

Éléments pleinement commutatifs dans les groupes de Coxeter

PHILIPPE NADEAU

Résumé par THIBAUT MANNEVILLE

*Séminaire de Combinatoire Philippe Flajolet
Institut Henri Poincaré, Séance du 3 octobre 2013*

Résumé

Dans un groupe de Coxeter, les éléments ont une représentation par certains ensembles de mots liés entre eux par des relations. Un élément w est dit pleinement commutatif (PC) si, étant donné deux mots de longueur minimale représentant w , il existe toujours une série de commutations de lettres adjacentes pour passer de l'un à l'autre. Ces éléments sont importants car ils indiquent une base des algèbres de Temperley-Lieb généralisées ; ils interviennent également en connexion avec les représentations d'algèbres de Hecke. Dans cet exposé, nous nous intéresserons à la combinatoire des éléments PC. Nous les caractériserons précisément pour chaque groupe de Coxeter fini ou affine. Dans ce dernier cas, la suite énumérant les éléments PC selon leur longueur s'avère être ultimement périodique ; on donnera la taille de la pré-période et la période minimale de cette suite, et on expliquera comment calculer sa série génératrice. Dans le cas d'un groupe de Coxeter général, on montrera que cette série est toujours rationnelle, via l'utilisation d'automates finis.

Le travail présenté ici est basé en partie sur des travaux communs avec Riccardo Biagioli et Frédéric Jouhet.

1 Introduction

Un *groupe de Coxeter* est un groupe W donné par un ensemble fini de générateurs S et ensemble de relations sur ces générateurs codé par une matrice symétrique $M = (m_{s,t})_{s,t \in S}$ vérifiant :

- (i) Pour tout $s \in S, m_{s,s} = 1$;
- (ii) Pour tout couple $(s, t) \in S^2$ avec $s \neq t, m_{s,t} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \setminus \{0, 1\}$ ¹.

Les relations entre les générateurs qui définissent le groupe sont alors données par :

Pour tout couple $(s, t) \in S^2, (st)^{m_{s,t}} = 1$, qui se réécrit $\underbrace{sts\dots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst\dots}_{m_{s,t}}$, ce que l'on appelle

une *relation de tresse*. En particulier, on voit que $m_{s,t} = 2$ si et seulement si s et t commutent. On représente alors W par son *graphe de Coxeter* ayant pour sommets les générateurs, et tel que deux générateurs s et t sont reliés par une arête si ils ne commutent pas, et si $m_{s,t} \geq 4$, l'arête qui relie s et t est étiquetée par $m_{s,t}$ (voir l'exemple de la figure 1). Dans la classification des groupes de Coxeter, on rencontre notamment les groupes de réflexions finis et les groupes affines.

On voit les éléments du groupe W comme des classes d'équivalences de mots sur l'alphabet S modulo les relations. Un élément g de W a des représentants, certains ayant une longueur

1. $m_{s,t} = \infty$ signifie que s et t ne sont liés par aucune relation particulière.

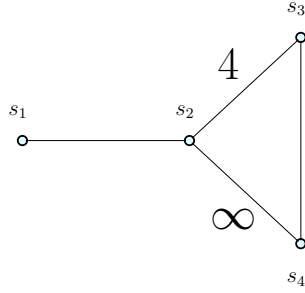


FIGURE 1 – Le graphe de Coxeter associé à un groupe de Coxeter donné par l'ensemble de générateurs $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ et vérifiant $m_{s_1, s_2} = 3, m_{s_1, s_3} = 2, m_{s_1, s_4} = 2, m_{s_2, s_3} = 4, m_{s_2, s_4} = \infty$ et $m_{s_3, s_4} = 3$.

minimale l , qui est alors appelée la *longueur* de g . Si un élément g est représenté par un mot $w = s_1 \dots s_l$ avec l minimal, on dit que w est une *décomposition réduite* de g , et on note $Red(g)$ l'ensemble des décompositions réduites de g .

Étant donné un groupe de Coxeter W , on énumère ses éléments selon leur longueur en définissant la série $W(q) = \sum_{w \in W} q^{l(w)}$. On pose également $Red_W(q) = \sum_{w \in W} |Red(w)| q^{l(w)}$. On sait alors que ces deux séries sont rationnelles ([2]).

