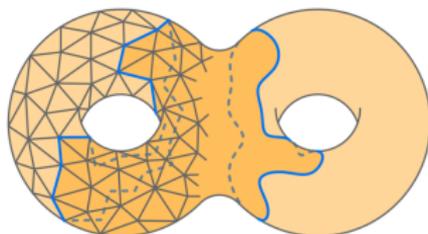


# Allers-retours entre les graphes plongés et la géométrie des surfaces

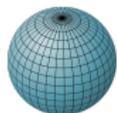
Arnaud de Mesmay  
CNRS, Gipsa-lab, Université Grenoble Alpes



Basé sur des travaux réalisés avec E. Chambers, G. Chambers, É. Colin de Verdière, A. Hubard, F. Lazarus, T. Ophelders et R. Rotman.

# Graphes plongés et surfaces

On s'intéresse dans cet exposé à des *surfaces* connexes, compactes, orientables, qui sont classifiées par leur *genre*, c'est-à-dire leur nombre de trous.

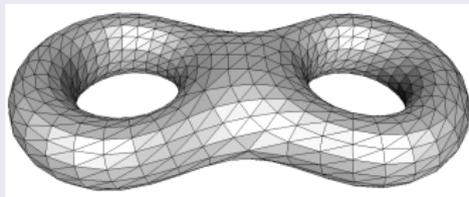


=



## Graphes plongés

Un graphe  $G$  est *plongé* sur une surface  $S$  si il est dessiné sans croisements sur  $S$ .

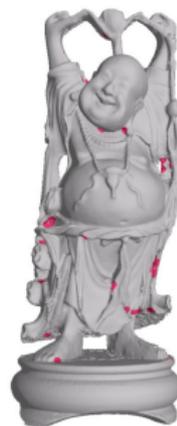
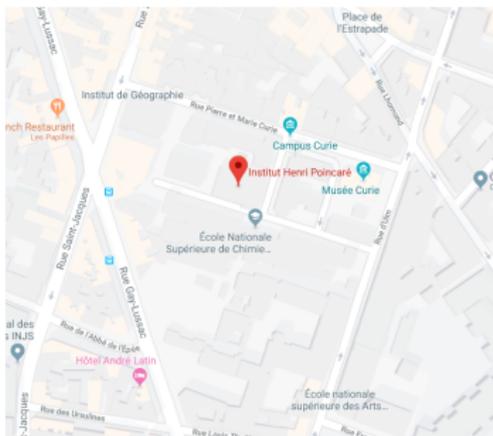


Il est *triangulé* si toutes les faces ont degré 3.

# Pourquoi s'intéresser à des graphes plongés ?

Deux (parmi d'autres) raisons d'étudier les graphes plongés :

- Ils apparaissent en pratique (réseaux routiers, infographie, CAO...)

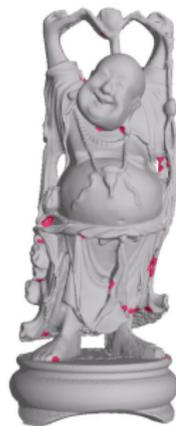


- Tout graphe est plongé sur une certaine surface.  
→ Point de vue très fécond en théorie des graphes, par exemple pour la **théorie des mineurs de graphes** de Robertson-Seymour.

# Pourquoi s'intéresser à des graphes plongés ?

Deux (parmi d'autres) raisons d'étudier les graphes plongés :

- Ils apparaissent en pratique (réseaux routiers, infographie, CAO...)

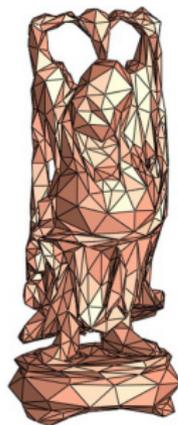


- Tout graphe est plongé sur une certaine surface.  
→ Point de vue très fécond en théorie des graphes, par exemple pour la *théorie des mineurs de graphes* de Robertson-Seymour.

# Pourquoi s'intéresser à des graphes plongés ?

Deux (parmi d'autres) raisons d'étudier les graphes plongés :

- Ils apparaissent en pratique (réseaux routiers, infographie, CAO...)

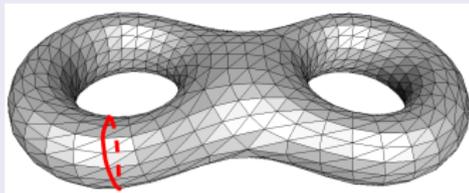


- Tout graphe est plongé sur une certaine surface.  
→ Point de vue très fécond en théorie des graphes, par exemple pour la *théorie des mineurs de graphes* de Robertson-Seymour.

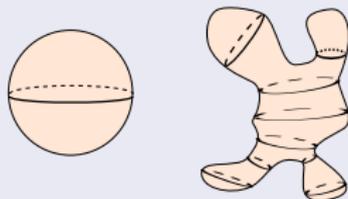
# Un point de vue géométrique

- Un graphe plongé fournit une **métrique discrète** pour mesurer la longueur de certaines courbes.
- On obtient une **métrique continue** en plongeant la surface dans  $\mathbb{R}^3$  et en mesurant les longueurs.

## Métrique discrète



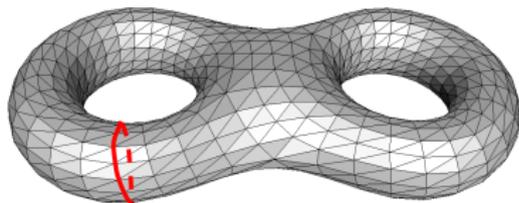
## Métrique continue



Point de vue intrinsèque  $\Rightarrow$   
métrique riemannienne.

**Objectif de cet exposé :** Montrer qu'il y a des interactions très fortes entre l'étude des graphes plongés et des métriques continues.

- 1 Plus courtes courbes : systoles et *edge-width*



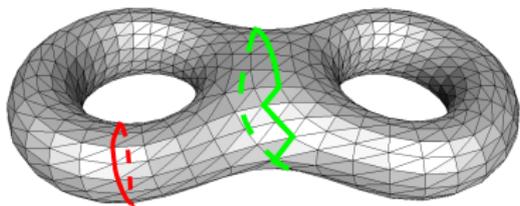
- 2 Hauteur d'homotopie et recherche dans un graphe planaire



- 3 Balayages et décompositions arborescentes

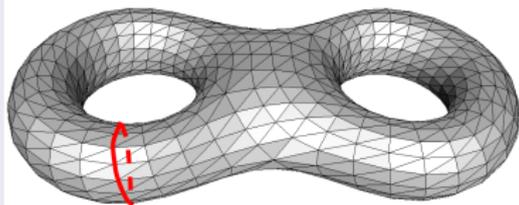


*Première partie :*  
*Plus courtes courbes : systoles et edge-width*

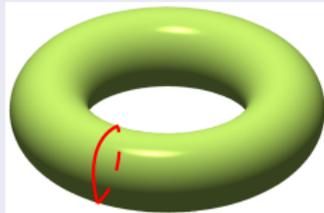


# Plus courte courbe non-contractile

Cadre discret



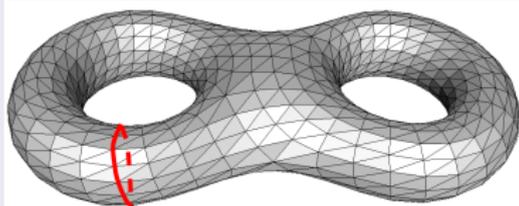
Cadre continu



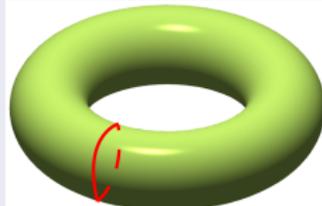
Quelle est la longueur de la plus courte courbe non-contractile ?

