Continuation analytique de polytopes

Michèle Vergne
Résumé par Matthieu Josuat-Vergès

Séminaire de Combinatoire Philippe Flajolet
Institut Henri Poincaré, Séance du 31 janvier 2013

Résumé

Soit $\mathfrak{p}(b)$ un polytope défini par N inéquations linéaires $\langle \mu_1, x\rangle \leq b_1$, $\langle \mu_2, x\rangle \leq b_2, \dots,$ $\langle \mu_N, x\rangle \leq b_N$. Lorsque le paramètre b varie dans un petit voisinage du paramètre initial b^0, le polytope $\mathfrak{p}(b)$ garde la même forme. En particulier, son volume $\mathrm{Vol}(b)$ est donné par une fonction polynomiale de b, lorque b est proche de la valeur b^0. Ce polynôme change lorsque b passe un mur. Varchenko a défini une "continuation analytique" $A(b)$ de $\mathfrak{p}(b)$: une réunion signée de polytopes $Q_i(b)$, de diverses dimensions. Si b est proche de b^0, $A(b) = \mathfrak{p}(b)$, mais $A(b)$ est "analytique" en b. Par exemple le volume de $A(b)$ (une somme signée de volumes) est un polynôme en b pour tout $b \in \mathbb{R}^n$. Nous avons donné une formule de saut pour $A(b)$. Cette étude est une version ensembliste de la variation en fonction du fibré en lignes L du support du module $\sum_i (-1)^i H_i(M, O(L))$ lorsque M est une variété torique. En particulier, on retrouve les formules de saut de Paradan pour le nombre de points entiers dans le polytope $\mathfrak{p}(b)$, lorsque le paramètre b passe un mur. Travail commun avec Nicole Berline.

1 Introduction

Soit $\mathfrak{p}$ un polytope dans $\mathbb{R}^n$. On peut le définir par des inégalités : $\mathfrak{p}$ est l'ensemble des vecteurs v satisfaisant

$$\langle \mu_i, v\rangle \leq b_i$$

pour $1 \leq i \leq N$, où les μ_i sont des des vecteurs, et les b_i réels. On écrit $\mathfrak{p}(b)$ pour marquer la dépendance en $b = (b_i)_{1\leq i\leq N}$, le polytope initial correspondant à une valeur b^0.

Son volume $\mathrm{Vol}(\mathfrak{p})$ est égal à un polynôme $E(b)$ dans un voisinage de b^0. Mais lorsque la structure combinatoire du polytope change, on sort a priori du domaine de polynomialité.

Plus généralement, soit Λ un réseau (on pourra supposer $\Lambda = \mathbb{Z}^n$), considérons le polynôme d'Ehrhart :

$$E_\Lambda(b) = \mathrm{Card}(\mathfrak{p} \cap \Lambda).$$

C'est un polynôme en $b_1, \dots, b_N$ lorsque le polytope est à sommets entiers (dans Λ), et un quasi-polynôme s'il est à sommets rationnels. En tant que tel, il est bien défini pour toute valeur de $b \in \mathbb{R}^N$, mais il a une interprétation naturelle uniquement lorsque b est au voisinage de b^0.

Ainsi la dépendance en b du polytope $\mathfrak{p}(b)$ a des défauts de régularité. La notion de prolongement analytique de polytope, de même que celle des fonctions réelles, revient à se demander si l'on peut définir $\mathfrak{p}(b)$ pour tout $b \in \mathbb{R}^N$ de manière régulière. Comme le polynôme volume $E(b)$ est bien défini pour tout $b \in \mathbb{R}^N$, on demande que ce soit le volume du polytope prolongé. De même pour le polynôme d'Ehrhart.

2 Prolongement analytique

Dans ce qui suit, lorsque $X \subset \mathbb{R}^n$, on note $[X]$ sa fonction indicatrice.

