Structures algèbriques associées au graph-associahedra

Séminaire de combinatoire Philippe Flajolet. Février 2015

María Ronco. Universidad de Talca

February 12, 2015

Table of Contents

Table of Contents

Tubes

M. Carr, S. Devadoss, *Coxeter complexes and graph associahedra*, Topol. and its Applic. 153 (1-2) (2006) 2155-2168.

G graphe fini et simple, avec l'ensemble de sommets numéroté $\mathrm{Vert}(G) = \{1 < \cdots < n\}$.

Définition

Un *tube* dans G est un sous-ensemble S de $\mathrm{Vert}(G)$ tel que le sous-graphe induit G_S est connexe.

Définition

Soient t et t' des tubes différents d'un graphe G. On dit que t et t' sont *compatibles* s'ils satisfont une des conditions suivantes:

1. soit $t \subset t'$, ou $t' \subset t$,
2. $t \cap t' = \emptyset$, et il n'existe pas de bord $e \in \mathrm{Edg}(G)$ tel qu'un sommet de e soit dans t et l'autre sommet soit dans t'.

Tubes incompatibles

Définition

Un *tubing* de G est une famille $T = \{t^i\}_{1 \leq i \leq k}$ de tubes dans laquelle chaque paire de tubes est compatible.
Soit $Tub(G)$ l'ensemble de tous les tubings de G.

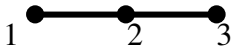
Un tubing avec k tubes s'appelle un *k-tubing* de G, pour $0 \leq k \leq n-1$.

L'ensemble $Tub(G)$ est partiellement ordonné par la rélation:
$T \prec T'$ si T s'obtient de T' en ajoutant des tubes compatibles.
Un *tubing maximal* de G (G ayant n sommets) est un tubing avec $n-1$ tubes.
Carr et Devadoss ont montré que, si G a n sommets, la réalization geométrique de l'ensemble partiellement ordonné $(Tub(G), \prec)$ est la division barycentrique d'un polytope simple convexe $\mathcal{K}G$ de dimension $n-1$, dont les faces de dimension r sont indexées par les $n-1-r$ tubings de G, pour $0 \leq r \leq n-1$.

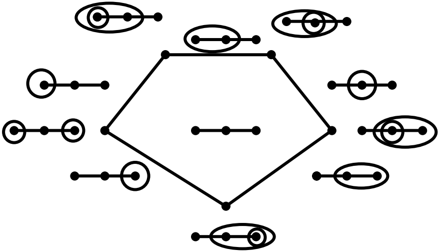
Examples

1. Pour le graphe S_n avec $\mathrm{Edg}(S_n) = \emptyset$, $\mathcal{K}S_n$ est le $n-1$-simple standard.
2. Pour le graphe linéaire L_n avec $\mathrm{Edg}(L_n) = \{(i, i+1) \mid 1 \leq i \leq n-1\}$, $\mathcal{K}L_n$ est le polytope de Stasheff de dimension $n-1$, dont les faces sont indexées par les arbres planaires enracinés avec $n+1$ feuilles..
3. Pour le graphe cyclique C_n, avec $\mathrm{Edg}(C_n) = \{(i, i+1) \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{(1, n)\}$, $\mathcal{K}C_n$ est le cycloèdre de dimension $n-1$.
4. Pour le graphe complet K_n, avec $\mathrm{Edg}(K_n) = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$, $\mathcal{K}K_n$ est le permutoèdre de dimension $n-1$.

For $L_3 =$



$\mathcal{K}L_3$ is given by



Observation

Si G a n sommets, alors $\mathcal{K}G$ s'obtient à partir des contractions du permutoèdre de dimension $n-1$.

Table of Contents

Question 1 Sur l'espace vectoriel engendré par les faces des permutoèdres on a des structures d'algèbre de Hopf (extensions de l'algèbre de Hopf de C. Malvenuto et C. Reutenauer), liées à l'ordre de Bruhat faible (Novelli-Thibon, Chapoton, Loday-R.). L'ordre de Bruhat faible donne l'ordre de Tamari sur les faces de l'associaèdre, et les estructures d'algèbre de Hopf donnent des algèbres de Hopf sur l'espace engrendré par les faces des associaèdres. Quelles conditions doit vérifier une famille de graphes $\{G_n\}_{n\geq 1}$ pour que l'espace engendré par les faces des $\mathcal{K}G_n$ hérite une structure d'algèbre de Hopf? (Devadoss-Forcey, Forcey-Springfield)

Question 2 L'espace engendré par les faces des simplexes standard décrit les objets libres pour l'opérade des trigèbres associatives et l'espace engendré par les faces des associaèdres donne l'opérade des trigèbres dendriformes, et une théorie est dual de Koszul de l'autre (Loday-R.). Est-ce qu'on a des résultats similaires pour d'autres famillies des graph associahedra?

