Réalisations polynomiales d'algèbres de Hopf combinatoires

Jean-Yves Thibon

Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Séminaire Philippe Flajolet

Vocabulaire

- Algèbre : $\mu : \ x \otimes y \mapsto x \cdot y$
- Cogèbre : $\Delta : \ x \mapsto \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$
- Bigèbre : $\Delta(x \cdot y) = \Delta(x) \cdot \Delta(y)$
- Graduation : $H = \bigoplus_{n \geq 0} H_n$, compatible avec $\cdot$ et Δ
- Si $\dim H_0 = 1$: *antipode* $x \mapsto S(x)$, inverse de l'identité I pour la *convolution*

$$f \star g(x) = \mu(f \otimes g)(\Delta x)$$

- L'élément neutre de $\star$: $u \circ \epsilon$ (ici, projection sur H_0).
- Bigèbre associative, coassociative avec antipode, unité, coünité : algèbre de Hopf
- Beaucoup de familles d'objets combinatoires admettent ce type de structure

Quelques points de repère I

- L'idée remonte au moins à G.-C. Rota (1976), cf. Joni-Rota (1979)
- Au début, limité à des reformulations élégantes de propriétés connues
- L'exemple le plus ancien : les fonctions symétriques (*Sym*). Reconnue dans les années 70 (Burroughs 1974, Geissinger 1977), la structure de Hopf était implictement utilisée depuis le XIXème siècle (McMahon, Gordan ...)
- Abstraitment, *Sym* est une algèbre de partitions d'entiers. Mais il y a des *variables* sous-jacentes qui donnent naissance à des bases non triviales (Schur, Hall-Littlewood, Macdonald ...)
- les algèbres de Hopf combinatoires : des généralisations des fonctions symétriques (?)

Quelques points de repère II

- Premier exemple : *QSym*, les *fonctions quasi-symétriques* (Gessel 1984)
- **Sym**, fonctions symétriques non-commutatives (Gelfand et al. 1995), duale de *QSym*
- Permutations : $\mathbb{K}\,\mathfrak{S} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{K}\,\mathfrak{S}_n$ (Malvenuto-Reutenauer 1995), $\simeq$ **FQSym** (Duchamp-Hivert-T. 2002)
- Autres familles de mots (surjections, fonctions de parking ...), classes d'équivalences paramétrées par des arbres, des tableaux, etc. (détails plus loin).

Les fonctions symétriques I

- "fonctions" : polynomes en une infinité de variables

$$X = \{x_i | i \geq 1\}$$

$$\lambda_t(X) \text{ ou } E(t;X) = \prod_{i\geq 1}(1+tx_i) = \sum_{n\geq 0} e_n(X)t^n$$

- e_n = fonctions symétriques élémentaires
- Algebriquement indépendantes : $Sym(X) = \mathbb{K}[e_1, e_2, \dots]$
- n variables : nulles après e_n

Les fonctions symétriques II

- Bigèbre :

$$\Delta f = f(X+Y)$$

- $X+Y$: réunion disjointe ; $u(X)v(Y) \simeq u \otimes v$
- Une interpretation : e_n fonction coordonnée sur le groupe multiplicatif

$$G = 1 + t\,\mathbb{K}[[t]] = \{a(t) = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots\}$$

$$e_n(a(t)) = a_n$$

- Alors, $\Delta e_n(a(t) \otimes b(t)) = e_n(a(t)b(t))$

Les fonctions symétriques III

- Bigèbre graduée connexe donc algèbre de Hopf
- Antipode : $(Sf)(X) = f(-X)$ $(p_n(-X) = -p_n(X))$
- Autoduale. Il existe un produit scalaire tel que

$$\langle f \cdot g\,,\, h\rangle = \langle f \otimes g\,,\, \Delta h\rangle$$

- Pour le définir on peut partir des fonctions symétriques complètes
- $h_n =$ somme de tous les monômes de degré n

$$\sigma_t(X) \text{ ou } H(t;X) = \prod_{i\geq 1}(1 - tx_i)^{-1} = \sum_{n\geq 0} h_n(X)t^n$$

Les fonctions symétriques IV

- Les bases de *Sym* sont paramétrées par les partitions d'entiers
$$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r > 0)$$
- On a des *bases multiplicatives*
$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots e_{\lambda_r} \text{ and } h_\lambda$$
- et la base “évidente” des fonctions symétriques monomiales
$$m_\lambda = \Sigma x^\lambda = \sum_{\text{permutations distinctes}} x^\mu$$
- Le produit scalaire de Hall réalise l'autodualité
$$\langle h_\lambda \, , \, m_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$$

Les fonctions symétriques V

- h et m sont des bases adjointes, et

$$\sigma_1(XY) = \prod_{i,j\geq 1}(1-x_iy_j)^{-1} = \sum_\lambda m_\lambda(X)h_\lambda(Y)$$