2 Résultats généraux sur les éléments pleinement commutatifs

On se fixe un groupe de Coxeter W .

Définition 1. Un élément w de W est dit *pleinement commutatif* si l'ensemble de ses décompositions réduites forme une unique classe de commutation.

En d'autres termes, un élément w est pleinement commutatif si l'on peut passer d'une décomposition réduite à une autre en n'utilisant que des relations de commutations. Un premier résultat est que les séries obtenues en énumérant les éléments pleinement commutatifs (notés PC) selon leur longueur est toujours rationnelle.

Théorème 2 ([3]). *Les séries $W^{PC}(q)$ et $Red_W^{PC}(q)$ sont des fractions rationnelles.*

Donnons une idée des grandes lignes de la preuve de ce théorème, on utilise le résultat suivant :

Proposition 3 ([4]). *Une classe de commutation représente un élément pleinement commutatif si et seulement si aucun de ses mots ne contient d'expression intervenant dans une relation de tresse.*

L'idée est de représenter les éléments du groupe sous forme de Γ -empilements, où Γ est le graphe de Coxeter de W . Un Γ -empilement est un poset muni d'une projection dans Γ telle que les pré-images des arêtes de Γ sont des chaînes ; on requiert enfin que le poset soit la clôture transitive des relations données par ces chaînes. Pour représenter un Γ -empilement, on dessine les éléments ayant même projection dans Γ sur une même ligne verticale et on leur donne comme étiquette leur projection (voir figure 2).

Un résultat dû à Viennot est que les Γ -empilements sont en bijection avec les classes de mots à commutation près. De plus, à l'aide de sa proposition 3, Stembridge a montré que les classes de

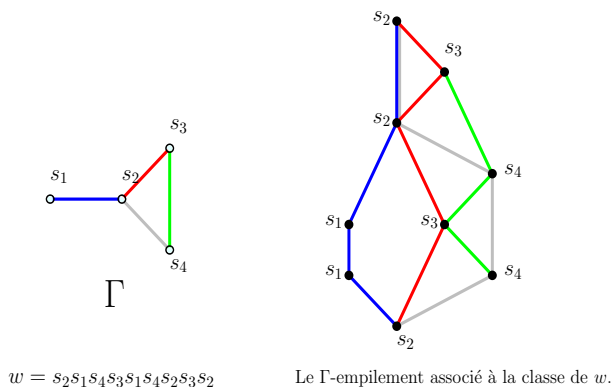


FIGURE 2 – Un graphe de Coxeter Γ et le Γ -empilement associé à la classe de commutation d'un mot w sur les sommets de Γ .

commutation qui correspondent à des éléments pleinement commutatifs sont celles représentées par un Γ -empilement ne contenant pas certains motifs traduisant les relations de tresse. Plus précisément, deux éléments ayant même projection dans Γ ne doivent pas être en relation de couverture ; et l'empilement ne doit pas contenir de chaîne convexe $\underbrace{s \prec t \prec \dots \prec t}_{m_{s,t}}$, où \prec est la relation de couverture.

Étant donné un mot, on peut alors créer algorithmiquement l'empilement correspondant à sa classe en ne stockant "qu'une information finie". L'idée est qu'il suffit de regarder si l'on crée l'un des motifs interdits au cours du processus. Ainsi, on a un automate fini qui reconnaît le langage des mots qui sont des décompositions réduites d'éléments pleinement commutatifs, ce qui implique que la série $Red_W^{PC}(q)$ est rationnelle. Pour montrer que la série $W^{PC}(q)$ l'est également, on choisit un ordre sur les lettres et pour chaque élément de W , vu comme une classe d'équivalence de mots, on choisit le minimum pour l'ordre lexicographique dans cette classe. Cette propriété se reconnaît également par un automate fini. La série $W^{PC}(q)$ énumère donc les objets d'une intersection de deux langages rationnels, et est donc rationnelle à son tour.

