Réalisations polynomiales d'algèbres de Hopf combinatoires

JEAN-YVES THIBON
Résumé par VINCENT VONG

Séminaire de Combinatoire Philippe Flajolet
Institut Henri Poincaré, Séance du 27 janvier 2012

Résumé

L'idée d'utiliser des algèbres de Hopf en combinatoire n'est pas très récente, elle remonte au moins à Rota dans les années 1970. Toutefois, c'est seulement depuis une quinzaine d'années qu'on a vu apparaître de nombreux exemples nouveaux. Ces algèbres de Hopf combinatoires (AHC) sont formées de combinaisons linéaires formelles d'objets combinatoires classiques, et leurs opérations (produit et coproduit) s'expriment en termes d'algorithmes de composition ou de décomposition de tels objets. Ces exemples sont souvent reliés (par des homomorphismes) aux fonctions symétriques ou quasi-symétriques. Or, ces dernières sont définies au moyen de variables auxiliaires, et leurs opérations sont induites par le produit ordinaire des polynômes, et une opération simple de dédoublement des variables. Il est donc tentant de rechercher des variables auxiliaires permettant une description similaire des autres AHC. Lorsque cela est possible, on parle de réalisation polynomiale de l'algèbre. On obtient alors en général une simplification importante de la théorie, ainsi que de nouvelles bases qui semblent paver la voie vers une théorie des fonctions spéciales non-commutatives.

1 Les fonctions symétriques

Les fonctions symétriques sont apparues très tôt dans l'histoire des mathématiques. Elles ont largement été étudiées par de nombreux mathématiciens comme par exemple Lagrange pour la résolution d'équations polynômiales. Aujourd'hui, il existe une littérature conséquente à leurs sujets [2]. Elles apparaissent dans de nombreux domaines, a priori sans rapport : par exemple, elles interviennent en théorie des représentations, où certains changements de bases des polynômes symétriques donnent les tables des caractères des groupes symétriques et des groupes unitaires. Elles ont également une interprétation combinatoire, qui sont celles des partitions d'entiers, en effet, les bases de ces fonctions sont paramétrées par elles. Ceci ouvre un nouveau champ d'exploration pour les objets combinatoires : peut-on à l'instar des partitions, étant donné une classe combinatoire, trouver des "polynômes" en une infinité de variables qui encodent chaque objet ? Et quels sont les liens entre ce nouvel ensemble et les fonctions symétriques ?

2 Généralisation des fonctions symétriques : un pas vers un monde "Hopfien"

Commençons avec les fonctions symétriques non commutatives [1]. Pour les construire, on va partir d'un objet combinatoire bien familier : les permutations.

2.1 Algèbres des descentes

Soit σ une permutation. Une descente est un i tel que $\sigma(i) > \sigma(i+1)$. Par exemple, la permutation 52416837 a des descentes en position $1,\ 3,\ 6$. L'ensemble des descentes de σ est noté $Des(\sigma)$. Il correspond naturellement un ensemble de composition noté C, que l'on peut voir comme la suite des longueurs des mots formant la décomposition de σ en facteurs croissants[3]. On peut le visualiser sous la forme d'un ruban. Par exemple, on a :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
5 & & & & \\
\hline
2 & 4 & & & \\
\hline
 & 1 & 6 & 8 & \\
\hline
 & & & 3 & 7 \\
\hline
\end{array}$$

Dans notre cas, on a $C(\sigma) = (1, 2, 3, 2)$. Une idée est de regrouper les permutations ayant les mêmes descentes. On peut définir sur ces rubans un produit qui conserve la structure de rubans comme ceci : soient $R_1 = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ et $R_2 = (b_1, \cdots, b_l)$ deux rubans non étiquetés. On pose : $R_1 \cdot R_2 = (a_1, \cdots, a_k + b_1, b_2, \cdots, b_l) + (a_1, \cdots, a_k, b_1, \cdots, b_l)$. On peut le visualiser graphiquement comme la concaténation verticale ou horizontale de deux rubans. Ainsi, on obtient une structure d'algèbre sur les compositions.