  (identité de type Cauchy)
- Tout couple de bases telles que $\sigma_1(XY) = \sum_\lambda u_\lambda(X)v_\lambda(Y)$ sont mutuellement adjointes.
- La formule de Cauchy originale pour les *fonctions de Schur* est

$$\sigma_1(XY) = \sum_\lambda s_\lambda(X)s_\lambda(Y)$$

  où $s_\lambda = \det(h_{\lambda_i+j-i})$

Les fonctions symétriques VI

- Les fonctions de Schur encodent les caractères irréductibles des groupes symétriques

$$\chi^\lambda_\mu = \langle s_\lambda \, , \, p_\mu \rangle \quad \text{(Frobenius)}$$

- p_n : sommes de puissances.

$$p_n(X) = \sum_{i \geq 1} x_i^n \, , \quad \sigma_t(X) = \exp\left[\sum_{m \geq 1} p_m(X) \frac{t^m}{m}\right]$$

- $p_n(X+Y) = p_n(X) + p_n(Y)$, seuls éléments primitifs
- $p_n(XY) = p_n(X) p_n(Y)$

- $\delta f = f(XY)$ est un autre coproduit
- son dual est le *produit intérieur* $*$
- Il correspond au produit point par point des caractères, c'est à dire au produit tensoriel des représentations
- Autres interprétations des fonctions de Schur : caractères de $U(n)$, fronctions sphériques zonales du couple de Gelfand $(GL(n,\mathbb{C}), U(n))$, vecteurs de base de relpréstations d'algèbres de Lie affines dans l'espace de Fock ...
- q et (q,t) deformations liées aux groupes linéaires finis, aux algèbres de Hecke, aux groupe quantiques ...
- Encore un autre coproduit provenant de la *composition* des série formelles : algèbre de Faà di Bruno

Les algèbres de Hopf combinatoires sont généralement reliées à *Sym* par des morphismes. On voudrait leur trouver des variables sous-jacentes pour remonter toute cette structure. Quant on y parvient, on parle de *réalisations polynomiales*.

Les fonctions symétriques non commutatives I

- Définition très simple : on remplace les fonctions complètes h_n par des indéterminées non-commutatives S_n (de degré n), et on garde la formule du coproduit
- Réalisation facile : $A = \{a_i | i \geq 1\}$, ensemble *totalement ordonné* de variables non commutatives

$$\sigma_t(A) = \prod_{i\geq 1}^{\rightarrow} (1 - ta_i)^{-1} = \sum_{n\geq 0} S_n(A) t^n \quad (\rightarrow h_n)$$

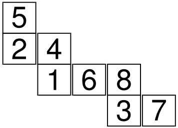
$$\lambda_t(A) = \prod_{1\leq i}^{\leftarrow} (1 + ta_i) = \sum_{n\geq 0} \Lambda_n(A) t^n \quad (\rightarrow e_n)$$

- Coproduit $\Delta F = F(A + B)$ (somme ordinale, A commute avec B)

Les fonctions symétriques non commutatives II

- Interprétation évidente avec ue groupe multiplicatif de séries à coefficients dans une algèbre non commutative
- Plus exotique : **Sym** $= H_*(\Omega\Sigma\,\mathbb{C}\,P^\infty))$ ...
- Mais on recherche des analogues des familles classiques de fonctions symétriques
- ... et des nombreuses interprétations de *Sym*
- On en trouve : Algèbres de Hecke et groupes quantiques à $q = 0$, algèbres de descentes, analogues de Hall-Littlewood ou Macdonald, etc.
- C'est la notion de *descente* qui va nous permettre de remonter la filière ...

- Une *descente* de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$: un i t.q. $\sigma(i) > \sigma(i+1)$

$\sigma = \underline{5}2\underline{4}16\underline{8}37 \longrightarrow$ 

- Ensemble de descentes $\mathrm{Des}(\sigma) = \{1, 3, 6\}$
- Composition de descentes $C(\sigma) = I = (1, 2, 3, 2)$
- $\mathrm{Des}(I) = \{1, 3, 6\}$
- *Algèbre des descentes de* $\mathfrak{S}_n$ (L. Solomon, 1976) : les sommes

$$D_I = \sum_{C(\sigma)=I} \sigma$$

sont la base d'une sous-algèbre Σ_n of $\mathbb{Z}\,\mathfrak{S}_n$

Algèbres de descentes II

- $\bigoplus_{n\geq 0} \Sigma_n \simeq \mathbf{Sym}$
- Une base de **Sym** : $S^I = S_{i_1} \cdots S_{i_r}$ (*compositions I*)
- Application linéaire α : $\mathbf{Sym}_n \to \Sigma_n$

$$\alpha(S^I) = \sum_{\mathrm{Des}(\sigma) \subseteq \mathrm{Des}(I)} \sigma$$

- Produit intérieur $*$ $\mathbf{Sym}_n$: α *anti*isomorphisme
- redonne le produit intérieur de *Sym* par image commutative ($S_n \mapsto h_n$)

