

Démonstration bijective d'une formule d'Hurwitz

Dominique Poulalhon

LIX, CNRS et École polytechnique
ERC Research Starting Grant "Explore Maps"

travail commun avec Enrica Duchi (LIAFA) et Gilles Schaeffer (LIX)

IHP, Séminaire de combinatoire Philippe Flajolet
27 janvier 2012

ÉNONCÉ DU THÉORÈME

Théorème (Hurwitz, 1891)

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ de type cyclique $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$.

Le nombre de factorisations transitives minimales de σ en produit de transpositions est :

$$n^{\ell-3} \cdot (n + \ell - 2)! \cdot \prod_{i=1}^{\ell} \frac{\lambda_i^{\lambda_i}}{(\lambda_i - 1)!}$$

ÉNONCÉ DU THÉORÈME

Théorème (Hurwitz, 1891)

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ de type cyclique $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$.

Le nombre de factorisations transitives minimales de σ en produit de transpositions est :

$$n^{\ell-3} \cdot (n + \ell - 2)! \cdot \prod_{i=1}^{\ell} \frac{\lambda_i^{\lambda_i}}{(\lambda_i - 1)!}$$

Historique des démonstrations

- [Hurwitz, 1891], reconstituée par [Strehl, 1996]
- [Goulden, Jackson, 1992]
- [Bousquet-Mélou, Schaeffer, 2000]
- [Lando, Zvonkine, 2000]
- [Borot, Eynard, 2010]

ÉNONCÉ DU THÉORÈME

Théorème (Hurwitz, 1891)

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ de type cyclique $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$.

Le nombre de factorisations transitives minimales de σ en produit de transpositions est :

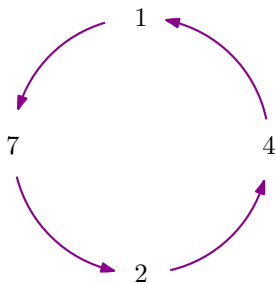
$$n^{\ell-3} \cdot (n + \ell - 2)! \cdot \prod_{i=1}^{\ell} \frac{\lambda_i^{\lambda_i}}{(\lambda_i - 1)!}$$

Historique des démonstrations

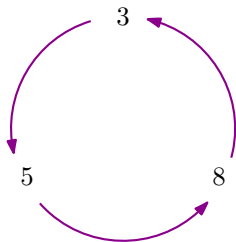
- [Hurwitz, 1891], reconstituée par [Strehl, 1996]
- [Goulden, Jackson, 1992]
- [Bousquet-Mélou, Schaeffer, 2000]
- [Lando, Zvonkine, 2000]
- [Borot, Eynard, 2010]

PERMUTATIONS, TYPE CYCLIQUE, FACTORISATION EN TRANSPOSITIONS

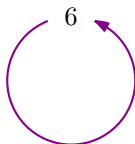
un élément σ de \mathfrak{S}_8 de type cyclique $\lambda(\sigma) = (4, 3, 1)$:



$(1, 7, 2, 4)$



$(3, 5, 8)$

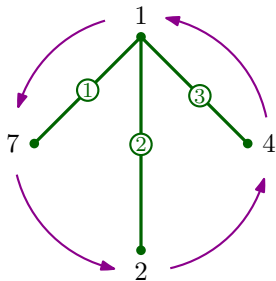


(6)

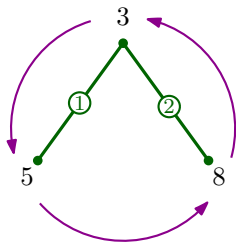
type cyclique : partition décrivant les longueurs des orbites

PERMUTATIONS, TYPE CYCLIQUE, FACTORISATION EN TRANSPOSITIONS

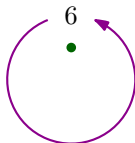
un élément σ de \mathfrak{S}_8 de type cyclique $\lambda(\sigma) = (4, 3, 1)$:



$$(1, 4)(1, 2)(1, 7)$$

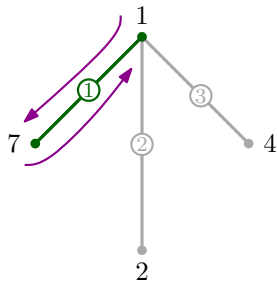


$$(3, 8)(3, 5)$$

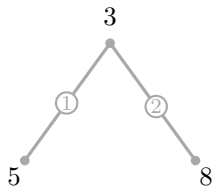


PERMUTATIONS, TYPE CYCLIQUE, FACTORISATION EN TRANSPOSITIONS

un élément σ de \mathfrak{S}_8 de type cyclique $\lambda(\sigma) = (4, 3, 1)$:



$$(1, 4)(1, 2)(1, 7)$$

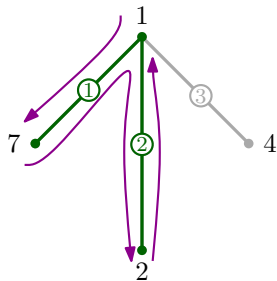


$$(3, 8)(3, 5)$$

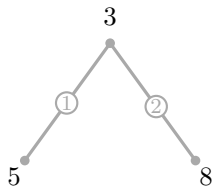
6
•

PERMUTATIONS, TYPE CYCLIQUE, FACTORISATION EN TRANSPOSITIONS

un élément σ de \mathfrak{S}_8 de type cyclique $\lambda(\sigma) = (4, 3, 1)$:



$$(1, 4)(1, 2)(1, 7)$$



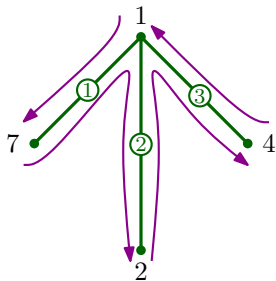
$$(3, 8)(3, 5)$$

6

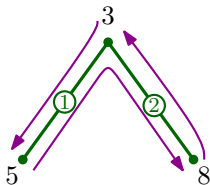
•

PERMUTATIONS, TYPE CYCLIQUE, FACTORISATION EN TRANSPOSITIONS

un élément σ de \mathfrak{S}_8 de type cyclique $\lambda(\sigma) = (4, 3, 1)$:



$$(1, 4)(1, 2)(1, 7)$$



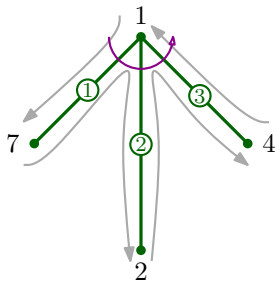
$$(3, 8)(3, 5)$$

6
•

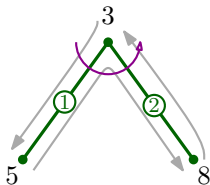
$$\sigma = (1, 4)(1, 2)(3, 8)(1, 7)(3, 5) = (1, 4)(3, 8)(3, 5)(1, 2)(1, 7)$$

