

Cyril Nicaud : Combinatoire des automates (le 7 avril 2011)

résumé par A. Genitrini

Cyril Nicaud nous a présenté à travers son exposé, trois méthodes afin de générer uniformément une classe d'automates, ainsi que la combinatoire sous-jacente nous permettant d'énumérer cette classe. La plupart de ces méthodes sont détaillées dans son habilitation [4].

1 Introduction

Tout au long de l'exposé, nous nous sommes intéressés aux automates déterministes et complets. Un automate sur l'alphabet \mathcal{A} déterministe et complet est la donnée d'un quadruplet (Q, δ, q_0, F) où Q est l'ensemble des états, q_0 est l'unique état initial, δ est une application de $Q \times \mathcal{A}$ dans Q et F est l'ensemble des états terminaux.

Par la suite, nous noterons k la taille de l'alphabet et n le nombre d'états. Les états seront numérotés de 1 à n et l'état initial est le numéroté par 1.

Nos automates ne contiendront pas d'états finaux. Nous devrions les appeler semi-automates mais puisque nous ne considérerons que de tels automates par la suite, par abus nous les appellerons automates. Nous pouvons par la suite choisir parmi les états ceux qui sont finaux, suivant une distribution quelconque. Enfin, nous raisonnerons sur des automates accessibles, i.e. il existe une suite de transitions permettant de passer de l'état initial à n'importe quel autre état.

L'un de nos buts est la génération aléatoire d'éléments de cette classe, suivant la loi uniforme sur l'ensemble des automates de même taille (i.e. contenant le même nombre d'états). A travers cette étude concernant la génération, nous nous intéresserons également à l'énumération asymptotique de ces objets combinatoires.

2 Génération de tableaux

En 2000, C. Nicaud a démontré que les automates déterministes, complets, accessibles et sans états terminaux sont en bijection avec avec une classe de tableaux marqués : les k -tableaux étendus et réalisables de taille n . Il s'agit d'un couple de $(kn + 1)$ -uplets d'entiers (X, Y) avec $X = (x_0, \dots, x_{kn})$ et $Y = (y_0, y_{kn})$ et vérifiant :

- $1 \leq y_i \leq x_i \leq n$ pour tout $i \in \{0, \dots, kn\}$,
- $x_{i+1} - x_i \in \{0, 1\}$ pour tout $i \in \{0, \dots, kn - 1\}$,
- si $x_{i+1} - x_i = 1$ alors $y_{i+1} = x_{i+1}$ pour tout $i \in \{0, \dots, kn - 1\}$,
- $x_i \geq (i + 1)/k$ pour tout $i \in \{0, \dots, kn - 1\}$.

Nous présentons un exemple d'automate et de son tableau associé sur la Figure 1. On

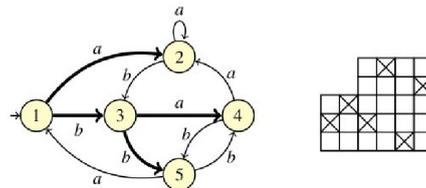


FIGURE 1 – Un automate et son tableau étendu associé

peut décomposer de manière récursive les tableaux réalisables, ce qui nous permet d'envisager une génération aléatoire par méthode récursive des automates déterministes et complets. Après un temps de pré-calcul en $\Theta(n^2)$, C. Nicaud a démontré que nous générons un automate en temps linéaire. Toutefois, cette génération nécessite l'usage d'entiers très grands ou alors, si nous avons recours au flottants, la génération n'est plus uniforme et cette perte est difficilement quantifiable.

3 Génération de partitions

Nous souhaitons établir une nouvelle bijection des automates vers d'autres objets qui sont des partitions de l'ensemble des couples (état de départ, transition) selon l'état d'arrivée. A tout automate correspond une partition. Par ailleurs les partitions associées à un automate déterministe, complet et accessible sont aisément repérables.

Un exemple d'automate et sa partition associée sont représentés sur la Figure 2. Nous di-

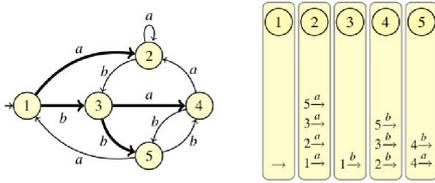


FIGURE 2 – Un automate et sa partition associée

rons qu'une partition est admissible, s'il s'agit d'une partition de $(kn + 1)$ éléments en n parts. Afin de générer ce type d'objets, C. Nicaud s'est référé à l'article de Duchon *et al* [2] sur la génération de Boltzmann. C. Nicaud a prouvé que de nombreuses partitions sont admissibles. Expérimentalement, sur des partitions en 200 parts, environ 80% d'entre elles sont associées à un automate déterministe, complet et accessible. Par ailleurs, la méthode de Boltzmann nous donne une complexité de génération approchée en $\Theta(n^{3/2})$.

4 Génération d'applications

Voilà une autre méthode, relativement "naïve", permettant de générer uniformément des automates : pour chaque lettre de l'alphabet, il suffit de générer uniformément une application de l'ensemble des états dans lui-même. Seulement nous nous remarquons que la plupart des automates générés ne sont pas accessibles. Ainsi, en générant des automates de taille 1000, C. Nicaud a observé seulement 0.5% d'automates accessibles. De plus, cette proportion semble décroître lorsque la taille souhaitée augmente. En appliquant un résultat de Flajolet et Odlyzko [3], C. Nicaud a prouvé qu'asymptotiquement, la proportion des automates accessibles était exponentiellement petite. Par conséquent, Cette méthode de génération,

avec rejet des automates non accessibles n'est pas efficace.

Toutefois, en écartant les états non accessibles depuis l'état initial, on obtient un automate nous intéressant. Le point délicat est le suivant : C. Nicaud a prouvé que la distribution des automates accessibles, issus d'un automate non accessible par cette méthode d'élagage est bien uniforme suivant la taille de l'objet obtenu. En outre, il existe une constante calculable α , dépendant de la taille de l'alphabet, et telle que la distribution de la taille des automates accessibles, issus d'automates de taille n est concentrée autour de αn . Enfin, C. Nicaud et A. Carayol viennent de prouver que cette méthode de génération a une complexité moyenne en $\Theta(n^{3/2})$ pour une taille exacte et $\Theta(n)$ en taille approchée.

En conclusion, C. Nicaud nous a présenté trois méthodes afin de générer des automates déterministes, complets et accessibles basées sur des bijections avec des tableaux, des permutations et des applications. A travers l'étude de ces générations, F. Bassino et C. Nicaud [1] ont pu expliciter l'asymptotique du nombre de tels automates : $\Theta\left(\left\{\begin{matrix} kn + 1 \\ n \end{matrix}\right\}\right)$, où $\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\}$ est un nombre de Stirling de deuxième espèce énumérant les partitions.

Références

- [1] F. Bassino and C. Nicaud. Enumeration and random generation of accessible automata. *Theor. Comput. Sci.*, 381(1-3) :86–104, 2007.
- [2] P. Duchon, P. Flajolet, G. Louchard, and G. Schaeffer. Boltzmann samplers for the random generation of combinatorial structures. *Combinatorics, Probability & Computing*, 13(4-5) :577–625, 2004.
- [3] Philippe Flajolet and Andrew M. Odlyzko. Random mapping statistics. In *In Advances in Cryptology*, pages 329–354. Springer Verlag, 1990.
- [4] C. Nicaud. Analyse d'algorithmes et génération aléatoire en théorie des langages. Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, 2011.