# Plus courte courbe non-contractible

Cadre discret

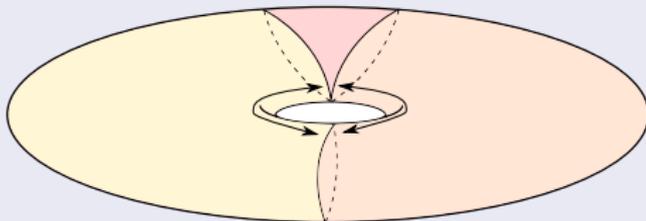


Cadre continu



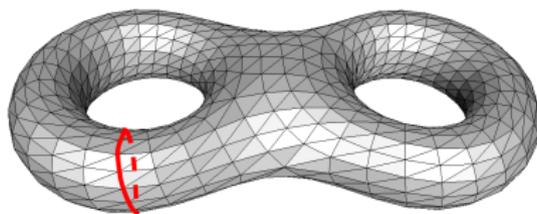
Quelle est la longueur de la plus courte courbe non-contractible ?

Intuition



Elle devrait avoir longueur  $O(\sqrt{A})$  ou  $O(\sqrt{n})$ , mais comment est-ce que le  $O()$  dépend de  $g$  ?

La *edge-width* d'un graphe plongé est la longueur du plus court cycle *non contractile*.

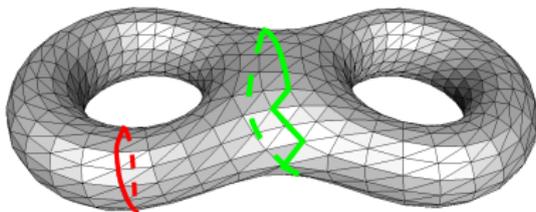


## Théorème (Hutchinson '88)

La *edge-width* d'un graphe plongé triangulé avec  $n$  triangles sur une surface de genre  $g$  est  $O(\sqrt{n/g \log g})$ .

- Hutchinson conjecturait que la bonne borne était  $\Theta(\sqrt{n/g})$ .
- Conjecture cassée par Przytycka et Przytycki '90-97 qui ont obtenu des bornes inférieures en  $\Omega(\sqrt{n/g} \sqrt{\log g})$ , et conjecturé  $\Theta(\sqrt{n/g} \log g)$ .
- Quid des courbes non-séparatrices, ou non-contractiles et homologiquement triviales ?

La *edge-width* d'un graphe plongé est la longueur du plus court cycle *non contractile*.

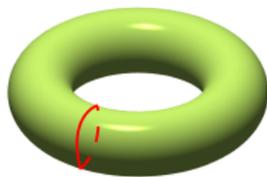


## Théorème (Hutchinson '88)

La *edge-width* d'un graphe plongé triangulé avec  $n$  triangles sur une surface de genre  $g$  est  $O(\sqrt{n/g} \log g)$ .

- Hutchinson conjecturait que la bonne borne était  $\Theta(\sqrt{n/g})$ .
- Conjecture cassée par Przytycka et Przytycki '90-97 qui ont obtenu des bornes inférieures en  $\Omega(\sqrt{n/g} \sqrt{\log g})$ , et conjecturé  $\Theta(\sqrt{n/g} \log g)$ .
- Quid des courbes non-séparatrices, ou non-contractiles et homologiquement triviales ?

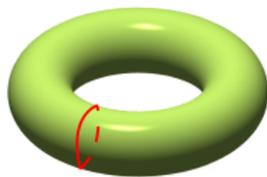
La **systole** d'une surface riemannienne est la longueur du plus court cycle **noncontractile**.



**Théorème (Gromov '83, Katz and Sabourau '04)**

*La systole d'une surface riemannienne de genre  $g$  et d'aire  $A$  est  $O(\sqrt{A/g} \log g)$ .*

La **systole** d'une surface riemannienne est la longueur du plus court cycle **noncontractile**.

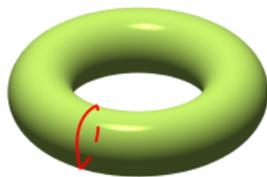


**Théorème (Gromov '83, Katz and Sabourau '04)**

La systole d'une surface riemannienne de genre  $g$  et d'aire  $A$  est  $O(\sqrt{A/g} \log g)$ .

- Variantes connues pour les courbes non-séparatrices et les courbes non-contractiles homologiquement triviales [Sabourau '08].
- Buser et Sarnak '94 ont utilisé des **surfaces arithmétiques** pour obtenir une borne inférieure  $\Omega(\sqrt{A/g} \log g)$ .

La *systole* d'une surface riemannienne est la longueur du plus court cycle *noncontractile*.



**Théorème (Gromov '83, Katz and Sabourau '04)**

La systole d'une surface riemannienne de genre  $g$  et d'aire  $A$  est  $O(\sqrt{A/g} \log g)$ .

- Variantes connues pour les courbes non-séparatrices et les courbes non-contractiles homologiquement triviales [Sabourau '08].
- Buser et Sarnak '94 ont utilisé des *surfaces arithmétiques* pour obtenir une borne inférieure  $\Omega(\sqrt{A/g} \log g)$ .
- Larry Guth : "Arithmetic hyperbolic surfaces are remarkably hard to picture."

Comment passer d'une métrique **discrète** à une métrique **continue** ?

## Démonstration.

- Coller des **triangles équilatéraux d'aire 1** sur les **triangles**.
- Lisser la métrique.



- Dans le pire des case, les longueurs doublent.



## Théorème (Colin de Verdière, Hubbard, de Mesmay '14)

Soit  $(S, G)$  une surface **triangulée** de genre  $g$ , avec  $n$  triangles. Il existe une métrique **riemannienne**  $m$  sur  $S$  d'aire  $n$  telle que pour chaque courbe fermée  $\gamma$  de  $(S, m)$  il existe un cycle  $\gamma'$  sur  $(S, G)$  avec

$$|\gamma'|_G \leq (1 + \delta) \sqrt[4]{3} |\gamma|_m \quad \text{pour un } \delta \text{ arbitrairement petit.}$$

Comment passer d'une métrique **discrète** à une métrique **continue** ?

## Démonstration.

- Coller des **triangles équilatéraux** d'aire 1 sur les **triangles**.
- Lisser la métrique.



- Dans le pire des case, les longueurs doublent. □

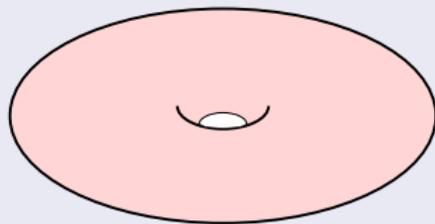
## Corollaire

Soit  $(S, G)$  une surface triangulée de genre  $g$  avec  $n$  triangles, alors il existe un cycle non-contractile/non séparateur/non-contractile homologiquement trivial de taille  $O(\sqrt{n/g} \log g)$ .

Donc **Gromov**  $\Rightarrow$  **Hutchinson** et cela fournit des cas plus restreints et améliore la meilleure constante connue.

Comment passer d'une métrique **continue** à une métrique **discrète** ?

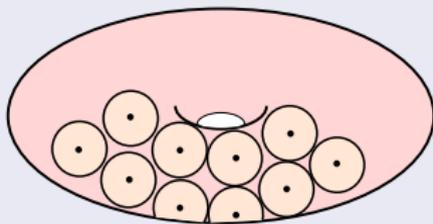
Démonstration.



Comment passer d'une métrique **continue** à une métrique **discrète** ?

Démonstration.

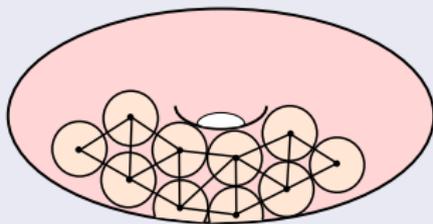
Prendre une famille maximale de boules disjointes de rayon  $\varepsilon$  et la perturber un peu.



Comment passer d'une métrique **continue** à une métrique **discrète** ?

Démonstration.

Prendre une famille maximale de boules disjointes de rayon  $\epsilon$  et la perturber un peu.