PERMUTATIONS, TYPE CYCLIQUE, FACTORISATION EN TRANSPOSITIONS

un élément σ de \mathfrak{S}_8 de type cyclique $\lambda(\sigma) = (4, 3, 1)$:



$$(1, 4)(1, 2)(1, 7)$$



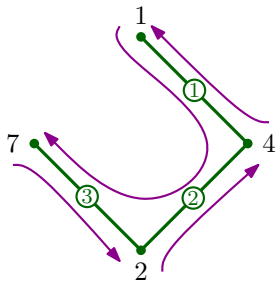
$$(3, 8)(3, 5)$$

6
•

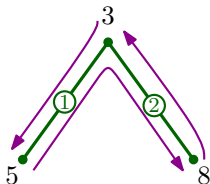
$$\sigma = (1, 4)(1, 2)(3, 8)(1, 7)(3, 5) = (1, 4)(3, 8)(3, 5)(1, 2)(1, 7)$$

PERMUTATIONS, TYPE CYCLIQUE, FACTORISATION EN TRANSPOSITIONS

un élément σ de \mathfrak{S}_8 de type cyclique $\lambda(\sigma) = (4, 3, 1)$:



$$(2, 7)(4, 2)(1, 4)$$



$$(3, 8)(3, 5)$$

6
•

$$\sigma = (2, 7)(3, 8)(4, 2)(1, 4)(3, 5) = (2, 7)(3, 8)(3, 5)(4, 2)(1, 4)$$

CAS PARTICULIER DES GRANDS CYCLES

Théorème (Dénes, 1959)

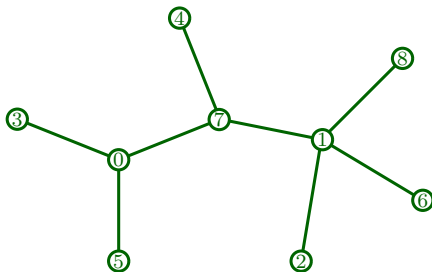
Le nombre de factorisations de $\sigma = (1, 2, 3, \dots, n)$ en $n - 1$ transpositions est n^{n-2} .

CAS PARTICULIER DES GRANDS CYCLES

Théorème (Dénes, 1959)

Le nombre de factorisations de $\sigma = (1, 2, 3, \dots, n)$ en $n - 1$ transpositions est n^{n-2} .

Démonstration bijection avec les arbres de Cayley
[Moszkowski, 1989]



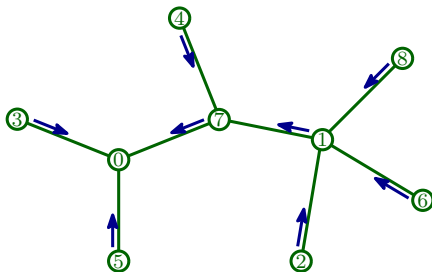
CAS PARTICULIER DES GRANDS CYCLES

Théorème (Dénes, 1959)

Le nombre de factorisations de $\sigma = (1, 2, 3, \dots, n)$ en $n - 1$ transpositions est n^{n-2} .

Démonstration bijection avec les arbres de Cayley

[Moszkowski, 1989]



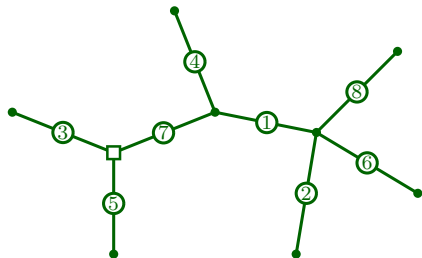
CAS PARTICULIER DES GRANDS CYCLES

Théorème (Dénes, 1959)

Le nombre de factorisations de $\sigma = (1, 2, 3, \dots, n)$ en $n - 1$ transpositions est n^{n-2} .

Démonstration bijection avec les arbres de Cayley

[Moszkowski, 1989]



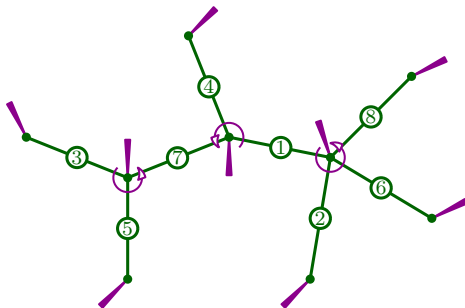
CAS PARTICULIER DES GRANDS CYCLES

Théorème (Dénes, 1959)

Le nombre de factorisations de $\sigma = (1, 2, 3, \dots, n)$ en $n - 1$ transpositions est n^{n-2} .

Démonstration bijection avec les arbres de Cayley

[Moszkowski, 1989]



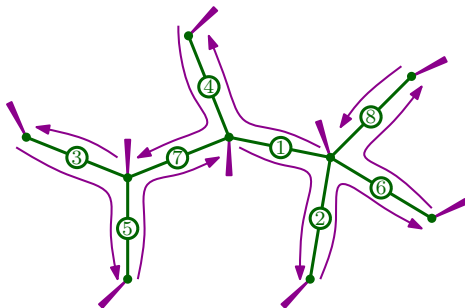
CAS PARTICULIER DES GRANDS CYCLES

Théorème (Dénes, 1959)

Le nombre de factorisations de $\sigma = (1, 2, 3, \dots, n)$ en $n - 1$ transpositions est n^{n-2} .

Démonstration bijection avec les arbres de Cayley

[Moszkowski, 1989]



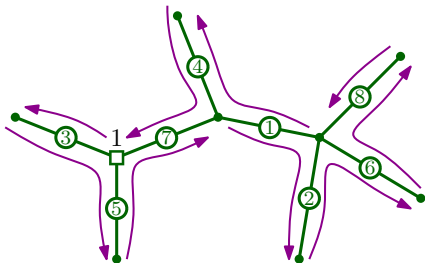
CAS PARTICULIER DES GRANDS CYCLES

Théorème (Dénes, 1959)

Le nombre de factorisations de $\sigma = (1, 2, 3, \dots, n)$ en $n - 1$ transpositions est n^{n-2} .

Démonstration bijection avec les arbres de Cayley

[Moszkowski, 1989]



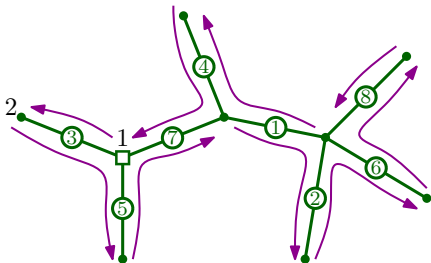
CAS PARTICULIER DES GRANDS CYCLES

Théorème (Dénes, 1959)

Le nombre de factorisations de $\sigma = (1, 2, 3, \dots, n)$ en $n - 1$ transpositions est n^{n-2} .