Compatibilitité entre les structures

- La formule de Mackey pour un produit de caractères induits appliquée aux sous-groupes paraboliques de $\mathfrak{S}_n$ se traduit par une identité sur les fonctions symétriques
- La motivation de Solomon était de relever la formule de Mackey à l'algèbre du groupe
- Ce relèvement implique une identité sur les fonctions symétriques non commutatives

$$(f_1 \dots f_r) * g = \mu_r[(f_1 \otimes \cdots \otimes f_r) *_r \Delta^r g]$$

  μ_r est la mutliplication de r facteurs, Δ^r est le coproduit itéré à valeurs dans $\mathbf{Sym}^{\otimes r}$
- Tout ceci est donc très Hopfien

La base des rubans

- Descentes d'un mot $w = w_1 \cdots w_n$: $w_i > w_{i+1}$
- $\mathrm{Des}(w)$, $C(w)$, etc.
- Avec la réalisation polynomiale, $S^I(A) = \sum_{\mathrm{Des}(w) \subseteq \mathrm{Des}(I)} w$
- Par inclusion-exclusion,
  $R_I = \alpha^{-1}(D_I) = \sum_{J \leq I} (-1)^{\ell(I)-\ell(J)} S^J = \sum_{\mathrm{Des}(w)=\mathrm{Des}(I)} w$
- Les rubans R_I jouent le rôle des fonctions de Schur
- Ils ont deux interprétations
  1. Comme somme de permutations $R_I \simeq \sum_{C(\sigma)=I} \sigma$
  2. Comme somme de mots $R_I = \sum_{C(w)=I} w$
- Peut-on les réconcilier ? (permutations comme sommes de mots ?)

Standardisation d'un mot

$$\begin{array}{ccc} \text{mot de longueur } n & \longmapsto & \text{permutation de } \mathfrak{S}_n \\ w = a_1 a_2 \dots a_n & \longmapsto & \sigma = \mathrm{std}(w) \end{array}$$

Caractérise les mots sur lesquels le tri par bulles effectue les mêmes transpositions.

$$\text{Pour} i < j \quad \text{on demande} \qquad \sigma(i) > \sigma(j) \quad \text{iff} \quad a_i > a_j \,.$$

Exemple : $\mathrm{std}(abcadbcaa) = 157296834$

$$\begin{array}{ccccccccc} a & b & c & a & d & b & c & a & a \\ a_1 & b_5 & c_7 & a_2 & d_9 & b_6 & c_8 & a_3 & a_4 \\ 1 & 5 & 7 & 2 & 9 & 6 & 8 & 3 & 4 \end{array}$$

Evidemment, $\mathrm{Des}(\mathrm{std}(w)) = \mathrm{Des}(w)$.

C'est le sous-espace de $K\langle A\rangle$ engendré par les sommes

$$\mathbf{G}_\sigma(A) := \sum_{\mathrm{std}(w)=\sigma} w\,.$$

C'est une sous-algèbre. Pour $\alpha \in \mathfrak{S}_m$, $\beta \in \mathfrak{S}_n$,

$$\mathbf{G}_\alpha \mathbf{G}_\beta = \sum_{\substack{\gamma=u\cdot v\\ \mathrm{Std}(u)=\alpha,\ \mathrm{Std}(v)=\beta}} \mathbf{G}_\gamma\,.$$

$$\mathbf{G}_{21}\mathbf{G}_{213} = \mathbf{G}_{54213} + \mathbf{G}_{53214} + \mathbf{G}_{43215} + \mathbf{G}_{52314} + \mathbf{G}_{42315} + \mathbf{G}_{32415} + \mathbf{G}_{51324} + \mathbf{G}_{41325} + \mathbf{G}_{31425} + \mathbf{G}_{21435}$$

On a clairement

$$R_I(A) = \sum_{C(\sigma)=I} \mathbf{G}_\sigma$$

FQSym (Free Quasi-Symmetric Functions) II

De plus, la composition des permutations induit un produit $*$

$$\mathbf{G}_\sigma * \mathbf{G}_\tau = \mathbf{G}_{\tau\circ\sigma}$$

(renversement de l'ordre) qui induit lui-même le produit intérieur de **Sym**.
Pour définir le standardisé, on n'a besoin que d'un alphabet totalement ordonné.