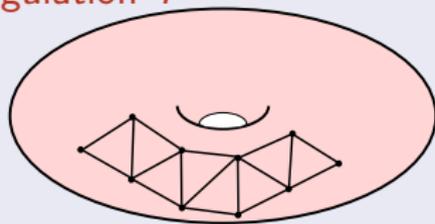
Par [Dyer, Zhang and Möller '08], le graphe de Delaunay est une **triangulation** pour  $\epsilon$  assez petit



Comment passer d'une métrique **continue** à une métrique **discrète** ?

Démonstration.

Prendre une famille maximale de boules disjointes de rayon  $\varepsilon$  et la perturber un peu.  $\Rightarrow$  **Triangulation  $T$**



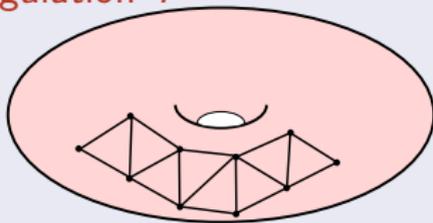
Par [Dyer, Zhang and Möller '08], le graphe de Delaunay est une **triangulation** pour  $\varepsilon$  assez petit



Comment passer d'une métrique **continue** à une métrique **discrète** ?

Démonstration.

Prendre une famille maximale de boules disjointes de rayon  $\varepsilon$  et la perturber un peu.  $\Rightarrow$  Triangulation  $T$



Par [Dyer, Zhang and Möller '08], le graphe de Delaunay est une **triangulation** pour  $\varepsilon$  assez petit

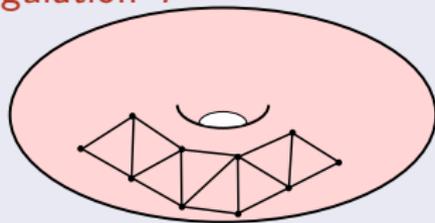
$$|\gamma|_m \leq 4\varepsilon |\gamma|_G.$$



Comment passer d'une métrique **continue** à une métrique **discrète** ?

Démonstration.

Prendre une famille maximale de boules disjointes de rayon  $\varepsilon$  et la perturber un peu.  $\Rightarrow$  Triangulation  $T$



Par [Dyer, Zhang and Möller '08], le graphe de Delaunay est une **triangulation** pour  $\varepsilon$  assez petit

$$|\gamma|_m \leq 4\varepsilon |\gamma|_G.$$

Chaque boule a rayon  $\pi\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$ , et donc  $\varepsilon = O(\sqrt{A/n})$ .



## Théorème (Colin de Verdière, Hubbard, de Mesmay '14)

Soit  $(S, m)$  une surface riemannienne de genre  $g$  et d'aire  $A$ . Il existe un graphe triangulé  $G$  plongé sur  $S$  avec  $n$  triangles, tel que chaque courbe fermée  $\gamma$  dans  $(S, G)$  satisfait

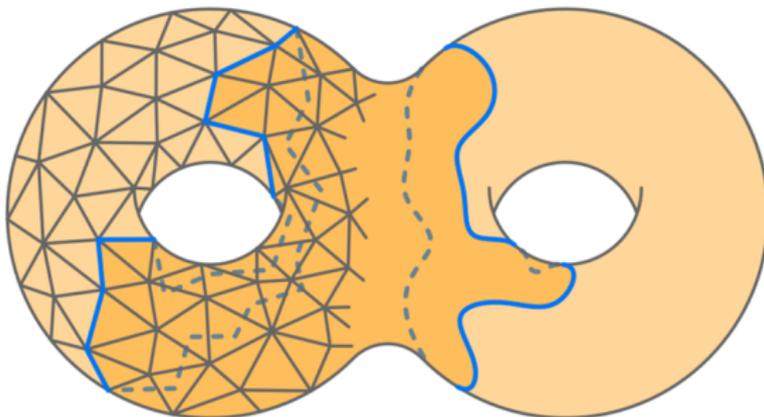
$$|\gamma|_m \leq (1 + \delta) \sqrt{\frac{32}{\pi}} \sqrt{A/n} |\gamma|_G \quad \text{pour un } \delta \text{ arbitrairement petit.}$$

- Cela montre que Hutchinson  $\Rightarrow$  Gromov.
- Prouve la conjecture de Przytycka et Przytycki :

## Corollaire

Il existe  $g$  et  $n$  arbitrairement grands et une surface triangulée de genre  $g$ , avec  $n$  triangles, d'edgewidth au moins  $\frac{1-\delta}{6} \sqrt{n/g} \log g$  pour un  $\delta$  arbitrairement petit.

*Deuxième partie :  
Recherche dans un graphe et homotopies*

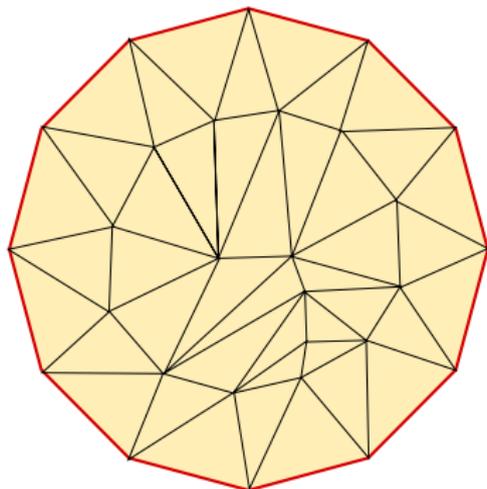


# Un problème de recherche dans un graphe planaire

- Des policiers se tiennent la main et souhaitent capturer un fugitif dans un graphe planaire.  
→ Mouvements autorisés : suite de *pointes* et de *flips*.



- Combien de policiers (= longueur de la courbe) faut-il ?

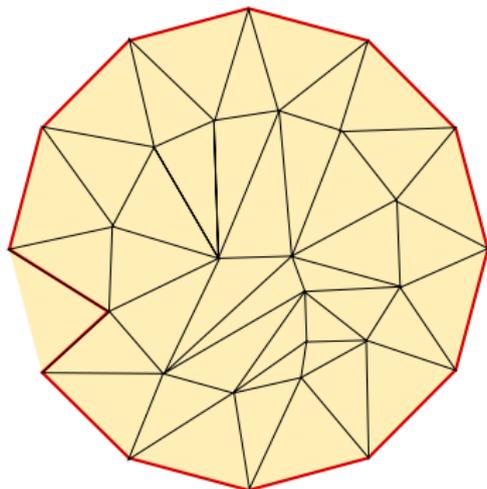


# Un problème de recherche dans un graphe planaire

- Des policiers se tiennent la main et souhaitent capturer un fugitif dans un graphe planaire.  
→ Mouvements autorisés : suite de *pointes* et de *flips*.



- Combien de policiers (= longueur de la courbe) faut-il ?

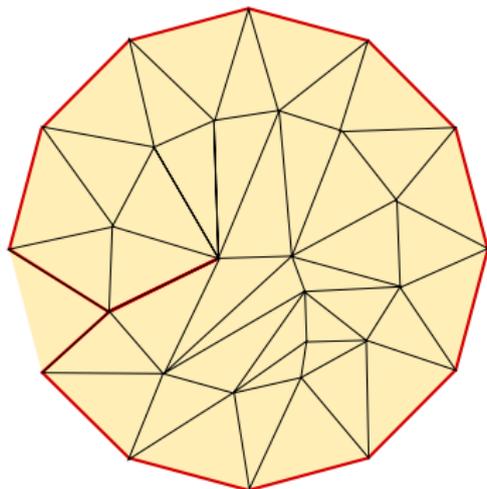


# Un problème de recherche dans un graphe planaire

- Des policiers se tiennent la main et souhaitent capturer un fugitif dans un graphe planaire.  
→ Mouvements autorisés : suite de *pointes* et de *flips*.



- Combien de policiers (= longueur de la courbe) faut-il ?