Démonstration bijection avec les arbres de Cayley

[Moszkowski, 1989]



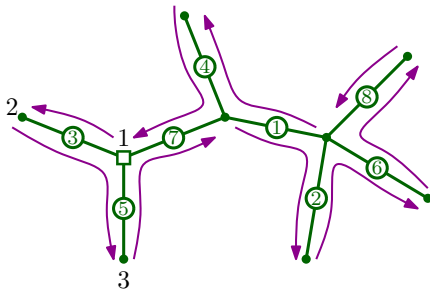
CAS PARTICULIER DES GRANDS CYCLES

Théorème (Dénes, 1959)

Le nombre de factorisations de $\sigma = (1, 2, 3, \dots, n)$ en $n - 1$ transpositions est n^{n-2} .

Démonstration bijection avec les arbres de Cayley

[Moszkowski, 1989]



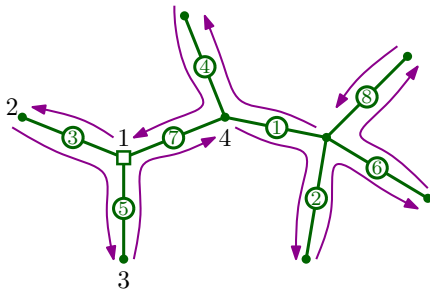
CAS PARTICULIER DES GRANDS CYCLES

Théorème (Dénes, 1959)

Le nombre de factorisations de $\sigma = (1, 2, 3, \dots, n)$ en $n - 1$ transpositions est n^{n-2} .

Démonstration bijection avec les arbres de Cayley

[Moszkowski, 1989]

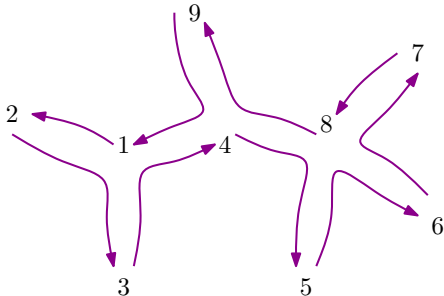


CAS PARTICULIER DES GRANDS CYCLES

Théorème (Dénes, 1959)

Le nombre de factorisations de $\sigma = (1, 2, 3, \dots, n)$ en $n - 1$ transpositions est n^{n-2} .

Démonstration bijection avec les arbres de Cayley
[Moszkowski, 1989]



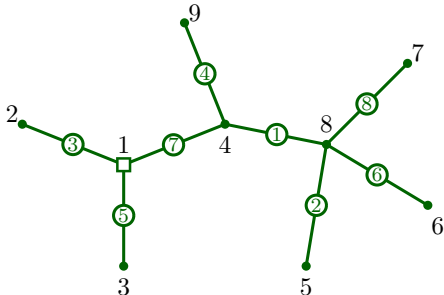
CAS PARTICULIER DES GRANDS CYCLES

Théorème (Dénes, 1959)

Le nombre de factorisations de $\sigma = (1, 2, 3, \dots, n)$ en $n - 1$ transpositions est n^{n-2} .

Démonstration bijection avec les arbres de Cayley

[Moszkowski, 1989]



$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) = (7, 8)(1, 4)(6, 8)(1, 3)(4, 9)(1, 2)(5, 8)(4, 8)$$

CAS PARTICULIER DES GRANDS CYCLES

Quelques remarques

- les arbres de Cayley sont en fait des arbres **plans**

CAS PARTICULIER DES GRANDS CYCLES

Quelques remarques

- les arbres de Cayley sont en fait des arbres **plans**
- bijection indépendante des éléments permutés, *i. e.* des étiquettes des sommets

CAS PARTICULIER DES GRANDS CYCLES

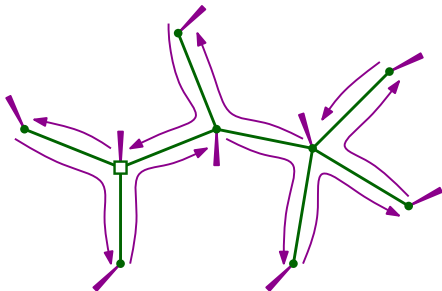
Quelques remarques

- les arbres de Cayley sont en fait des arbres **plans**
- bijection indépendante des éléments permutés, *i. e.* des étiquettes des sommets
- factorisations **inéquivalentes** : à commutation près

CAS PARTICULIER DES GRANDS CYCLES

Quelques remarques

- les arbres de Cayley sont en fait des arbres **plans**
- bijection indépendante des éléments permutés, *i.e.* des étiquettes des sommets
- factorisations **inéquivalentes** : à commutation près
= arbres plans enracinés (non étiquetés),
avec un coin marqué par sommet



CAS PARTICULIER DES GRANDS CYCLES

Quelques remarques

- les arbres de Cayley sont en fait des arbres **plans**
- bijection indépendante des éléments permutés, *i.e.* des étiquettes des sommets
- factorisations **inéquivalentes** : à commutation près
= arbres plans enracinés (non étiquetés),
avec un coin marqué par sommet
 \approx arbres ternaires complets à $n - 1$ noeuds

CAS PARTICULIER DES GRANDS CYCLES

Quelques remarques

- les arbres de Cayley sont en fait des arbres **plans**
- bijection indépendante des éléments permutés, *i.e.* des étiquettes des sommets
- factorisations **inéquivalentes** : à commutation près
= arbres plans enracinés (non étiquetés),
avec un coin marqué par sommet
 \approx arbres ternaires complets à $n - 1$ noeuds

Théorème (Eidswick, Longyear, 1989)

Le nombre de factorisations **inéquivalentes** d'un cycle de longueur n en $n - 1$ transpositions est $\frac{1}{2n-1} \binom{3n-3}{n-1}$.

TRANSITIVITÉ ET CARTES CROISSANTES

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation à ℓ cycles, et $\tau_m \cdots \tau_1$ une factorisation de σ

- **factorisation minimale** : chaque cycle factorisé indépendamment $\implies m = n - \ell$

TRANSITIVITÉ ET CARTES CROISSANTES

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation à ℓ cycles, et $\tau_m \cdots \tau_1$ une factorisation de σ

- **factorisation minimale** : chaque cycle factorisé indépendamment $\implies m = n - \ell$
- **factorisation transitive** : dont les facteurs τ_1, \dots, τ_m engendrent un sous-groupe transitif de \mathfrak{S}_n , *i.e.* :

$$\forall p, q \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \exists i_1, \dots, i_k \mid \tau_{i_k} \dots \tau_{i_1}(p) = q$$

TRANSITIVITÉ ET CARTES CROISSANTES

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation à ℓ cycles, et $\tau_m \cdots \tau_1$ une factorisation de σ

- **factorisation minimale** : chaque cycle factorisé indépendamment $\implies m = n - \ell$
- **factorisation transitive** : dont les facteurs τ_1, \dots, τ_m engendrent un sous-groupe transitif de \mathfrak{S}_n , *i.e.* :

$$\forall p, q \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \exists i_1, \dots, i_k \mid \tau_{i_k} \dots \tau_{i_1}(p) = q$$