$$\Delta\mathbf{G}_\sigma := \mathbf{G}_\sigma(A+B)$$

avec $A+B$ somme ordinale, A et B commutent, définit un coproduit sur **FQSym** qui induit celui de **Sym**
FQSym est donc une algèbre de Hopf contenant **Sym**. Elle est autoduale pour le produit scalaire

$$\langle \mathbf{G}_\sigma, \mathbf{F}_\tau \rangle = \delta_{\sigma,\tau}, \quad \mathbf{F}_\tau := \mathbf{G}_{\tau^{-1}}$$

Fonctions quasi-symétriques

Si on fait commuter les variables $(a_i \mapsto x_i)$

$$\mathbf{F}_\sigma(A) \mapsto F_I(X)$$

qui ne dépend que de $I = C(\sigma)$.
Les F_I sont la base d'une algèbre de Hopf commutative, *QSym*, les fonctions quasi-symétriques, et les F_I sont les fonctions *Fondamentales* de Gessel.
On obtient donc gratuitement la définition *QSym*, ses règles de produit et de coproduit, et le fait que **Sym** et *QSym* soient duales l'une de l'autre.
Formule de Cauchy non commutative

$$\sum_I R_I(A) F_I(X) = \prod_{i\geq 1}^{\rightarrow} \prod_{j\geq 1}^{\rightarrow} (1 - x_i a_j)^{-1}$$

obtenue en posant $B = X$ dans $\sum_\sigma \mathbf{G}_\sigma(A)\mathbf{F}_\sigma(B) = Id_{\mathbf{FQSym}}$.

Algèbre de Malvenuto-Reutenauer I

V $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension N

$\mathrm{End}^{\mathrm{gr}}_{GL(V)} V^{\otimes n} \simeq \mathbb{C}\,\mathfrak{S}_n$ si $n \leq N$ (dualité de Schur-Weyl)

Pour $n > N$ on a un quotient de $\mathbb{C}\,\mathfrak{S}_n$. On peut faire $N \to \infty$ et voir

$$\mathbb{C}\,\mathfrak{S} := \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{C}\,\mathfrak{S}_n$$

comme l'algèbre des endomorphismes gradués de $T(V)$ commutant avec $GL(V)$.

Elle est stable pour la *convolution* des endomorphismes, et pour le coproduit induit par la convolution de $T(V^*)$.

C'est l'algèbre de Malvenuto-Reutenauer (explicitent produit, coproduit et autodualité).

Constatation : **FQSym** lui est isomorphe. C'en est une réalisation polynomiale.

Algèbre de Malvenuto-Reutenauer II

Avec la réalisation polynomiale, certaines propriétés deviennent évidentes : *QSym* comme quotient, **Sym** comme sous-algèbre ...
Mais on a aussi des réalisations polynomiales d'autres sous -algèbres (certaines nouvelles, d'autres anciennes)

- Tableaux de Young standards (Poirier-Reutenauer), réalisation **FSym**, implique Littlewood-Richardson
- Arbre binaires (Loday-Ronco). En comparant avec la précédente, on découvre un analogue du monoïde plaxique, le monoïde sylvestre.
- Diverses permutations spéciales : Baxter (Giraudo), séparables, etc.

Un cadre général I

- Un alphabet totalement ordonné A
- Une correspondance $w \mapsto (P(w), Q(w))$ compatible à la standardisation ($Q(\mathrm{std}(w)) = Q(w)$)
- et à la restriction aux intervalles de A ($P(u) = P(v) \Rightarrow P(u|_I) = P(v|_I)$)
- Exemple classique : Robinson-Schensted
- On suppose aussi que la relations d'équivalence $u \equiv v \Leftrightarrow P(u) = P(v)$ est une congruence sur le monoïde libre, engendrée par des transpositions de lettres ($uavbw \equiv ubvaw$ sous certaines conditions)
- Alors, les sommes sur les classes

$$\mathbf{P}_T(A) = \sum_{Q(\sigma)=T} \mathbf{G}_\sigma = \sum_{Q(w)=T} w$$

forment la base d'une sous algèbre de Hopf de **FQSym**

Un cadre général II

- Son dual est le quotient de **FQSym** par $\equiv$, on a $\mathbf{F}_\sigma \equiv \mathbf{F}_\tau \Leftrightarrow P(\sigma) = P(\tau)$.
- Robinson-Schensted donne une réalisation de l'algèbre des tableaux standards de Poirier-Reutenauer. On en déduit immédiatement la règle de Littlewood-Richardson
- En prenant pour $P(w)$ l'arbre binaire de recherche obtenu en insérant w de droite à gauche, etpour $Q(w)$ un arbre décroissant repérant les positions des lettres dans le mot original (correpondance sylvestre) on trouve l'algèbre de Loday-Ronco
- La correpondance hypoplaxique donne **Sym** (les **P**), le quotient de **FQSym** est commutatif et on retrouve *Qsym*.