Question 3 L'espace engendré par les faces des associaèdres a une structure naturelle de système pre-Lie libre engendre par l'ensemble gradué $C = \{c_n\}_{n\geq 1}$, avec $\deg(c_n) = n$. Or, un système pre-Lie est équivalent a une operad non-symmétrique $\mathcal{P}$ pour laquelle $\mathcal{P}(0) = 0$ et $\mathcal{P}(1) = \mathbb{K}$.

Table of Contents

Opérades non symmétriques

Définition

Une *opérade non symmétrique* est un espace vectoriel gradué $\mathcal{P} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{P}_n$ muni des opérations $\circ_i : \mathcal{P}_n \otimes \mathcal{P}_m \longrightarrow \mathcal{P}_{n+m-1}$, pour $1 \leq i \leq n$, satisfaisant:

1. $x \circ_i (y \circ_j z) = (x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z$, pour $1 \leq i \leq |x|$ et $1 \leq j \leq |y|$,
2. $(x \circ_j y) \circ_i z = (x \circ_i z) \circ_{j+|z|-1} y$, pour $1 \leq i < j \leq |x|$.

Examples

1. Si $\mathcal{A}s = \bigoplus_{n\geq 1} \mathbb{K}\mu_n$, on a l'opérade des algèbres associatives.
2. Si A est une algèbre associative, l'espace des cochaînes de Hochschild de A, avec $\mathcal{P}_n = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n}, A)$.

Opérade non-symmétrique libre

L'opérade non symmétrique libre engendrée par l'ensemble $\{c_n\}_{n\geq 2}$, avec $|c_n| = n$, est l'espace des arbres planaires enracinés, muni des opérations
$t \circ_j w$ est l'arbre obtenu attachant la racine de w à la j-ième feuille de t.
On idéntifie l'élément c_n à la corolle ayant un sommet et n feuilles.
Donc, les opérades non symmétriques sont associées au graphe associaèdre de la famille des graphes linéaires.

Monades on espaces vectoriels gradués

Ginzburg et Kapranov
Soit Vect_+ la catégorie des espaces vectoriels gradués.
Les arbres plantaires enracinés définissent une monade dans Vect_+.

- Soient $t \in \mathcal{T}_n$ un arbre planaire enraciné et $\{M_n\}_{n\geq 1}$ un objet dans Vect_+. Considérons l'espace

$$M_t := \bigotimes_{v \in Vert(t)} M_{|t|}.$$

- L'espace vectoriel gradué $\mathbb{P}(M)$ est donné par:

$$\mathbb{P}(M)_{n+1} := \bigoplus_{t \in T_n} M_t,$$

et $\mathbb{P}(M)_1 = \mathbb{K}$.

L'espace $\mathbb{P}(M)_{n+1}$ est engendré par les arbres planaires enracinés, avec les sommets décorés par les éléments de M.
On a $\iota(M) : M \longrightarrow \mathbb{P}(M)$, qu'idéntifie $\mu \in M_n$ avec la corolle c_n décorée par μ.
La greffe des arbres donne une opération $\Gamma : \mathbb{P} \circ \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$

$$\Gamma(t; w_1, \dots, w_n) := (((t \circ_1 w_1) \circ_{|w_1|+1} w_2) \dots) \circ_{|w_1|+\dots+|w_{n-1}|+1} w_n.$$

Table of Contents

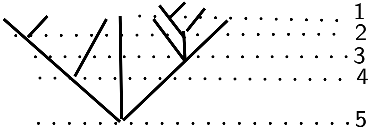
Surjective maps

Soit $\mathbf{ST}_n^r$ l'ensemble des applications surjectives $f = (f(1), \dots, f(n))$ de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, r\}$.