- le graphe correspondant est **connexe**

TRANSITIVITÉ ET CARTES CROISSANTES

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation à ℓ cycles, et $\tau_m \cdots \tau_1$ une factorisation de σ

- **factorisation minimale** : chaque cycle factorisé indépendamment $\implies m = n - \ell$
- **factorisation transitive** : dont les facteurs τ_1, \dots, τ_m engendrent un sous-groupe transitif de \mathfrak{S}_n , *i.e.* :

$$\forall p, q \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \exists i_1, \dots, i_k \mid \tau_{i_k} \dots \tau_{i_1}(p) = q$$

- le graphe correspondant est **connexe**
- le **plongement croissant** a n sommets et ℓ faces, donc au moins $m = n + \ell - 2$ arêtes

HURWITZ, VERSION CARTES CROISSANTES

Théorème (Hurwitz, version 2)

Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ et H_λ le nombre de cartes croissantes à

- n sommets étiquetés
- $m = \ell + n - 2$ arêtes étiquetées
- ℓ faces avec distribution des descentes λ .

$$H_\lambda = n^{\ell-3} \cdot m! \cdot n! \cdot \prod_{i \geq 1} \frac{1}{\ell_i!} \left(\frac{i^{i-1}}{(i-1)!} \right)^{\ell_i}$$

HURWITZ, VERSION CARTES CROISSANTES

Théorème (Hurwitz, version 2)

Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ et H_λ le nombre de cartes croissantes à

- n sommets étiquetés
- $m = \ell + n - 2$ arêtes étiquetées
- ℓ faces avec distribution des descentes λ .

$$H_\lambda = n^{\ell-3} \cdot m! \cdot n! \cdot \prod_{i \geq 1} \frac{1}{\ell_i!} \left(\frac{i^{i-1}}{(i-1)!} \right)^{\ell_i}$$

Cas particuliers :

- $\lambda = (n)$: $\ell = 1$ face, $m = n - 1$ arêtes,

$$H_{(n)} = (n-1)! \cdot n^{n-2}$$

HURWITZ, VERSION CARTES CROISSANTES

Théorème (Hurwitz, version 2)

Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ et H_λ le nombre de cartes croissantes à

- n sommets étiquetés
- $m = \ell + n - 2$ arêtes étiquetées
- ℓ faces avec distribution des descentes λ .

$$H_\lambda = n^{\ell-3} \cdot m! \cdot n! \cdot \prod_{i \geq 1} \frac{1}{\ell_i!} \left(\frac{i^{i-1}}{(i-1)!} \right)^{\ell_i}$$

Cas particuliers :

- $\lambda = 1^n$: $\ell = n$ faces, $m = 2n - 2$ arêtes,

$$H_{1^n} = (2n - 2)! \cdot n^{n-3}$$

QUELQUES FORMULES D'ÉNUMÉRATION DE CARTES

Cartes (planaires enracinées) à n arêtes : $\frac{2 \cdot 3^n}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

Cartes biparties à n arêtes : $\frac{3 \cdot 2^{n-1}}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

Cartes biparties eulériennes à $2n$ arêtes : $\frac{4 \cdot 3^n}{2n+2} \cdot \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}$

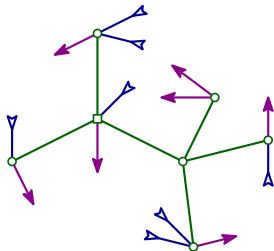
Cartes non séparables à $n + 1$ arêtes : $\frac{4}{2n+2} \cdot \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}$

Triangulations non séparables à $2n$ faces : $\frac{2^{n+1}}{2n+2} \cdot \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}$

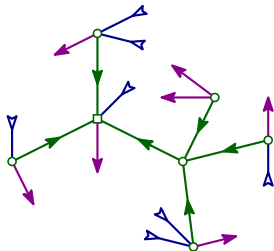
principalement [Tutte, 60's]

ARBRES BOURGEONNANTS ET ORIENTATIONS MINIMALES

- **arbre bourgeonnant** : avec 2 types de sommets de degré 1, **bourgeons** et **feuilles**

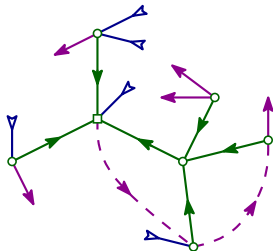


ARBRES BOURGEONNANTS ET ORIENTATIONS MINIMALES



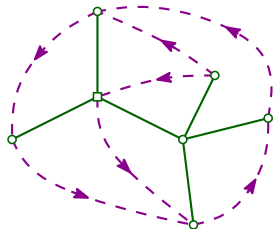
- **arbre bourgeonnant** : avec 2 types de sommets de degré 1, **bourgeons** et **feuilles**
- orientation vers la racine

ARBRES BOURGEONNANTS ET ORIENTATIONS MINIMALES



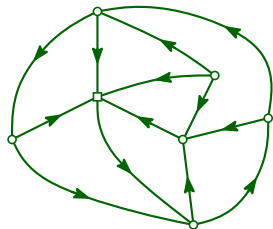
- **arbre bourgeonnant** : avec 2 types de sommets de degré 1, **bourgeons** et **feuilles**
- orientation vers la racine
- **clôture** : appariement des bourgeons et feuilles

ARBRES BOURGEONNANTS ET ORIENTATIONS MINIMALES



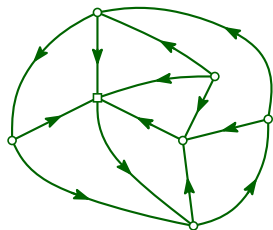
- **arbre bourgeonnant** : avec 2 types de sommets de degré 1, **bourgeons** et **feuilles**
- orientation vers la racine
- **clôture** : appariement des bourgeons et feuilles

ARBRES BOURGEONNANTS ET ORIENTATIONS MINIMALES



- **arbre bourgeonnant** : avec 2 types de sommets de degré 1, **bourgeons** et **feuilles**
- orientation vers la racine
- **clôture** : appariement des bourgeons et feuilles
- carte orientée **minimale**, *i.e.* sans cycle horaire, et **accessible**

ARBRES BOURGEONNANTS ET ORIENTATIONS MINIMALES



- **arbre bourgeonnant** : avec 2 types de sommets de degré 1, **bourgeons** et **feuilles**
- orientation vers la racine
- **clôture** : appariement des bourgeons et feuilles
- carte orientée **minimale**, *i.e.* sans cycle horaire, et **accessible**

Théorème (Bernardi, 2007)

Une carte pointée munie d'une orientation minimale et accessible se décompose de manière unique en un arbre et des arêtes de clôture

α : fonction prescrivant un degré sortant à chaque sommet

Théorème (Felsner, 2004)

si une carte possède une α -orientation, elle admet une unique α -orientation minimale.

(obtenue en retournant des circuits horaires emboîtés)

α -ORIENTATIONS

α : fonction prescrivant un degré sortant à chaque sommet

Théorème (Felsner, 2004)

si une carte possède une α -orientation, elle admet une unique α -orientation minimale.