Relèvement des fonctions quasimonomiales I

- *Qsym* admet une base plus simple que F_I, la base quasi-monomiale

$$M_I(X) = \sum_{n_1<n_2<\ldots<n_r} x_{n_1}^{i_1} x_{n_2}^{i_2} \cdots x_{n_r}^{i_r}$$

- Des morceaux de fonctions monomiales : $m_{21} = M_{21} + M_{12}$
- $F_I = \sum_{J \geq I} M_J$, mais pas de relèvement positif à **FQSym**

$$\mathbf{F}_\sigma = \sum_{\tau \geq \sigma} \mathbf{M}_\tau$$

- Les M_I sont symétriques (sommes sur les orbites) pour l'action quasi-symétrisante du groupe symétrique (Hivert).
- Cette action se relève aux mots. Invariants **WQSym** (Word-Quasi-Symmetric functions)

Relèvement des fonctions quasimonomiales II

- Deux mots sont dans la même orbite s'ils ont le même *tassé*
- Un mot est dit tassé si ses lettres forment un intervalle initial de l'alphabet. $u = 3121314$ est tassé, $v = 3156323$ ne l'est pas.
- Si $b_1 < b_2 < \ldots < b_r$ sont les lettres apparaissant dans w, $u = \mathrm{tass}(w)$ est l'image de w par la substitution $b_i \mapsto a_i$. Exemple : $\mathrm{tass}(4263224) = 3142113$.
- Pour u tassé, on pose

$$\mathbf{M}_u = \sum_{\mathrm{tass}(w)=u} w$$

- L'image commutative $\mathbf{M}_u(X)$ est $M_I(X)$ où I est l'évaluation de u

Fonctions quasi-symétriques mots I

- Les M_u sont la base d'une algèbre de Hopf (coproduit $A + B$) notée **WQSym**
- $a_i \mapsto x_i$ est un morphisme de Hopf vers *QSym*
- Elle est autoduale (non trivial : bigèbre bidendriforme, Th. de Foissy)
- **Sym** se plonge dans le dual **WQSym***, qui est munie d'un produit intérieur (algèbre de Solomon-Tits)
- Ordre sur les mots tassés : pseudo-permutoèdre. Permet de relever les F_I et de définir des bases multiplicatives
- On peut rejouer au jeu des congruences. Avec la correspondance sylvestre, on obtient une algèbre de Hopf sur les arbres plans réduits (petits Schröder 1,3,11,45...)
- C'est la trigèbre dendriforme libre sur un générateur (Loday-Ronco)

- Elle récupère au passage un produit intérieur sur son dual
- Composition segmentées (3^{n-1}) : algèbre tricubique libre sur un générateur
- On retrouve ainsi beaucoup d'algèbres de Hopf provenant des opérades
- Pour aller plus loin : s'interroger sur les produit des bases de type F

Fonctions de parking I

- Shuffle décalé : dans **FQSym**, pour $\alpha \in \mathfrak{S}_k$ et $\beta \in \mathfrak{S}_l$,

$$\mathbf{F}_\alpha \mathbf{F}_\beta = \sum_{\gamma \in \alpha \sqcup\!\sqcup \beta[k]} \mathbf{F}_\gamma$$

  où $\beta[k]$ est obtenue en ajoutant k aux valeurs de β : $312[2] = 534$.
- Coproduit compatible fourni par la standardisation :

$$\Delta \mathbf{F}_\gamma = \sum_{\gamma = u \cdot v} \mathbf{F}_{\mathrm{std}(u)} \otimes \mathbf{F}_{\mathrm{std}(v)}$$

- Il existe d'autres classes de mots stables par shuffle décalé
- Peut-on en trouver une qui admette aussi un coproduit du même type ?
- Les *fonctions de parking* conviennent.

Fonctions de parking II

- Une fonction de parking de longueur n est un mot w sur $[1, n]$ tel que dans le *mot trié* $w^{\uparrow}$, la $i$ème lettre est $\leq i$.
- $w = 52321$ en est une car $w^{\uparrow} = 12235$, mais pas 52521
- Parkisation : trier w, décaler la plus petite lettre si ce n'est pas 1, ensuite si nécessaire, décaler la suivante au minimum, et ainsi de suite, puis remettre chaque lettre à sa place originale.
- Exemple : $w = (5, 7, 3, 3, 13, 1, 10, 10, 4)$,
  $w^{\uparrow} = (1, 3, 3, 4, 5, 7, 10, 10, 13)$,
  $p(w)^{\uparrow} = (1, 2, 2, 4, 5, 6, 7, 7, 9)$, et finalement
  $\mathrm{park}(w) = (4, 6, 2, 2, 9, 1, 7, 7, 3)$.
- Raffine le tassage, qui raffine la standardisation