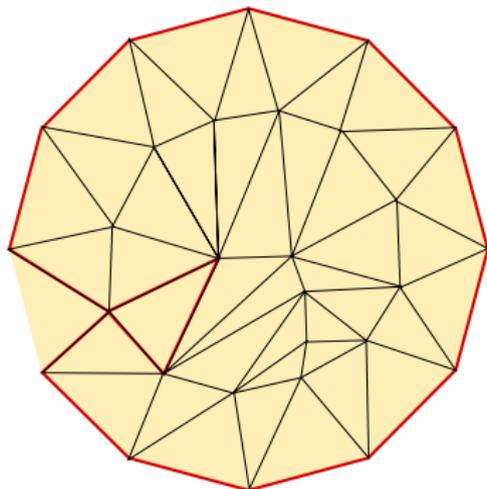


# Un problème de recherche dans un graphe planaire

- Des policiers se tiennent la main et souhaitent capturer un fugitif dans un graphe planaire.  
→ Mouvements autorisés : suite de *pointes* et de *flips*.



- Combien de policiers (= longueur de la courbe) faut-il ?

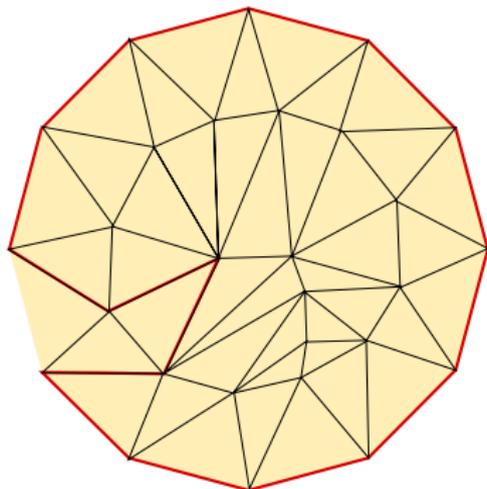


# Un problème de recherche dans un graphe planaire

- Des policiers se tiennent la main et souhaitent capturer un fugitif dans un graphe planaire.  
→ Mouvements autorisés : suite de *pointes* et de *flips*.



- Combien de policiers (= longueur de la courbe) faut-il ?

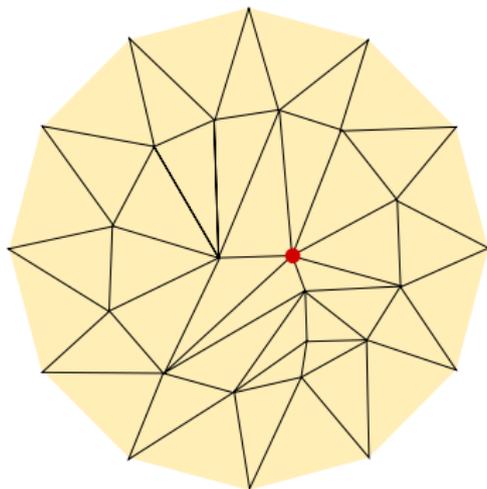


# Un problème de recherche dans un graphe planaire

- Des policiers se tiennent la main et souhaitent capturer un fugitif dans un graphe planaire.  
→ Mouvements autorisés : suite de *pointes* et de *flips*.



- Combien de policiers (= longueur de la courbe) faut-il ?



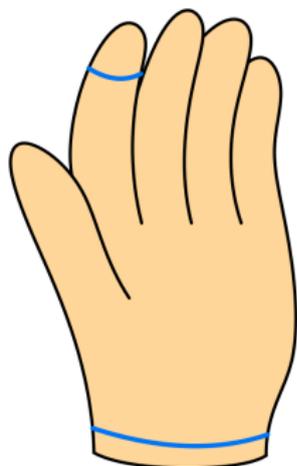
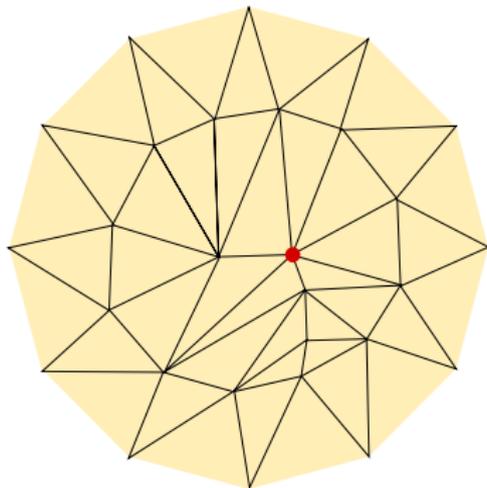
# Un problème de recherche dans un graphe planaire

- Des policiers se tiennent la main et souhaitent capturer un fugitif dans un graphe planaire.

→ Mouvements autorisés : suite de *pointes* et de *flips*.



- Combien de policiers (= longueur de la courbe) faut-il ?
- Alternativement, puis-je faire passer un élastique de longueur fixée autour de mon poignet ?



# Hauteur d'homotopie

- Une **homotopie discrète** est une suite de cycles reliés par des pointes ou des flips.

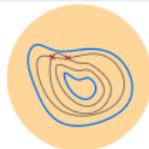


- Une **homotopie optimale** est une homotopie minimisant la longueur maximale des courbes intermédiaires (=la **hauteur d'homotopie**).

Comment calculer une homotopie optimale ?

Questions (E.Chambers-Letscher '09)

- Existe-t-il une homotopie optimale où les cycles intermédiaires ne s'auto-intersectent pas ? (**isotopie**)
- Existe-t-il une homotopie optimale où deux cycles intermédiaires ne s'intersectent pas ? (**monotonie**)



**Homotopie continue** : Application continue  $h$  entre deux courbes.

**Théorème** ([G. Chambers, Liokumovich '14])

Soit  $D$  un disque riemannien, de bord  $\gamma$ . Si il existe une homotopie de hauteur  $L$  de  $\gamma$  vers un point, il existe une isotopie de hauteur  $L + \varepsilon$  de  $\gamma$  vers un point, pour tout  $\varepsilon > 0$ .

- La preuve s'applique verbatim dans le cadre discret.
- Le  $\varepsilon$  vient de petites perturbations qui n'y sont pas nécessaires.

La preuve très élégante analyse toutes les **résolutions** des courbes intermédiaires.



## Théorème ([G. Chambers, Rotman '14])

*Soit  $D$  un disque riemannien, de bord  $\gamma$ . Si il existe une homotopie de hauteur  $L$  de  $\gamma$  vers un point, il existe une isotopie monotone de hauteur  $L + \varepsilon$  de  $\gamma$  vers un point, pour tout  $\varepsilon > 0$ .*

## Théorème ([G. Chambers, Rotman '14])

Soit  $D$  un disque riemannien, de bord  $\gamma$ . Si il existe une homotopie de hauteur  $L$  de  $\gamma$  vers un point, il existe une isotopie monotone de hauteur  $L + \varepsilon$  de  $\gamma$  vers un point, pour tout  $\varepsilon > 0$ .

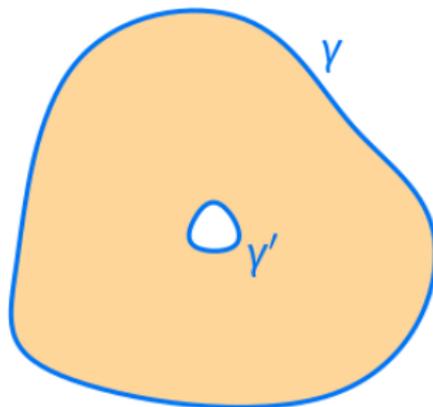
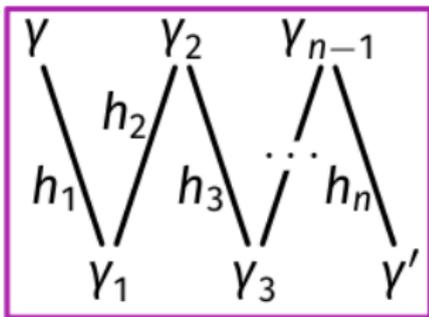
Théorème ([G. Chambers, Rotman '14][E. Chambers, G. Chambers, de Mesmay, Ophelders, Rotman '18])

*Soit  $D$  un disque riemannien, de bord  $\gamma$ . Si il existe une homotopie de hauteur  $L$  de  $\gamma$  vers un point, il existe une isotopie monotone de hauteur  $L + \varepsilon$  de  $\gamma$  vers un point, pour tout  $\varepsilon > 0$ .*