(obtenue en retournant des circuits horaires emboîtés)

Lemme

si une carte possède une α -orientation accessible, toutes ses α -orientations sont accessibles.

BIJECTION GÉNÉRIQUE

famille de cartes caractérisée
par l'existence d'une
 α -orientation accessible

\implies bijection avec une
famille d'arbres
bourgeonnants

BIJECTION GÉNÉRIQUE

famille de cartes caractérisée
par l'existence d'une
 α -orientation accessible

\implies bijection avec une
famille d'arbres
bourgeonnants

Exemples

- **cartes eulériennes** : orientation eulérienne (degrés entrant et sortant égaux) \implies [Schaeffer, 1997]

BIJECTION GÉNÉRIQUE

famille de cartes caractérisée
par l'existence d'une
 α -orientation accessible

\implies bijection avec une
famille d'arbres
bourgeonnants

Exemples

- **cartes eulériennes** : orientation eulérienne (degrés entrant et sortant égaux) \implies [Schaeffer, 1997]
- **cartes générales** : orientation quasi-eulérienne \implies [Bouttier, Di Francesco, Guitter, 2002]

BIJECTION GÉNÉRIQUE

famille de cartes caractérisée
par l'existence d'une
 α -orientation accessible

\implies bijection avec une
famille d'arbres
bourgeonnants

Exemples

- **cartes eulériennes** : orientation eulérienne (degrés entrant et sortant égaux) \implies [Schaeffer, 1997]
- **cartes générales** : orientation quasi-eulérienne \implies [Bouttier, Di Francesco, Guitter, 2002]
- **cartes m -eulériennes** : orientation à 1 entrante par sommet noir, i sortantes par sommet blanc \implies [Bousquet-Mélou, Schaeffer, 2000]

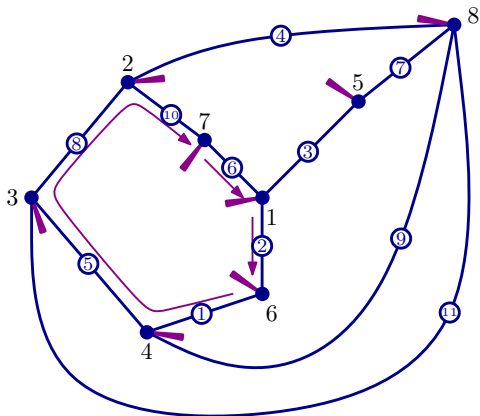
BIJECTION GÉNÉRIQUE

famille de cartes caractérisée
par l'existence d'une
 α -orientation accessible \implies bijection avec une
famille d'arbres
bourgeonnants

Exemples

- **cartes eulériennes** : orientation eulérienne (degrés entrant et sortant égaux) \implies [Schaeffer, 1997]
- **cartes générales** : orientation quasi-eulérienne \implies [Bouttier, Di Francesco, Guitter, 2002]
- **cartes m -eulériennes** : orientation à 1 entrante par sommet noir, i sortantes par sommet blanc \implies [Bousquet-Mélou, Schaeffer, 2000]
- **quadrangulations et triangulations simples** : orientation à 2 ou 3 sortantes \implies [P., Schaeffer, 2003], [Fusy, 2007]
+ extension aux d -angulations de maille d

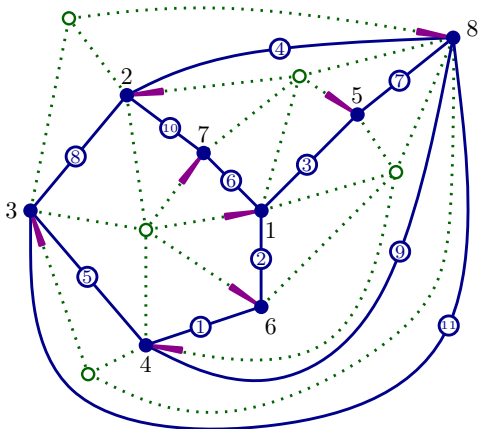
CARTES CROISSANTES VS. QUADRANGULATIONS CROISSANTES



carte croissante à

- $n + \ell - 2$ arêtes étiquetées,
- n sommets étiquetés
- ℓ faces,
- n descentes autour des faces, selon la distribution λ

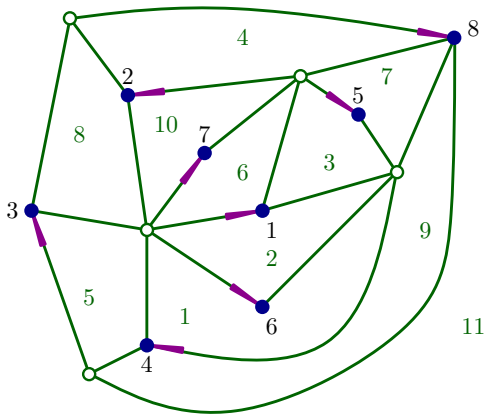
CARTES CROISSANTES VS. QUADRANGULATIONS CROISSANTES



carte croissante à

- $n + \ell - 2$ arêtes étiquetées,
- n sommets étiquetés
- ℓ faces,
- n descentes autour des faces, selon la distribution λ

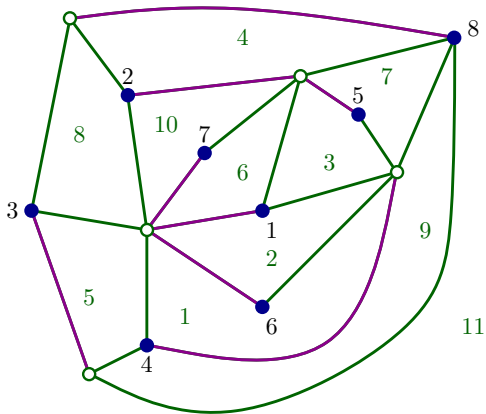
CARTES CROISSANTES VS. QUADRANGULATIONS CROISSANTES



\implies quadrangulation à

- $n + \ell - 2$ faces étiquetées,
- n sommets noirs étiquetés, croissants
- ℓ sommets blancs, quasi-croissants
- n descentes autour des sommets blancs, selon la distribution λ

CARTES CROISSANTES VS. QUADRANGULATIONS CROISSANTES

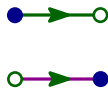
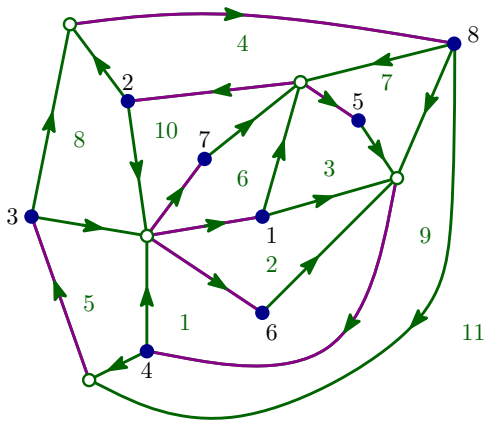