Définition 2.1. On appelle *prolongement analytique* du polytope $\mathfrak{p}$ une fonction $A(b)$ vérifiant :
- pour tout $b \in \mathbb{R}^N$, $A(b)$ est une fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{Z}$, de la forme $\sum c_i[P_i]$ où les P_i sont des polytopes (de dimensions variées) et $c_i \in \mathbb{Z}$,
- pour b dans un voisinage de b^0, $A(b) = [\mathfrak{p}(b)]$,
- le polynôme volume satisfait
$$E(b) = \int_{\mathbb{R}^n} A(b)(x)\mathrm{d}x$$
pour tout $b \in \mathbb{R}^N$,
- le polynôme d'Ehrhart satisfait
$$E_\Lambda(b) = \sum_{x\in\Lambda} A(b)(x)$$
pour tout $b \in \mathbb{R}^N$.

Dans la combinaison linéaire $A(b) = \sum c_i[P_i]$, les P_i sont de dimensions variées car on peut faire apparaître des polytopes semi-ouverts. Par exemple, l'intervalle $[0, b_1]$ de $\mathbb{R}$ admet un prolongement quand $b_1 < 0$, qui est l'intervalle semi-ouvert $(b_1, 0]$.

Une construction de Varchenko [4] montre l'existence d'un tel prolongement analytique. Nous présentons ci-dessous une autre construction, basée sur l'identité de Brianchon-Gram.

Nous avons besoin de la notion suivante. Soit F une face du polytope $\mathfrak{p}$, i.e. il existe $\Delta_F \subset \{1, \dots, N\}$ tel que F soit l'ensemble des v avec

$$\mu_i(v) = b_i \text{ si } i \in \Delta,$$
$$\mu_i(v) \le b_i \text{ sinon.}$$

On appelle cône tangent de $\mathfrak{p}$ en F l'ensemble :

$$T_F(\mathfrak{p}) = \{v \in \mathbb{R}^n \,:\, \mu_i(v) \le b_i \text{ pour } i \in \Delta\}.$$

En particulier, pour $\Delta = \emptyset$ (la face maximale), on obtient $\mathbb{R}^n$, et pour $\Delta = \{1, \dots, N\}$ (la face vide), on obtient $\mathfrak{p}$. Ces cônes tangents sont des polyèdres et non des polytopes (ils sont non bornés à part le cas de $\mathfrak{p}$ lui-même). On a :

Proposition 2.2 (Identité de Brianchon-Gram)**.**

$$[\mathfrak{p}] = \sum_F (-1)^{\dim F}[T_F(\mathfrak{p})],$$

où la somme porte sur les faces non-vides de $\mathfrak{p}$*.*

(Remarquons que comme $\mathfrak{p} = T_\emptyset(\mathfrak{p})$, et $\dim \emptyset = -1$, cette égalité peut aussi s'écrire $0 = \sum_F (-1)^{\dim F}[T_F(\mathfrak{p})]$ où la somme porte sur toutes les faces.)

Ce résultat permet de donner une continuation analytique du polytope, car la dépendance en b des cônes tangents est régulière. On définit, pour tout $b \in \mathbb{R}^N$:

$$\mathrm{Cone}(\Delta_F, b) = \{v \in \mathbb{R}^n \,:\, \mu_i(v) \le b_i \text{ pour } i \in \Delta_F\}.$$

Clairement, $\mathrm{Cone}(\Delta_F, b) = T_F(\mathfrak{p}(b))$ lorsque b est dans un voisinage de b^0.

Théorème 2.3. *La fonction*

$$A(b) = \sum_F (-1)^{\dim F} [\mathrm{Cone}(\Delta_F, b)]$$

où la somme porte sur les faces non-vides de $\mathfrak{p}$, est un prolongement analytique de $\mathfrak{p}(b)$.

Par l'identité de Brianchon-Gram, $A(b) = [\mathfrak{p}(b)]$ lorsque b est au voisinage de la valeur b^0. Les autres points ne sont pas évidents. Par exemple, bien que chacun des cônes soit non borné, une simplification a lieu de sorte que pour tout b, $A(b)$ est à support borné.

Mentionnons sans donner de détails la formule de Brion, qui permet de prouver

$$E_\Lambda(b) = \sum_{x \in \Lambda} A(b)(x)$$

à partir de notre définition de $A(b)$. C'est une formule qui donne la série génératrice des points entiers du polytope $\mathfrak{p}$ comme la somme des séries des points entiers des cônes tangents. Comme pour l'identité de Brianchon-Gram, il y a une simplification : chacun des cônes tangents donne une série rationnelle, mais la somme est un polynôme.