# Monotonie ?

Théorème ([G. Chambers, Rotman '14][E. Chambers, G. Chambers, de Mesmay, Ophelders, Rotman '18])

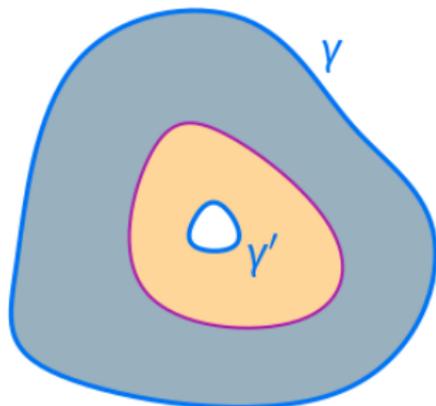
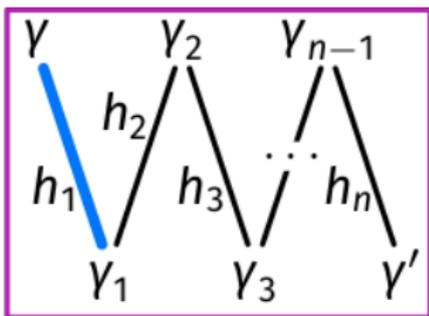
Soit  $D$  un disque riemannien, de bord  $\gamma$ . Si il existe une homotopie de hauteur  $L$  de  $\gamma$  vers un point, il existe une isotopie monotone de hauteur  $L + \varepsilon$  de  $\gamma$  vers un point, pour tout  $\varepsilon > 0$ .



# Monotonie ?

Théorème ([G. Chambers, Rotman '14][E. Chambers, G. Chambers, de Mesmay, Ophelders, Rotman '18])

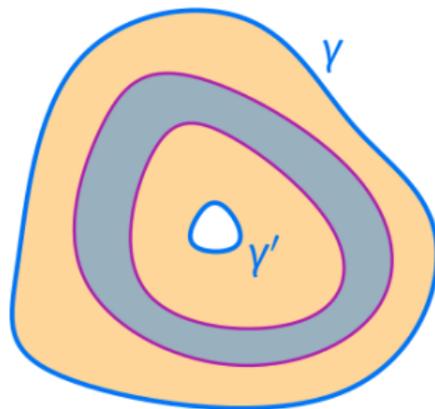
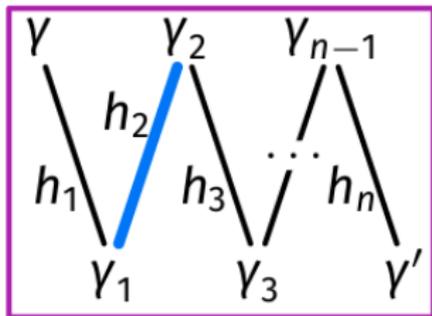
Soit  $D$  un disque riemannien, de bord  $\gamma$ . Si il existe une homotopie de hauteur  $L$  de  $\gamma$  vers un point, il existe une isotopie monotone de hauteur  $L + \varepsilon$  de  $\gamma$  vers un point, pour tout  $\varepsilon > 0$ .



# Monotonie ?

Théorème ([G. Chambers, Rotman '14][E. Chambers, G. Chambers, de Mesmay, Ophelders, Rotman '18])

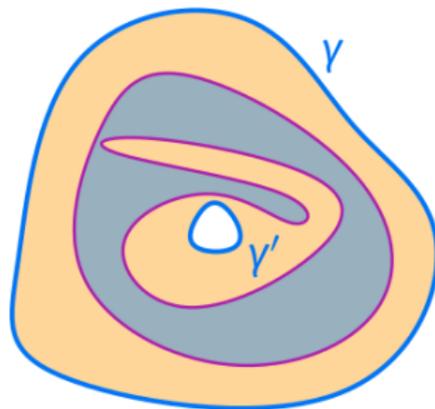
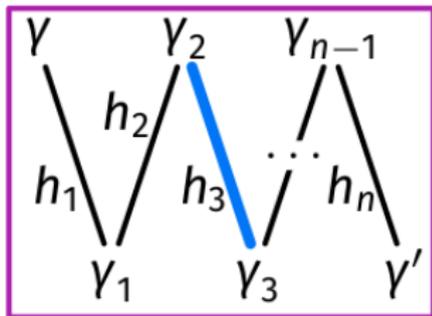
Soit  $D$  un disque riemannien, de bord  $\gamma$ . Si il existe une homotopie de hauteur  $L$  de  $\gamma$  vers un point, il existe une isotopie monotone de hauteur  $L + \varepsilon$  de  $\gamma$  vers un point, pour tout  $\varepsilon > 0$ .



# Monotonie ?

Théorème ([G. Chambers, Rotman '14][E. Chambers, G. Chambers, de Mesmay, Ophelders, Rotman '18])

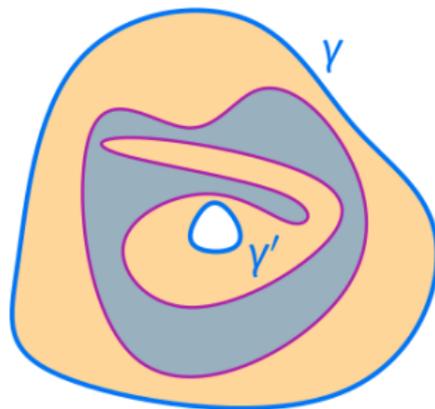
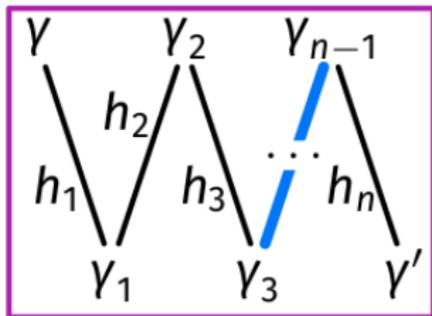
Soit  $D$  un disque riemannien, de bord  $\gamma$ . Si il existe une homotopie de hauteur  $L$  de  $\gamma$  vers un point, il existe une isotopie monotone de hauteur  $L + \varepsilon$  de  $\gamma$  vers un point, pour tout  $\varepsilon > 0$ .



# Monotonie ?

Théorème ([G. Chambers, Rotman '14][E. Chambers, G. Chambers, de Mesmay, Ophelders, Rotman '18])

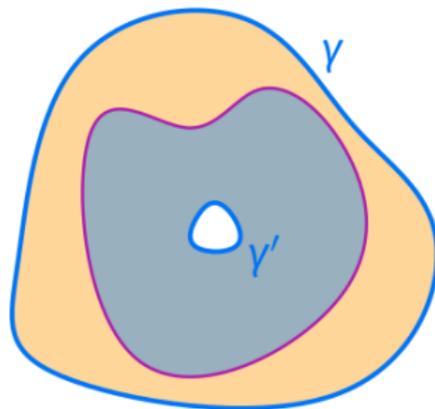
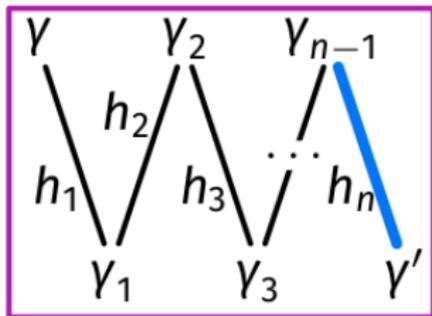
Soit  $D$  un disque riemannien, de bord  $\gamma$ . Si il existe une homotopie de hauteur  $L$  de  $\gamma$  vers un point, il existe une isotopie monotone de hauteur  $L + \varepsilon$  de  $\gamma$  vers un point, pour tout  $\varepsilon > 0$ .