\implies quadrangulation à

- $n + \ell - 2$ faces étiquetées,
- n sommets noirs étiquetés, croissants
- ℓ sommets blancs, quasi-croissants
- n descentes autour des sommets blancs, selon la distribution λ

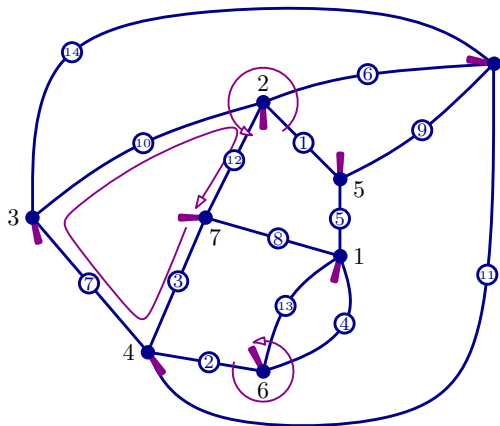
ORIENTATION DES DESCENTES

chaque arête est orientée avec la face de plus grande étiquette à sa gauche



- les sommets noirs ont exactement une entrante,
- les sortantes des sommets blancs suivent la distribution λ

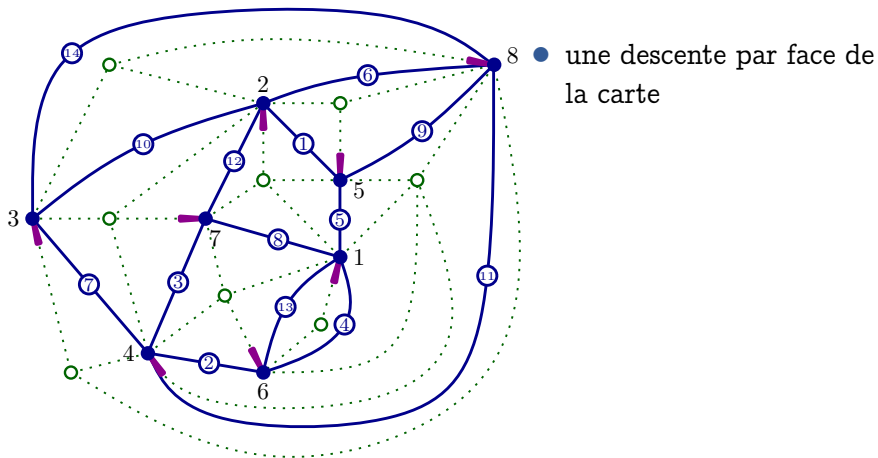
CAS PARTICULIER DE L'IDENTITÉ



8 ● une descente par face de la carte

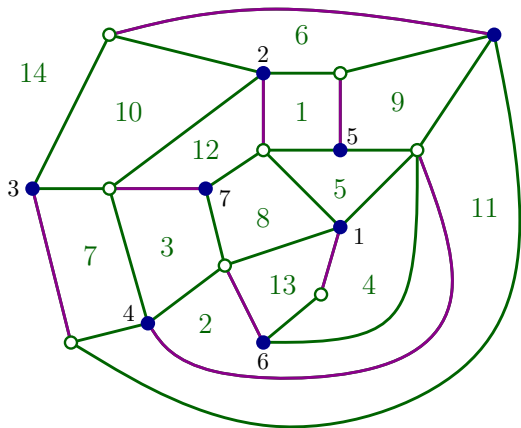
$$H_{1n} = (2n - 2)! \cdot n^{n-3}$$

CAS PARTICULIER DE L'IDENTITÉ



$$H_{1n} = (2n - 2)! \cdot n^{n-3}$$

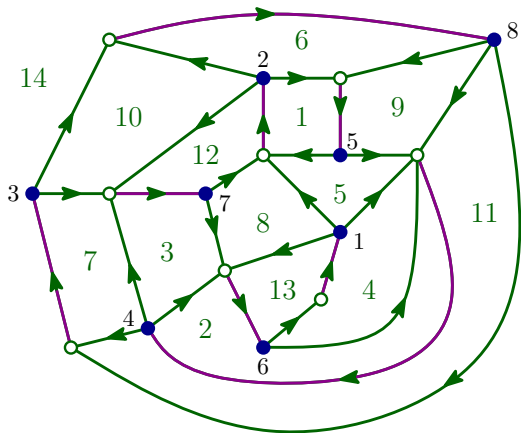
CAS PARTICULIER DE L'IDENTITÉ



- couplage parfait sur la quadrangulation

$$H_{1n} = (2n - 2)! \cdot n^{n-3}$$

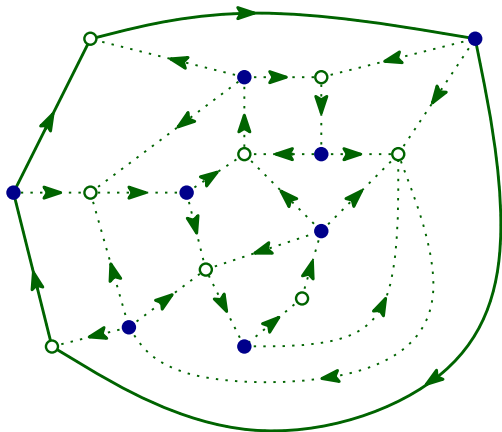
CAS PARTICULIER DE L'IDENTITÉ



- couplage parfait sur la quadrangulation
- 1 entrante par sommet noir, 1 sortante par sommet blanc

$$H_{1n} = (2n - 2)! \cdot n^{n-3}$$

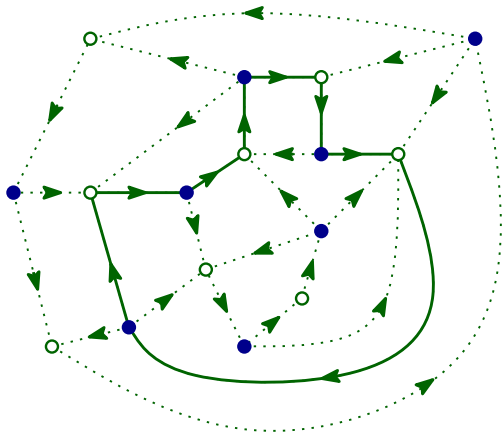
CAS PARTICULIER DE L'IDENTITÉ



- couplage parfait sur la quadrangulation
- 1 entrante par sommet noir, 1 sortante par sommet blanc

$$H_{1^n} = (2n - 2)! \cdot n^{n-3}$$

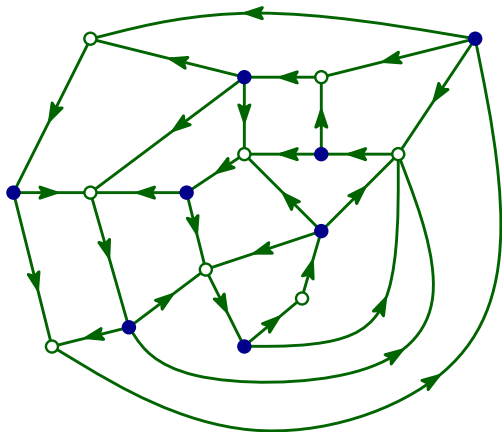
CAS PARTICULIER DE L'IDENTITÉ



- couplage parfait sur la quadrangulation
- 1 entrante par sommet noir, 1 sortante par sommet blanc