Observation

$\mathbf{ST}_n^r$ s'idéntifie à l'ensemble des arbres planaires enracinés à niveaux, avec $n+1$ feuilles et r sommets internes.

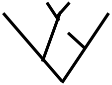
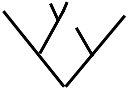
$f = (2, 4, 5, 5, 3, 1, 2, 3) \longmapsto$

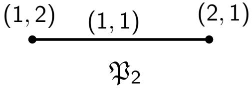


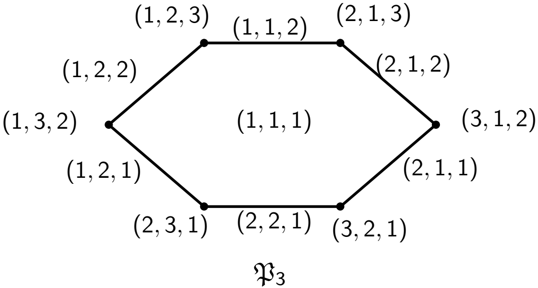
Permutoèdre

A. Tonks, *Relating the associahedron and the permutohedron*, in Operads: Proceedings of Renaissance Conferences, Hartford, Contemp. Math., vol. 202 (1997), 33–36.

$\mathfrak{P}_n$ est le polytope $\mathcal{K}K_n$ don't les faces de dimension r sont données par les éléments de $\mathbf{ST}_n^r$

$(3,1,4,2) =$  $<$  $= (2,1,3,2)$


(1, 2)
(1, 1)
(2, 1)
$\mathfrak{P}_2$


(1, 2, 3)
(1, 1, 2)
(2, 1, 3)
(1, 2, 2)
(2, 1, 2)
(1, 3, 2)
(1, 1, 1)
(3, 1, 2)
(1, 2, 1)
(2, 1, 1)
(2, 3, 1)
(2, 2, 1)
(3, 2, 1)
$\mathfrak{P}_3$

Permutads

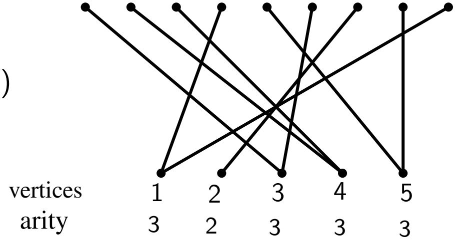
J.-L. Loday, M.R. *Permutads*, J. of Combinatorial Theory, Series A 120 (2013) 340365.

Question: Définir l'analogue des optŕades non-symmétriques en reemplaant arbres planaires enracinés par applications surjectives.

Pour $f \in \mathbf{ST}_n^r$, les *sommets* de f sont les éléments de $\{1, \dots, r\}$, notés $\mathrm{Vert}(f)$.

Pour $u \in \mathrm{Vert}(f)$, son *arité* est $|f^{-1}(u) + 1|$.

$$f = (3, 4, 4, 1, 5, 3, 2, 5, 1)$$



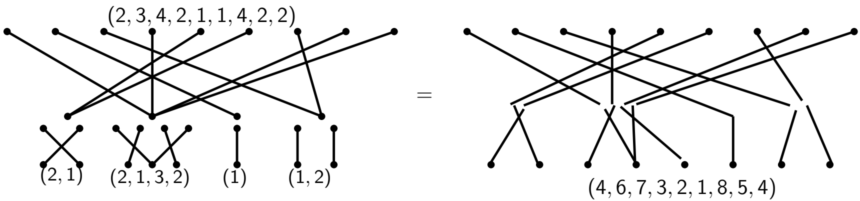
Substitution sur les applications surjectives

Soient $f \in \mathbf{ST}_n^r$ et $g_i \in \mathbf{ST}_{m_i}^{k_i}$, $i = 1, \dots, r$, telles que $m_i = |f^{-1}(i)|$. Pour $k := \sum_i k_i$, la *substitution* de $\{g_i\}$ dans f est la surjection $(f; g_1, \dots, g_r) \in \mathbf{ST}_n^k$ donnée par

$$(f; g_1, \dots, g_r)(a) := k_1 + \cdots + k_{j-1} + g_j(b),$$

quand $f(a) = j$ et a est le b-ième élément de $f^{-1}(j)$.