# Monotonie ?

Théorème ([G. Chambers, Rotman '14][E. Chambers, G. Chambers, de Mesmay, Ophelders, Rotman '18])

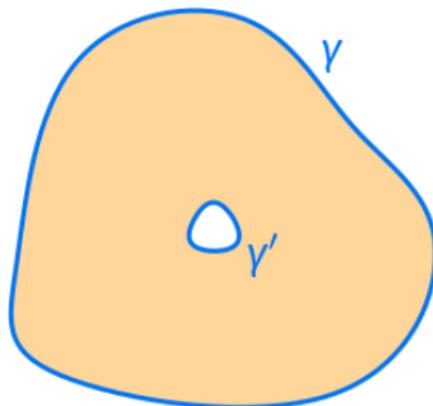
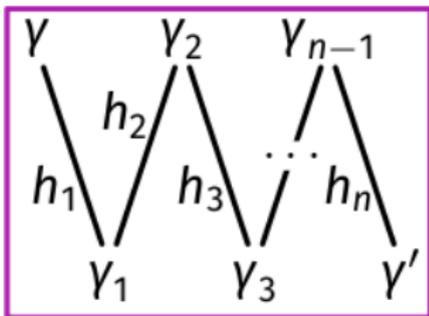
Soit  $D$  un disque riemannien, de bord  $\gamma$ . Si il existe une homotopie de hauteur  $L$  de  $\gamma$  vers un point, il existe une isotopie monotone de hauteur  $L + \varepsilon$  de  $\gamma$  vers un point, pour tout  $\varepsilon > 0$ .



# Monotonie ?

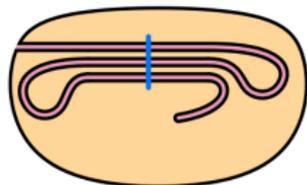
Théorème ([G. Chambers, Rotman '14][E. Chambers, G. Chambers, de Mesmay, Ophelders, Rotman '18])

Soit  $D$  un disque riemannien, de bord  $\gamma$ . Si il existe une homotopie de hauteur  $L$  de  $\gamma$  vers un point, il existe une isotopie monotone de hauteur  $L + \varepsilon$  de  $\gamma$  vers un point, pour tout  $\varepsilon > 0$ .



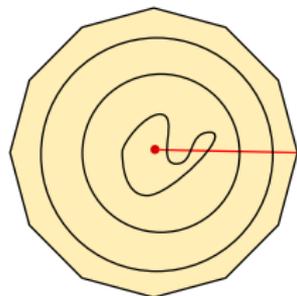
Théorème ([E. Chambers, de Mesmay, Ophelders '18])

Tester si un disque a hauteur d'homotopie au plus  $k$  est dans **NP**.



Lemme

Il existe  $h$  une contraction monotone optimale d'un cycle  $\gamma$  vers un point  $p$ , telle chaque courbe intermédiaire  $h(t)$  couple le plus court chemin entre  $\gamma$  et  $p$  exactement une fois.

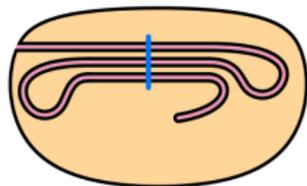


Théorème ([E. Chambers, de Mesmay, Ophelders '18])

On peut calculer une  $O(\log n)$  approximation de la hauteur d'homotopie en temps polynomial.

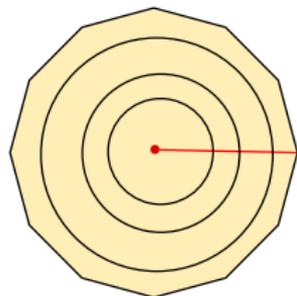
Théorème ([E. Chambers, de Mesmay, Ophelders '18])

Tester si un disque a hauteur d'homotopie au plus  $k$  est dans **NP**.



Lemme

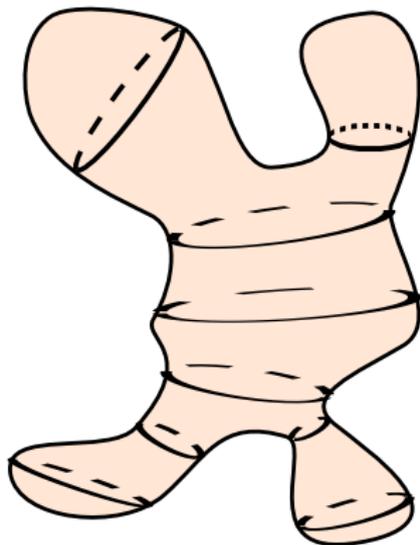
Il existe  $h$  une contraction monotone optimale d'un cycle  $\gamma$  vers un point  $p$ , telle chaque courbe intermédiaire  $h(t)$  couple le plus court chemin entre  $\gamma$  et  $p$  exactement une fois.



Théorème ([E. Chambers, de Mesmay, Ophelders '18])

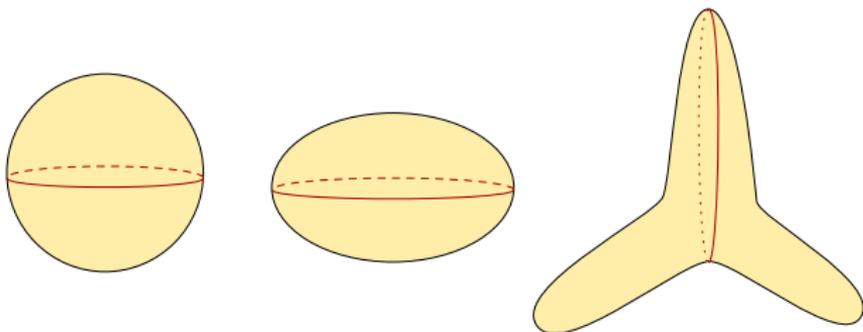
On peut calculer une  $O(\log n)$  approximation de la hauteur d'homotopie en temps polynomial.

*Troisième partie :*  
*Géodésiques, balayages et décompositions de graphes*



- Sur une sphère, il n'y a pas de systole...
- ... mais il y a quand même des *géodésiques*, c'est-à-dire des courbes qui sont *localement* les plus courtes.

- Sur une sphère, il n'y a pas de systole...
- ... mais il y a quand même des **géodésiques**, c'est-à-dire des courbes qui sont **localement** les plus courtes.

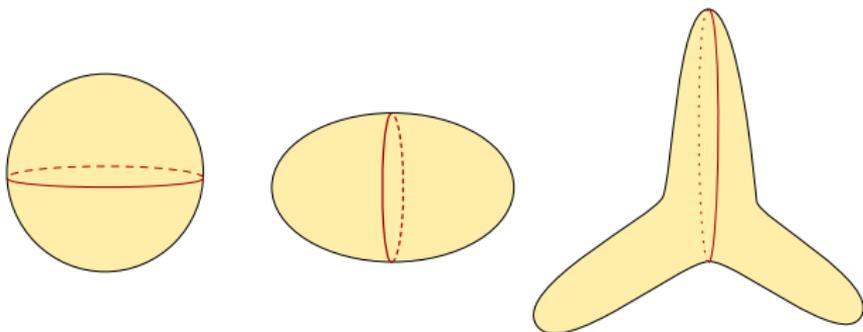


## Théorème (Rotman '06)

*La plus courte géodésique fermée sur une sphère riemannienne a longueur au plus  $4\sqrt{2}\sqrt{A}$ .*

- Quiz : Quel objet sur les graphes planaires a longueur au plus  $2\sqrt{2}\sqrt{n}$ ?

- Sur une sphère, il n'y a pas de systole...
- ... mais il y a quand même des **géodésiques**, c'est-à-dire des courbes qui sont **localement** les plus courtes.