Fonctions de parking III

- $|\mathrm{PF}_n| = (n+1)^{n-1}$
- Les fonctions de parking interviennent dans la combinatoire de l'inversion de Lagrange
- ... et aussi dans sa version non commutative
- **PQSym**, Algèbre de Hopf **PQSym** (Parking Quasi-Symmetric functions) : base $\mathbf{F_a}$, $\mathbf{a} \in \mathrm{PF}$

$$\Delta \mathbf{F_a} = \sum_{\mathbf{a}=u\cdot v} \mathbf{F}_{\mathrm{park}(u)} \otimes \mathbf{F}_{\mathrm{park}(v)}$$

- Base duale : réalisation polynomiale

$$\mathbf{G_a} = \sum_{\mathrm{park}(w)=\mathbf{a}} w$$

- Quotients et sous-algèbres (**WQSym**, **FQSym**, Schröder, Catalan, 3^{n-1} ...)

La sous-algèbre catalane I

- Naturel de regrouper les fonctions de parking **a** selon leur mot trié $\pi = \mathbf{a}^{\uparrow}$ (suggéré par Lagrange non commutative)
- Les sommes
$$\mathbf{P}^{\pi} = \sum_{\mathbf{a}^{\uparrow}=\pi} \mathbf{G_a}$$
forment une base d'une sous-algèbre de Hopf **CQSym** of **PQSym**
- $\dim \mathbf{CQSym}_n = c_n$ (Catalan 1,1,2,5,14)
- $\mathbf{P}^{\pi}$ est multiplicative : $\mathbf{P}^{11}\mathbf{P}^{1233} = \mathbf{P}^{113455}$ (concaténation décalée)
- Libre sur un ensemble Catalan $\{1, 11, 111, 112, \ldots\}$
- Cocommutative
- Donc isomorphe à Grossman-Larson ("ordered trees").
- Définition très différente (pas d'arbres)

La sous-algèbre catalane II

- Révèle une propriété inétressante du dual (commutatif) : **CQSym*** contient *QSym* naturellement
- Rappel : fonctions symétriques monomiales $m_\lambda = \Sigma x^\lambda$

$$m_\lambda = \sum_{I^\downarrow = \lambda} M_I \quad M_I(X) = \sum_{j_1 < j_2 < \ldots < j_r} x_{j_1}^{i_1} x_{j_2}^{i_2} \cdots x_{j_r}^{i_r}$$

- Let $\mathcal{M}_\pi$ base duale de $\mathbf{P}^\pi$. Réalisation polynomiale

$$\mathcal{M}_\pi = \sum_{\mathrm{park}(w)=\pi} \underline{w}$$

où $\underline{w}$ est l'image commutative ($a_i \to x_i$)

La sous-algèbre catalane III

- Exemple :

$$\mathcal{M}_{111} = \sum_i x_i^3$$

$$\mathcal{M}_{112} = \sum_i x_i^2 x_{i+1}$$

$$\mathcal{M}_{113} = \sum_{i,j;j\geq i+2} x_i^2 x_j$$

$$\mathcal{M}_{122} = \sum_{i,j;i<j} x_i x_j^2$$

$$\mathcal{M}_{123} = \sum_{i,j,k;i<j<k} x_i x_j x_k$$

La sous-algèbre catalane IV

- Formule :

$$M_I = \sum_{t(\pi)=I} \mathcal{M}_\pi.$$

$t(\pi)$ est la composition des nombres d'occurences des lettres de π of the different letters of π.

$$M_3 = \mathcal{M}_{111}, \quad M_{21} = \mathcal{M}_{112} + \mathcal{M}_{113}, \quad M_{12} = \mathcal{M}_{122}$$

- Question : interpolation avec **PBT** (autoduale) ?

Mots spéciaux et relations d'équivalence

- **Sym** : $R_I(A)$ est la somme des mots ayant le même *ensemble de descentes*
- **FQSym** : $\mathbf{G}_\sigma(A)$ est la somme des mots ayant le même *standardisé*
- **PBT** : $\mathbf{P}_T(A)$ est la somme des mots ayant le même *arbre binaire de recherche*
- **FSym** : $\mathbf{S}_{\mathbf{t}}(A)$ est la somme des mots ayant le même *tableau d'insertion*
- **WQSym** : $\mathbf{M}_u(A)$ est la somme des mots ayant le même *tassé*
- **WSym** description analogue : *monoïde stalactique*
- $\mathfrak{TD}$: $\mathbf{M}_T$ est la somme des mots ayant le même *arbre plan réduit*
- **PQSym** : fonctions de parking, algorithme de *parkisation*

Dans tous les cas, le produit est le produit ordinaire des polynômes et le coproduit $A + B$.