Example



Observation

1. La substitution est une opération associative, i.e.

$$((f;g_1,\dots,g_r);h_1^1,\dots,h_{k_1}^1,h_1^2,\dots,h_{k_r}^r) = (f;(g_1;h_1^1,\dots,h_{k_1}^1),\dots,(g_r;h_1^r,\dots,h_{k_r}^r)).$$

2. La famille des applications surjectives muni du procés de substitution donne une opérade colorée.

Une monade sur Vect_+

Pour un espace vectoriel gradué M et une surjection $f \in \mathbf{ST}_n^r$ on défini

$$M_f := \bigotimes_{u \in Vert(f)} M_{|u|},$$

où $|u|$ est l'arité de u.
On a alors:

$$\mathbb{P}(M)_n := \bigoplus_{f \in ST_{n-1}} M_f \quad \text{for} \quad n \geq 2,$$

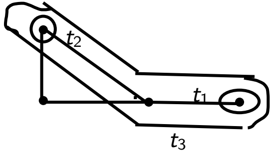
Permutad

Proposition

La substitution des applications surjectives donne une transformation des foncteurs $\Gamma : \mathbb{P} \circ \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ *associative et unitaire. Alors* $(\mathbb{P}, \Gamma, \iota)$ *est une monade.*

Substitution dans le graphe associaèdre

Pour le Permutoèdre, Loday, R.
Cas général, avec S. Forcey.
Pour une collection des graphes simples $\{G_n\}_{n\geq 1}$, avec $\mathrm{Vert}(G_n) = \{1, \dots, n\}$,
soit $T \in Tub(G_n)$, un *sommet* de T est un tube $t \in T$.
l'*arité* d'un sommet $t \in T$ est le nombre des sommets (vertices) de G_n appartenant à t que n'appartiennent pas à aucun $t' \in T$ contenu dans t, plus 1.



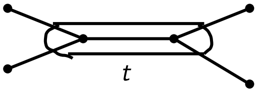
L'arité de t_1, t_2 et t_3 est 2.

Graphes reconnectés

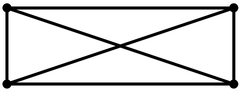
Définition

(Carr-Devadoss) Pour un graphe G et un tube t, on construct un nouveau graphs G_t, appellé le *complément reconnecté* : Si $\mathrm{Vert}(G)$ set l'ensemble de sommets de G, alors $\mathrm{Vert}(G) \setminus \{t\}$ est l'ensemble des sommets de G_t. Il y a un bord entre deux sommets a et b de G_t si $\{a, b\} \cup t$ est connexe.

G

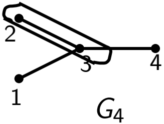


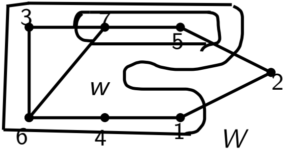
G_t



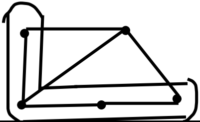
Substitution

Soit G_n one famille de graphes. Pour un tubing T de G_n, un tubing W de G_m et $w \in W$, on peut substituer T à w lorsque l'arité de w est $n+1$ et le résultat de faire le complément reconnecté de w par rapport aux tubes contenus dans w (en renumérotant les sommets) est un graphe a n sommets que peut s'obtenir de G_n en éliminant quelques bords.

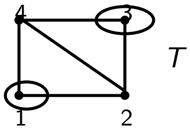


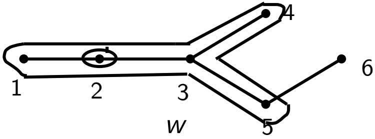


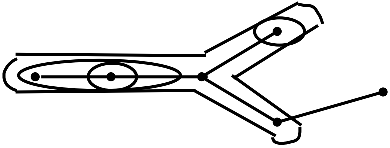
G_7



Ne marche pas


4
3
1
2
T


4
6
1
2
3
5
w



Résultats

1. Si tous les graphes G_n sont connexes, on a une notion de monade sur Vect_+.
2. Si G_n est le graphe linéaire L_n, on récupére la notion d'opérade non symmétrique.
3. Pour des graphs non-connexes, on ne sait pas. Dans le cas des graphes $\{S_n\}$ on récupére la notion des trièbres associatives.

Merci beaucoup !