$$H_{1^n} = (2n - 2)! \cdot n^{n-3}$$

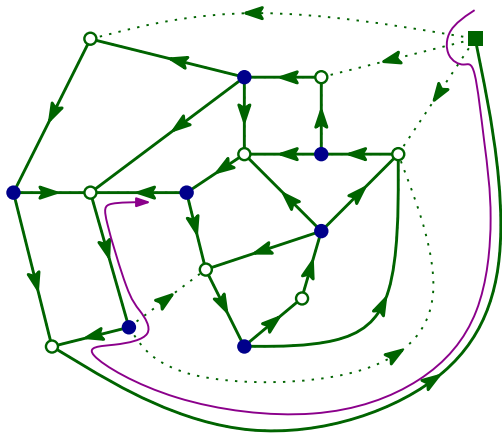
CAS PARTICULIER DE L'IDENTITÉ



- couplage parfait sur la quadrangulation
- 1 entrante par sommet noir, 1 sortante par sommet blanc

$$H_{1^n} = (2n - 2)! \cdot n^{n-3}$$

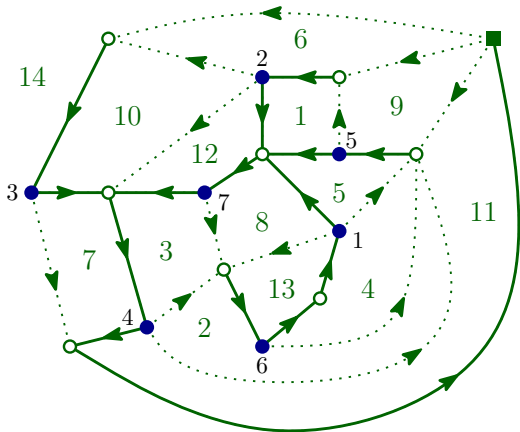
CAS PARTICULIER DE L'IDENTITÉ



- couplage parfait sur la quadrangulation
- 1 entrante par sommet noir, 1 sortante par sommet blanc

$$H_1^n = (2n - 2)! \cdot n^{n-3}$$

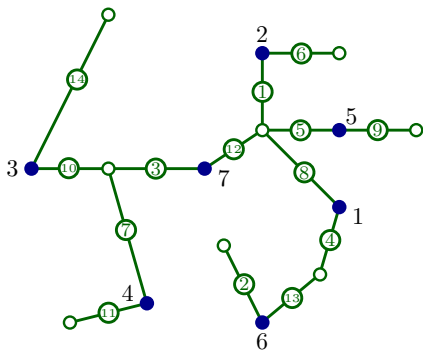
CAS PARTICULIER DE L'IDENTITÉ



- couplage parfait sur la quadrangulation
- 1 entrante par sommet noir, 1 sortante par sommet blanc

$$H_{1n} = (2n - 2)! \cdot n^{n-3}$$

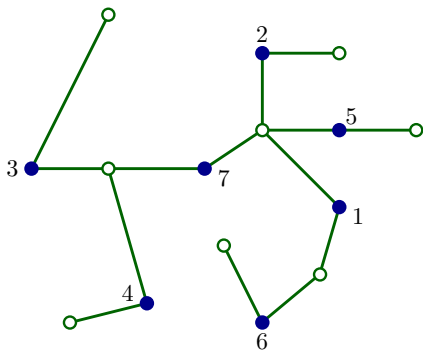
CAS PARTICULIER DE L'IDENTITÉ



- couplage parfait sur la quadrangulation
- 1 entrante par sommet noir, 1 sortante par sommet blanc
- arbre à n sommets blancs, $n - 1$ sommets noirs étiquetés de degré 2, $2n - 2$ arêtes étiquetées

$$H_{1n} = (2n - 2)! \cdot n^{n-3}$$

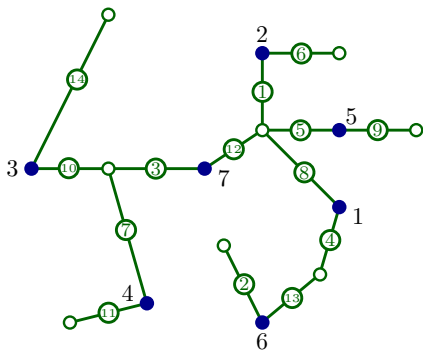
CAS PARTICULIER DE L'IDENTITÉ



- couplage parfait sur la quadrangulation
- 1 entrante par sommet noir, 1 sortante par sommet blanc
- arbre à n sommets blancs, $n - 1$ sommets noirs étiquetés de degré 2, $2n - 2$ arêtes étiquetées

$$H_1^n = (2n - 2)! \cdot n^{n-3}$$

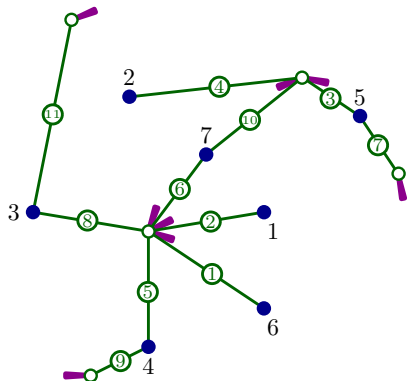
CAS PARTICULIER DE L'IDENTITÉ



- couplage parfait sur la quadrangulation
- 1 entrante par sommet noir, 1 sortante par sommet blanc
- arbre à n sommets blancs, $n - 1$ sommets noirs étiquetés de degré 2, $2n - 2$ arêtes étiquetées

$$H_{1n} = (2n - 2)! \cdot n^{n-3}$$

CAS GÉNÉRAL : ARBRES D'HURWITZ

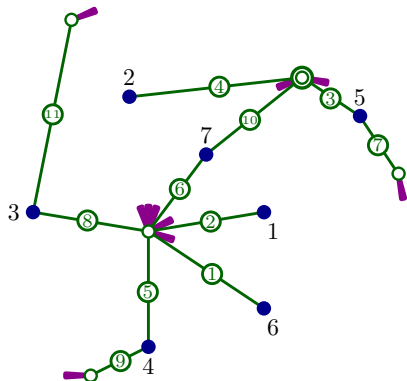


- arbre à ℓ sommets blancs, $n - 1$ sommets noirs étiquetés de degré 1 ou 2, m arêtes étiquetées, n coins blancs marqués distribués selon λ

$$H_{\lambda} = n^{\ell-3} \cdot m! \cdot n! \cdot \prod_{i \geq 1} \frac{1}{\ell_i!} \left(\frac{i^{i-1}}{(i-1)!} \right)^{\ell_i}$$