Algèbres commutatives sur des graphes I

- En utilisant des variables bi-indexées (bimots, bimonômes), on peut construire beaucoup d'autres algèbres
- Opérateur de quasi-symétrisation

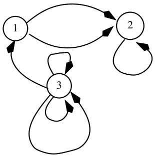
$$x^I = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_r^{i_r} \longrightarrow M_I = \sum_{k_1<k_2<\ldots<k_r} x_{k_1}^{i_1} x_{k_2}^{i_2} \cdots x_{k_r}^{i_r}$$

- Extension aux variables bi-indexées x_{ij} :

$$x^G = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{s} x_{ij}^{g_{ij}} \longrightarrow M_G = \sum_{k_1<k_2<\ldots<k_m} \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{s} x_{k_i k_j}^{g_{ij}}$$

où m est le nombre d'exposants g_{ij} non nuls.

Les momômes sont naturellement représentés par des graphes orientés étiquetés. Exemple :



encode le monôme $x_{12}^2 x_{22}^1 x_{31}^1 x_{33}^3$, et sa matrice d'adjacence est

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Le degré est le nombre d'arêtes. On doit juste interdire les sommets de degré 0.

- Les M_G forment une base d'une sous-algèbre de $K[x_{ij} | i, j \geq 1]$.

Algèbres commutatives sur des graphes III

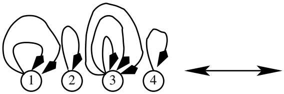
- C'est une algèbre de Hopf pour

$$\Delta M_G = \sum_{G=G'\bullet G''} M_{G'} \otimes M_{G''} \,,$$

  où $\bullet$ est la concaténation (somme directe des matrices d'adjacence),
- Sa duale est libre sur les graphes irréductibles.
- Signature : 1, 1, 3, 39, 819, 23939 ...
- Assez grande pour nombreux (quotient, sous-algèbre)
- En sommant sur les permutations des étiquettes : sous-algèbres cocommutatives

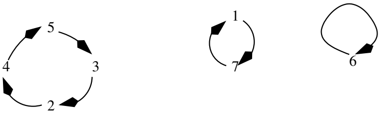
Algèbres commutatives sur des graphes IV

- **Compositions :** *QSym* est obtenue avec les graphes



Les M_G correspondants forment la base d'une sous-algèbre de Hopf isomorphe à *QSym* (aussi induit par $x_{ij} = 0$ si $i \neq j$).

- **Permutations** : réunion de cycles disjoints



σ = (2453)(17)(6)

Algèbres commutatives sur des graphes V

- Les M_σ ne forment pas une sous-algèbre (d'autres graphes peuvent apparaître dans un produit $M_\sigma M_\tau$), mais en imposant les relations

$$x_{ij}x_{ik} = 0 \ \forall\, i, j, k\,. \quad (*)$$

  on récupère une algèbre de Hopf commutative $\mathfrak{S}QSym$ sur les permutations.
- On peut aussi partir des endofonctions
- Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, soit $\mathrm{supp}(\sigma)$ la partition ensembliste dont les blocs sont les support des cycles de σ

$$\mathrm{supp}((4182)(536)(7)) = \{\{1,2,4,8\},\{3,5,6\},\{7\}\}\,.$$

Alors, les

$$U_\pi = \sum_{\mathrm{supp}(\sigma)=\pi} M_\sigma$$

forment une sous algèbre de Hopf $\Pi QSym$ de $\mathfrak{S}QSym$, isomorphe à **WSym***.

- Toute partition ensembliste π admet un représentant canonique, une composition ensembliste $\Pi = (B_1 < B_2 < \ldots < B_r)$, où l'ordre sur les blocs $B = \{i_1 < i_2 < \ldots < i_k\}$ est l'ordre lexicographique sur les mots $i_1 i_2 \cdots i_k$. On pose

$$K(\pi) = (|B_1|, \ldots, |B_r|)$$

et pour une composition I,

$$U_I = \sum_{K(\pi)=I} U_\pi \, .$$

Les U_I redonnent *QSym*. Par dualité, on trouve un épimorphisme non trivial **WSym** $\rightarrow$ **Sym**.

- Pour une partition λ, soit

$$u_\lambda = \sum_{I\downarrow=\lambda} U_I$$

Les u_λ sont une base d'une sous algèbres de Hopf isomorphe à *Sym*. Réalisation :

$$u_\lambda = p_\lambda^* = \frac{p_\lambda}{z_\lambda}$$

En termes de la matrice $X = (x_{ij})$,

$$p_n = \mathrm{tr}(X^n)$$

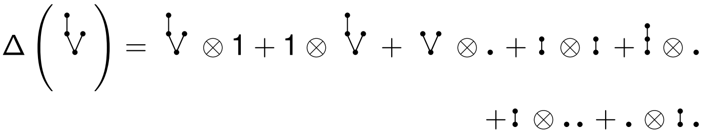
ce qui est moralement satisfaisant.