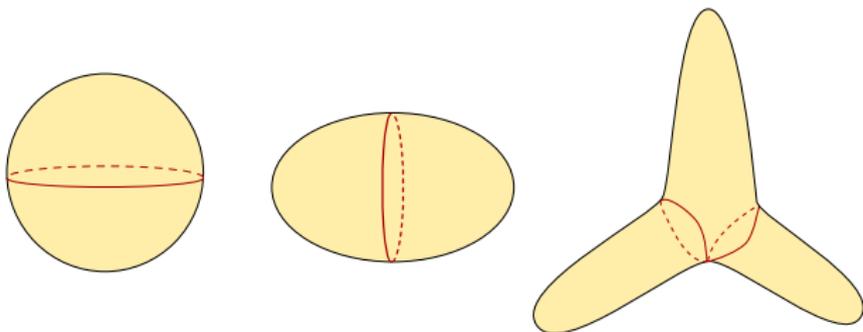


## Théorème (Rotman '06)

*La plus courte géodésique fermée sur une sphère riemannienne a longueur au plus  $4\sqrt{2}\sqrt{A}$ .*

- Quiz : Quel objet sur les graphes planaires a longueur au plus  $2\sqrt{2}\sqrt{n}$ ?

- Sur une sphère, il n'y a pas de systole...
- ... mais il y a quand même des **géodésiques**, c'est-à-dire des courbes qui sont **localement** les plus courtes.



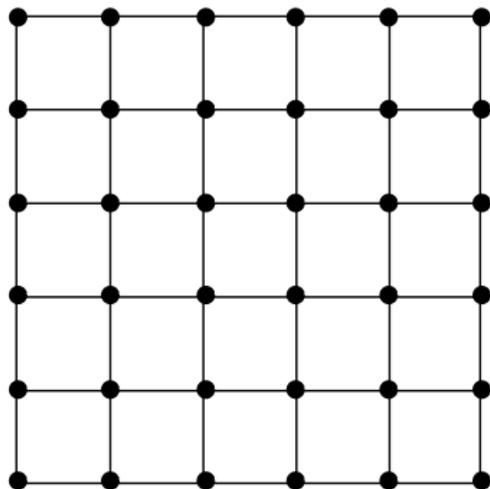
## Théorème (Rotman '06)

*La plus courte géodésique fermée sur une sphère riemannienne a longueur au plus  $4\sqrt{2}\sqrt{A}$ .*

- Quiz : Quel objet sur les graphes planaires a longueur au plus  $2\sqrt{2}\sqrt{n}$ ?

Théorème (Lipton-Tarjan '79, Alon-Seymour-Thomas '94)

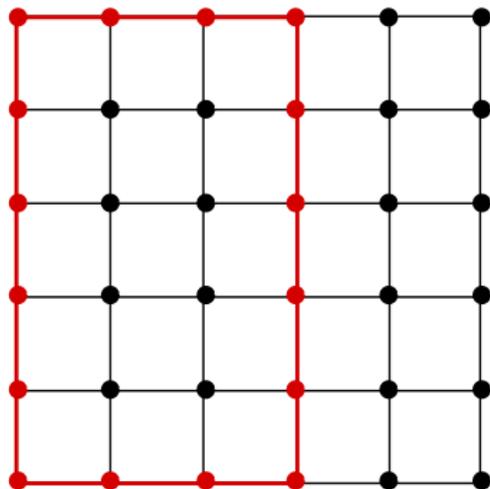
Soit  $G$  un graphe triangulé à  $n$  sommets, alors il existe un cycle avec au plus  $2\sqrt{2}\sqrt{n}$  sommets tels que l'intérieur et l'extérieur du cycle contiennent chacun au plus  $2n/3$  sommets.



- Le “même” objet se cache derrière les géodésiques et les séparateurs planaires.

Théorème (Lipton-Tarjan '79, Alon-Seymour-Thomas '94)

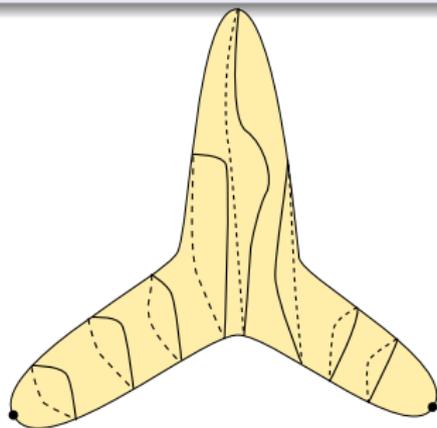
Soit  $G$  un graphe triangulé à  $n$  sommets, alors il existe un cycle avec au plus  $2\sqrt{2}\sqrt{n}$  sommets tels que l'intérieur et l'extérieur du cycle contiennent chacun au plus  $2n/3$  sommets.



- Le “même” objet se cache derrière les géodésiques et les séparateurs planaires.

Comment trouver une géodésique ? ([Birkhoff '17])

- 1 Balayer la sphère linéairement avec des courbes.
- 2 Tendre toutes les courbes.
- 3 Regarder la courbe au “milieu”.

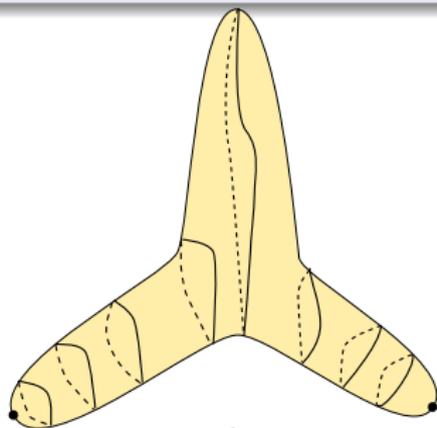


La longueur de la plus courte géodésique est majorée par la *taille* du meilleur balayage :

$$\text{waist}(S) = \inf_{f:S \rightarrow [0,1]} \sup_{t \in [0,1]} \|f^{-1}(t)\|$$

Comment trouver une géodésique ? ([Birkhoff '17])

- 1 Balayer la sphère linéairement avec des courbes.
- 2 Tendre toutes les courbes.
- 3 Regarder la courbe au “milieu”.

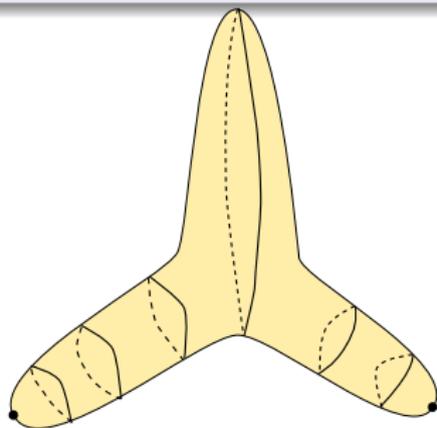


La longueur de la plus courte géodésique est majorée par la *taille* du meilleur balayage :

$$\text{waist}(S) = \inf_{f:S \rightarrow [0,1]} \sup_{t \in [0,1]} \|f^{-1}(t)\|$$

Comment trouver une géodésique ? ([Birkhoff '17])

- 1 Balayer la sphère linéairement avec des courbes.
- 2 Tendre toutes les courbes.
- 3 Regarder la courbe au “milieu”.

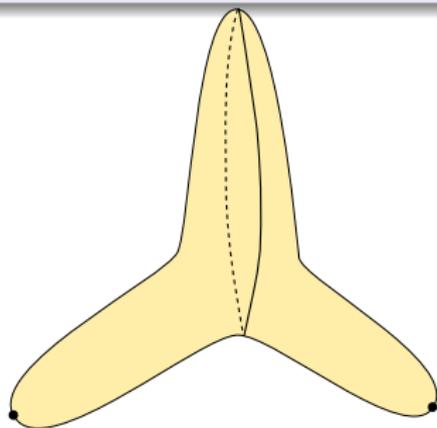


La longueur de la plus courte géodésique est majorée par la *taille* du meilleur balayage :

$$\text{waist}(S) = \inf_{f:S \rightarrow [0,1]} \sup_{t \in [0,1]} \|f^{-1}(t)\|$$

Comment trouver une géodésique ? ([Birkhoff '17])

- 1 Balayer la sphère linéairement avec des courbes.
- 2 Tendre toutes les courbes.
- 3 Regarder la courbe au "milieu".