[Duchi, P., Schaeffer]

CAS GÉNÉRAL : ARBRES D'HURWITZ

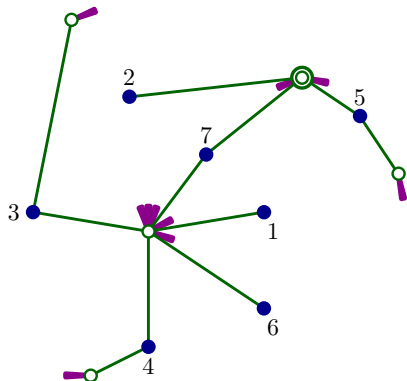


- arbre à ℓ sommets blancs, $n - 1$ sommets noirs étiquetés de degré 1 ou 2, m arêtes étiquetées, n coins blancs marqués distribués selon λ
- double-pointage

$$H_{\lambda} = n^{\ell-3} \cdot m! \cdot n! \cdot \prod_{i \geq 1} \frac{1}{\ell_i!} \left(\frac{i^{i-1}}{(i-1)!} \right)^{\ell_i}$$

[Duchi, P., Schaeffer]

CAS GÉNÉRAL : ARBRES D'HURWITZ

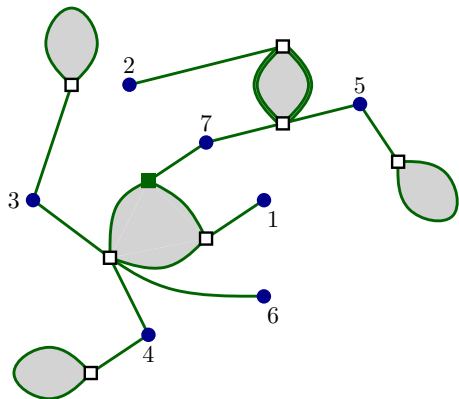


- arbre à ℓ sommets blancs, $n - 1$ sommets noirs étiquetés de degré 1 ou 2, m arêtes étiquetées, n coins blancs marqués distribués selon λ
- double-pointage

$$H_\lambda = n^{\ell-3} \cdot m! \cdot n! \cdot \prod_{i \geq 1} \frac{1}{\ell_i!} \left(\frac{i^{i-1}}{(i-1)!} \right)^{\ell_i}$$

[Duchi, P., Schaeffer]

CAS GÉNÉRAL : ARBRES D'HURWITZ

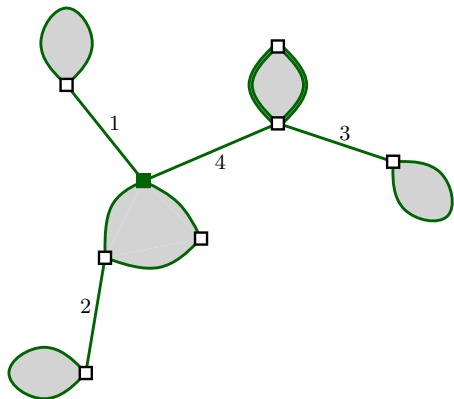


- arbre à ℓ sommets blancs, $n - 1$ sommets noirs étiquetés de degré 1 ou 2, m arêtes étiquetées, n coins blancs marqués distribués selon λ
- double-pointage
- transformation en cactus

$$H_{\lambda} = n^{\ell-3} \cdot m! \cdot n! \cdot \prod_{i \geq 1} \frac{1}{\ell_i!} \left(\frac{i^{i-1}}{(i-1)!} \right)^{\ell_i}$$

[Duchi, P., Schaeffer]

CAS GÉNÉRAL : ARBRES D'HURWITZ

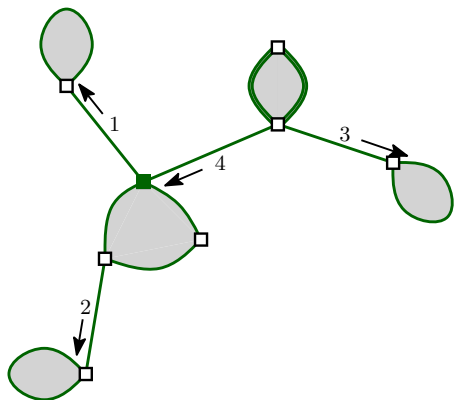


- arbre à ℓ sommets blancs, $n - 1$ sommets noirs étiquetés de degré 1 ou 2, m arêtes étiquetées, n coins blancs marqués distribués selon λ
- double-pointage
- transformation en cactus
- émondage

$$H_\lambda = n^{\ell-3} \cdot m! \cdot n! \cdot \prod_{i \geq 1} \frac{1}{\ell_i!} \left(\frac{i^{i-1}}{(i-1)!} \right)^{\ell_i}$$

[Duchi, P., Schaeffer]

CAS GÉNÉRAL : ARBRES D'HURWITZ

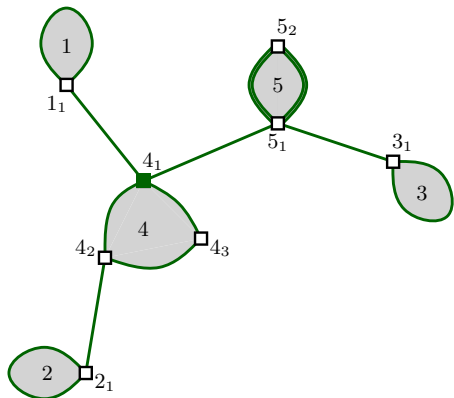


- arbre à ℓ sommets blancs, $n - 1$ sommets noirs étiquetés de degré 1 ou 2, m arêtes étiquetées, n coins blancs marqués distribués selon λ
- double-pointage
- transformation en cactus
- émondage

$$H_\lambda = n^{\ell-3} \cdot m! \cdot n! \cdot \prod_{i \geq 1} \frac{1}{\ell_i!} \left(\frac{i^{i-1}}{(i-1)!} \right)^{\ell_i}$$

[Duchi, P., Schaeffer]

CAS GÉNÉRAL : ARBRES D'HURWITZ



- arbre à ℓ sommets blancs, $n - 1$ sommets noirs étiquetés de degré 1 ou 2, m arêtes étiquetées, n coins blancs marqués distribués selon λ
- double-pointage
- transformation en cactus
- émondage

$$H_\lambda = n^{\ell-3} \cdot m! \cdot n! \cdot \prod_{i \geq 1} \frac{1}{\ell_i!} \left(\frac{i^{i-1}}{(i-1)!} \right)^{\ell_i}$$

[Duchi, P., Schaeffer]

- statistiques des grandes cartes d'Hurwitz

PERSPECTIVES

- statistiques des grandes cartes d'Hurwitz
- factorisations inéquivalentes

PERSPECTIVES

- statistiques des grandes cartes d'Hurwitz
- factorisations inéquivalentes
- nombres d'Hurwitz doubles