3 La formule des sauts

On se demande quand le paramètre b sort du domaine où $A(p) = [\mathfrak{p}(b)]$, et quel est alors la différence entre les deux quantités.

On peut construire une famille $\mathcal{H}$ d'hyperplans qui a la propriété suivante. On appelle chambre une composante connexe de $\mathbb{R}^n \backslash \cup \mathcal{H}$. Alors dans chacune des chambres, la combinatoire de $A(b)$ ne change pas, i.e. on peut écrire $A(b) = \sum_i c_i [Q_i(b)]$ où les c_i sont fixés et la combinatoire de chaque polytope $Q_i(b)$ ne change pas.

Explicitement, $\mathcal{H}$ contient un hyperplan H_C pour chaque famille $C \subset \{1, \ldots, N\}$ telle que $\mathrm{Card}(C) = n + 1$, et les μ_i pour $i \in C$ engendrent $\mathbb{R}^n$. L'hyperplan H_C est l'ensemble des b tels que

$$\sum_{i \in C} c_i b_i = 0,$$

où les c_i (non tous nuls) sont tels que $\sum_{i \in C} c_i \mu_i = 0$. On peut comprendre cette définition de la façon suivante : pour b générique, les $n + 1$ hyperplans d'équation $\langle \mu_i, x \rangle = b$, $i \in C$ ont une intersection vide, b est dans H_C lorsque l'intersection contient un point.

Soit τ_0 la chambre contenant la valeur initiale b^0. Il existe une formule des sauts pour décrire la différence entre $\mathfrak{p}(b)$ et sa continuation analytique $A(b)$ lorsque b est dans une chambre donnée τ_1 voisine de τ_0. Les chambres τ_0 et τ_1 sont séparées par un hyperplan H_C bien défini d'équation $\sum_{i \in C} c_i b_i$, comme ci-dessus. Les coefficients c_i étant uniques à une constante près, on peut les choisir tels que

$$\sum_{i \in C} c_i b_i^0 > 0$$

où $b^0 = (b_i^0)_{1 \le i \le N}$. Soit $\mathfrak{p}(Flip; b)$ l'ensemble des v satisfaisant

$$\begin{cases} \langle \mu_i, v \rangle > b_i & \text{si } c_j > 0, \\ \langle \mu_i, v \rangle \le b_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors :

Théorème 3.1 (Formule des sauts)**.** *Si b est dans une chambre τ_1 voisine de τ_0, on a :*

$$A(b) = [\mathfrak{p}(b)] - (-1)^{|\mathrm{Flip}|} [\mathfrak{p}(Flip; b)].$$

4 Variétés toriques

À un polytope $\mathfrak{p}$ à sommets rationnels on peut associer une variété torique M, munie d'un fibré en droites $\mathcal{L}$ ample et équivariant pour l'action du tore [2]. Dans le cas du polytope $\mathfrak{p}(b)$ qui varie avec b, la variété torique est fixée et seul le fibré $\mathcal{L}_b$ varie.

Dans ce contexte, le polynôme d'Ehrhart a une interprétation en termes de cohomologie, en particulier le nombre de points entiers du polytope est la dimension de l'espace $H^0(M, \mathcal{L}_b)$ des sections holomorphes du fibré.

La formule des sauts présentée ci-dessus a d'abord été obtenue dans ce contexte géométrique par Paradan [3].

Références

[1] N. Berline et M. Vergne. Analytic continuation of a parametric polytope and wall-crossing. In Configuration Spaces Geometry, Combinatorics and Topology Publications of the Scuola Normale Superiore, Vol. 14. (2013).

[2] W. Fulton. *Introduction to toric varieties*, Annals of Math. Studies. 131, Princeton University Press, 1993.

[3] P.-E. Paradan. Wall-crossing formulas in Hamiltonian geometry. Progress in Mathematic 292, (2011), 295–344

[4] A. N. Varchenko. Combinatorics and topology of the arrangement of affine hyperplanes in the real space. Functional Anal. Appl. 21, no. 1 (1987), 9–19 ; Russian original publ. Funktsional. Anal. i Prilozhen. 21 (1987), no. 1, p.11–22.