2.2 Une réalisation polynomiale sur les compositions d'entiers

La notion de descente s'étend aisément aux mots sur un alphabet totalement ordonné. Ainsi, à une composition fixée R, on peut lui associer la somme des mots ayant comme descente cette décomposition ($\sum_{Des(w)=R} w$). On remarquera que le produit de telle somme, donne encore des combinaisons linéaires de telle somme, d'ailleurs donnée par la règle précédente ($\sum_{Des(w)=R_1} w \cdot \sum_{D(w)=R_2} w = \sum_{Des(w)\in R_1\cdot R_2} w$). Ainsi, on peut voir les compositions comme une sous-algèbre des polynômes sur un alphabet totalement ordonné infini. On en a obtenu une réalisation polynomiale.

3 Un bouquet d'exemples

Le principe est le suivant : on arrive à trouver une fonction des mots (ou bimots) sur un alphabet possédant certaine propriété (par exemple totalement ordonné) vers l'objet combinatoire qui nous intéresse. Sous des hypothèses de compatibilité de l'application, on pourra mettre des structures algébriques sur l'objet combinatoire.

3.1 Encore des permutations

3.1.1 standardisation d'un mot

Pour les permutations, la fonction sur les mots sera la standardisation. Soit A un alphabet totalement ordonné. Soit w un mot sur A de longueur n. le standardisé de w (noté $std(w)$) est la permutation de taille n qui possède exactement les même inversions que le mot w, une inversion de w étant un couple (i,j) tel que i<j, et $w_i > w_j$. Par exemple, on a :

$$std(13215598) = 14325687$$

3.1.2 Réalisation polynomiale

Soient σ et τ deux permutations. On pose :

$$G_\sigma = \sum_{std(w)=\sigma} w$$

On remarque que $G_\sigma \cdot G_\tau$ est encore une somme de G_γ, où γ décrit un sous-ensemble des permutations. Ainsi, les permutations se voient comme une sous-algèbre de l'algèbre de mots sur A.

3.2 Les fonctions de parking

3.2.1 Définition

On se place sur l'alphabet $\mathbb{N}^*$. On dit qu'un mot w est une fonction de parking si après avoir trié w, on obtient le mot v, v vérifie $v_i \leq i$ pour tout i.

3.2.2 Parkisation d'un mot

Soit w un mot sur $\mathbb{N}$. le procédé de parkization est le suivant : on trie le mot que l'on note v. Si w est de parking, on a rien à faire. Sinon, on considère le premier i tel que $v_i > i$, et on soustrait de 1 toutes les lettres v_j avec $j \geq i$. Si le nouveau mot est de parking, on remet le mot dans l'ordre de celui de w, sinon, on répète l'opération précédente. Par exemple, $w = 139457$ n'est pas de parking, appliquons l'algorithme à w : on obtient successivement 128346, 127345, et enfin 126345. On notera $Park(w)$ le parkizé de w.

3.2.3 Réalisation polynomiale

Comme précédemment sur les permutations, on peut aussi voir les fonctions de parking comme une sous-algèbre des mots sur $\mathbb{N}^*$. Dans ce cas, on considère les mots qui ont le même parkizé. On constate une forte analogie avec les fonctions quasi-symétriques.

4 Tableau de synthèse

objets combinatoires	une fonction des mots sur un objet	une réalisation polynomiale
partitions	occurences des differentes lettres	fonctions symétriques
compositions	descentes d'un mot	fonctions symétriques N.C
permutations	standardisation d'un mot	fonctions quasi-symétriques
fonctions de parking	parkization d'un mot	PQSym
arbres binaires	arbre binaire décroissant du mot	PBT

Références

[1] I. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V. S. Retakh, and J. Y. Thibon. Noncommutative symmetric functions. *Advances in mathematics*, July 1995.

[2] I. Macdonald. *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. Oxford Science Publications, 1979.

[3] J.-C. Novelli and J.-Y. Thibon. Parking functions and descent algebras. 2007.