Nous donnons maintenant un autre résultat dans le même esprit que le théorème 2. On dit que W est *PC-finie* s'il contient un nombre fini d'éléments pleinement commutatifs :

Théorème 4 ([3]). *La suite $(W_l^{PC})_{l \geq 0}$ des coefficients de la série W^{PC} est ultimement périodique si et seulement si W est affine, ou est PC-finie, ou a pour graphe de Coxeter le graphe*

$\circ \text{---} \overset{7}{\circ} \text{---} \circ$ ou le graphe $\circ \text{---} \overset{4}{\circ} \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ$.

3 Une idée de preuve pour l'ultime périodicité en type A affine

Les groupes de Coxeter dits affines de type A sont les groupes de Coxeter, notés \tilde{A}_n ($n \in \mathbb{N}$), ayant un graphe de la forme donnée dans la figure 3.

En regardant attentivement les relations de tresses induites par ce graphe, on voit que les \tilde{A}_n -empilements correspondant à des éléments pleinement commutatifs sont ceux pour lesquels le poset induit sur les éléments étiquetés s_i et s_{i+1} est une chaîne à étiquettes alternantes (voir l'exemple en figure 4).

À partir de cela, on peut trouver une bijection entre ces \tilde{A}_n -empilements et un certain ensemble de chemins de sorte que la taille de l'empilement soit égale à l'aire sous le chemin correspondant. Plus précisément, les chemins correspondants sont les chemins positifs ayant

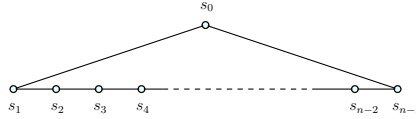


FIGURE 3 – Le graphe de Coxeter du groupe de Coxeter \tilde{A}_{n-1} .

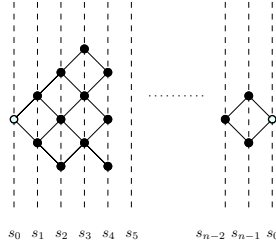


FIGURE 4 – Un \tilde{A}_{n-1} -empilement correspondant à un élément pleinement commutatif.

même hauteur de départ et d'arrivée, avec n pas, chacun dans $^2 \{(1, 1); (1, -1); (1, 0)_L; (1, 0)_R\}$, et non constants (voir figure 5).

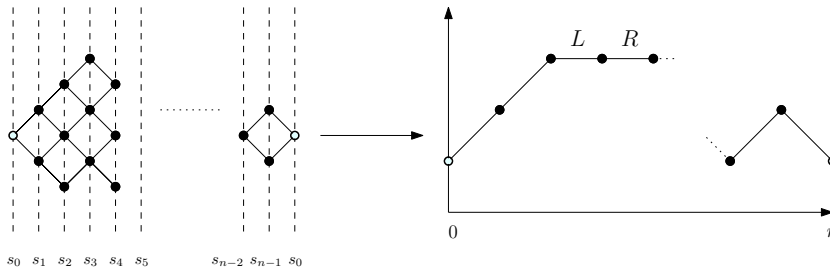


FIGURE 5 – La bijection entre les \tilde{A}_{n-1} -empilements correspondant à un élément pleinement commutatif et les chemins.

Ces chemins sont strictement positifs quand on impose une aire suffisamment grande, et les shiffter de 1 vers les haut ou le bas donne une bijection entre les chemins d'aire \mathcal{A} donnée et ceux d'aire $\mathcal{A} + n$. Ainsi la suite $\left((\tilde{A}_n)_l^{PC} \right)_{l \geq 0}$ est ultimement périodique et sa période minimale vaut au plus n .

Références

- [1] R.Biagioli, F.Jouhet and P.Nadeau : Fully commutative elements and lattice walks, *DMTCS proc.*, AS 177–188, 2013.
- [2] A.Björner and F.Brenti : *Combinatorics of Coxeter Groups*, Springer, Graduate texts in Mathematics, vol. 231, 2005.
- [3] P.Nadeau, On the length of fully commutative elements in Coxeter Groups, *preprint*.
- [4] J.R.Stembridge : Some combinatorial aspects of reduced words in finite Coxeter groups, *J. Algebraic Combin.*, 5(4), 353–385,1996.

2. Les pas horizontaux sont étiquetés L ou R .