La famille Connes-Kreimer I

- Version originale : basée sur les forêts enracinées
- Pas de réalisation connue
- Produit : réunion disjointe (commutative)
- coproduit : coupes admissibles

$$\Delta(\mathcal{F}) = \sum_{\vec{v} \models V(\mathcal{F})} \mathrm{Roo}_{\vec{v}}\mathcal{F} \otimes \mathrm{Lea}_{\vec{v}}\mathcal{F}. \tag{1}$$

Par exemple



La famille Connes-Kreimer II

Généralisations :

- Forêts planes (Catalan) : C-K non commutative (Foissy)
- Isomorphe à **PBT**
- Forêts ordonnées ($(n+1)^{n-1}$) : Foissy-Unterberger
- Isomorphe à **PQSym** (non explicite !)
- Réalisation (Foissy-Novelli-T.)
- Passe à CK et NCK
- Variables a_{ij}
- La nouveauté : ordre $<$ remplacé par un autre type de relation $\prec$

La famille Connes-Kreimer III

- Forêts orientées comme fonctions acycliques, boucles sur les racines
- $\prec$-Alphabet
$$A = \{a_{ij} \mid 1 \le i \le j\}$$
avec
$$a_{ij} \prec a_{jk} \text{ pour } i \le j \text{ et } j < k\,.$$
- Un mot w est $\mathcal{F}$-compatible si quand le sommet initial d'une arête e_k est le sommet terminal de e_l, on a $w_k \prec w_l$. ($w \vdash \mathcal{F}$)

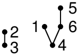
La famille Connes-Kreimer IV

- Réalisation

$$S^{\mathcal{F}}(A) = \sum_{w \vdash \mathcal{F}} w\,.$$

- Exemple

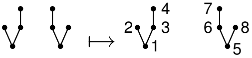
$$\mathcal{F} =$$



$$S^{\mathcal{F}} = \sum_{\substack{i_3 < i_2 \\ i_4 < i_1 \\ i_4 < i_6 < i_5}} a_{i_4 i_1} a_{i_3 i_2} a_{i_3 i_3} a_{i_4 i_4} a_{i_6 i_5} a_{i_4 i_6}\,.$$

La famille Connes-Kreimer V

- $a_{ij} \mapsto a_j$: **WQSym**
- Une forêt plane $\overline{\mathcal{F}}$ peut-être vue comme ordonnée en la parcourant en profondeur et en numérotant chaque sommet au prmier passage



- $\overline{\mathcal{F}} \mapsto S^{\mathcal{F}}$ est un plongement de NCK
- La restriction de π : $a_{ij} \mapsto a_j$ à l'image est injective : plongement de NCK dans **WQSym**
- $a_{ij} \mapsto x_{ij}$ réalise CK

La famille Connes-Kreimer VI

- Bases de type Schur : ordre naturel sur les forêts à n sommets couverture $\mathcal{F} < \mathcal{F}'$ ssi $\mathcal{F}'$ est obtenue en effaçant exactement une arête de $\mathcal{F}$

$$R_{\mathcal{F}} = \sum_{\mathcal{G} \leq \mathcal{F}} (-1)^{|E(\mathcal{F})| - |E(\mathcal{G})|} S^{\mathcal{G}}.$$

$$R_{\substack{2\\1}\ \bullet 3} = S^{\substack{2\\1}\ \bullet 3} - S^{\substack{2\ \ 3\\ \vee\\ 1}} - S^{\substack{3\\2\\1}} - S^{\substack{2\\1\\3}} . \qquad (2)$$

- Produit : sommes sans multiplicités

$$\begin{aligned} R_{\bullet 1\ \bullet 2} R_{\bullet 1} &= R_{\bullet 1\ \bullet 2\ \bullet 3} + R_{\substack{2\\1}\ \bullet 3} + R_{\bullet 1\ \substack{3\\2}} \\ &+ R_{\bullet 2\ \substack{3\\1}} + R_{\bullet 1\ \substack{2\\3}} + R_{\substack{1\ \ 2\\ \vee\\ 3}} + R_{\substack{2\\3\\1}} + R_{\substack{1\\3\\2}} . \end{aligned}$$

Conclusion

- Réalisations pas uniques
- $\prec$-alphabets : nouvelles réalisations des algèbres commutatives (endofonctions, permutations ...)
- Nouvelles bases de type Schur
- Projet : fonctions spéciales (type Hall-Littlewood/Jack/Macdonald) dans ces algèbres
- Existent pour **Sym** et *QSym* (plusieurs versions ; avec applications)
- Quelques exemples dans **FQSym** et **WQSym** (avec déformations très simples)