman, Reiner).

L'action

$$(w_0, \dots, w_m) \to (cw_m c^{-1} w_0 c w_m^{-1} c, cw_m c^{-1}, w_1, \dots, w_{m-1})$$

engendre un groupe cyclique d'ordre mh.

Dans le cas du type A (le groupe S_n) c'est simplement l'action des rotations d'angle multiple de $2\pi/mn$.

Théorème (*C. Krattenthaler, T. Müller* : Le crible cyclique pour les partitions non-croisées m-divisibles). Avec l'action définie ci-dessus, les partitions non-croisées m-divisibles vérifient le crible cyclique pour le polynôme

$$\prod_i \frac{[mh + d_i]_q}{[d_i]_q}.$$

3.6 Une autre action

L'action

$$(w_0, \dots, w_m) \to (cw_m c^{-1}, w_0, w_1, \dots, w_{m-1})$$

engendre un groupe cyclique d'ordre $(m+1)h$. Dans le cas des types A, B, ou D, si on fait le plongement $(w_0, \dots, w_m) \to (id, w_0, \dots, w_m)$ on obtient les partitions dont toutes les parts sont de taille $m+1$.

De nouveau on a

Théorème (*C. Krattenthaler, T. Müller*). Avec l'action définie ci-dessus, le crible cyclique est vérifié pour le polynôme

$$\prod_i \frac{[mh + d_i]_q}{[d_i]_q}.$$

Ces résultats avaient été conjecturé par Armstrong et Bessis.

La preuve est différente suivant les cas $G(d, 1, n)$, $G(e, e, n)$ (où on utilise des partitions m-divisibles sur une couronne), où les cas exceptionnels qui nécessitent des vérifications sur ordinateur :n même si le problème dans le cas des groupes exceptionnels n'est pas fini (à cause du paramètre n), on peut se ramener à des vérifications sur un nombre fini de cas.

Références

[1] D. Armstrong, Generalized non-crossing partitions and combinatorics of Coxeter groups, Mem. Amer.Math. Soc., Vol. 202 no. 949, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2009.

[2] V. Reiner, D. Stanton and D. White, The cyclic sieving phenomenon J. Combin. Theory Ser. A 108 (2004) 17–50.

[3] G. C. Shephard and J. A. Todd, Finite unitary reflection groups Canad. J. Math. 6 (1954), 274–304.