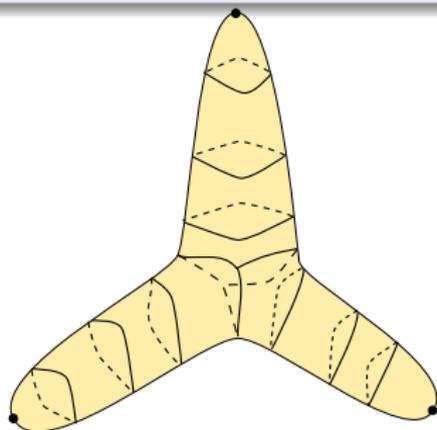
La longueur de la plus courte géodésique est majorée par la *taille* du meilleur balayage :

$$\text{waist}(S) = \inf_{f:S \rightarrow [0,1]} \sup_{t \in [0,1]} \|f^{-1}(t)\|$$

## Fabriquer des géodésiques 2

Comment trouver une géodésique ? ([Calabi-Cao '92]) (peu rigoureux)

- 1 Balayer la sphère *de façon arborescente* avec des courbes.
- 2 Tendre toutes les courbes.
- 3 Regarder ce qu'il reste.



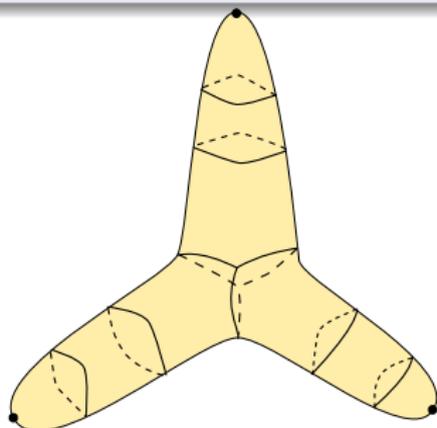
La longueur de la plus courte géodésique est majorée par deux fois la *taille* du meilleur balayage arborescent :

$$\text{branchwaist}(S) = \inf_{f:S \rightarrow T, t \in T} \sup_{t \in E(T)} \|f^{-1}(t)\|$$

## Fabriquer des géodésiques 2

Comment trouver une géodésique ? ([Calabi-Cao '92]) (peu rigoureux)

- 1 Balayer la sphère *de façon arborescente* avec des courbes.
- 2 Tendre toutes les courbes.
- 3 Regarder ce qu'il reste.



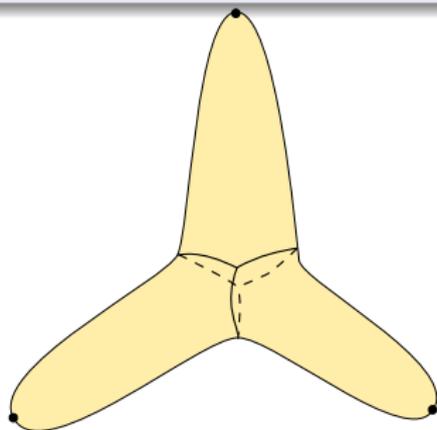
La longueur de la plus courte géodésique est majorée par deux fois la *taille* du meilleur balayage arborescent :

$$\text{branchwaist}(S) = \inf_{f:S \rightarrow T, t \in T} \sup_{t \in E(T)} \|f^{-1}(t)\|$$

## Fabriquer des géodésiques 2

Comment trouver une géodésique ? ([Calabi-Cao '92]) (peu rigoureux)

- 1 Balayer la sphère *de façon arborescente* avec des courbes.
- 2 Tendre toutes les courbes.
- 3 Regarder ce qu'il reste.

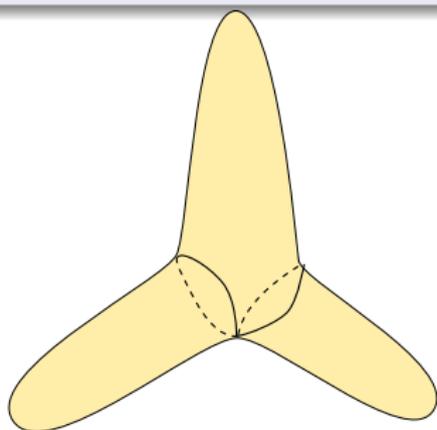


La longueur de la plus courte géodésique est majorée par deux fois la *taille* du meilleur balayage arborescent :

$$\text{branchwaist}(S) = \inf_{f:S \rightarrow T, t \in T} \sup_{t \in E(T)} \|f^{-1}(t)\|$$

Comment trouver une géodésique ? ([Calabi-Cao '92]) (peu rigoureux)

- 1 Balayer la sphère *de façon arborescente* avec des courbes.
- 2 Tendre toutes les courbes.
- 3 Regarder ce qu'il reste.

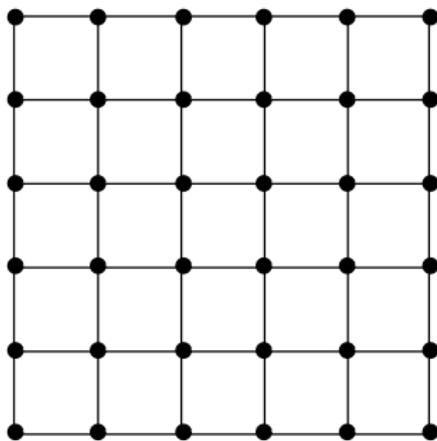


La longueur de la plus courte géodésique est majorée par deux fois la *taille* du meilleur balayage arborescent :

$$\text{branchwaist}(S) = \inf_{f:S \rightarrow T, t \in T} \sup_{t \in E(T)} \|f^{-1}(t)\|$$

# Des séparateurs planaires aux décompositions arborescentes

- Remplacer le graphe par son graphe radial.
- Itérer la recherche de séparateur de part et d'autre.
- Cela induit une *décomposition en branches* du graphe ([Robertson-Seymour, Graph Minors X]).

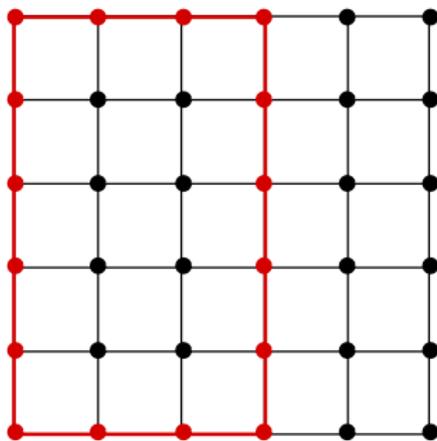


La longueur du plus court séparateur planaire est majorée par la taille de la meilleure décomposition en branches du graphe radial :

$$\text{branchwidth}(S) = \inf_{T \in \mathcal{T}} \sup_{e \in E(T)} |V(C(e))|$$

# Des séparateurs planaires aux décompositions arborescentes

- Remplacer le graphe par son graphe radial.
- Itérer la recherche de séparateur de part et d'autre.
- Cela induit une *décomposition en branches* du graphe ([Robertson-Seymour, Graph Minors X]).

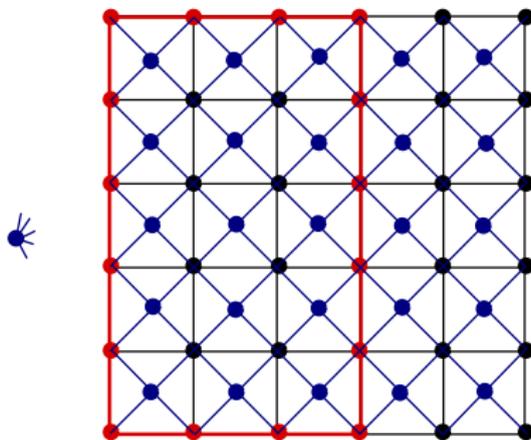


La longueur du plus court séparateur planaire est majorée par la taille de la meilleure décomposition en branches du graphe radial :

$$\text{branchwidth}(S) = \inf_{T \in \mathcal{T}} \sup_{e \in E(T)} |V(C(e))|$$

# Des séparateurs planaires aux décompositions arborescentes

- Remplacer le graphe par son graphe radial.
- Itérer la recherche de séparateur de part et d'autre.
- Cela induit une *décomposition en branches* du graphe ([Robertson-Seymour, Graph Minors X]).

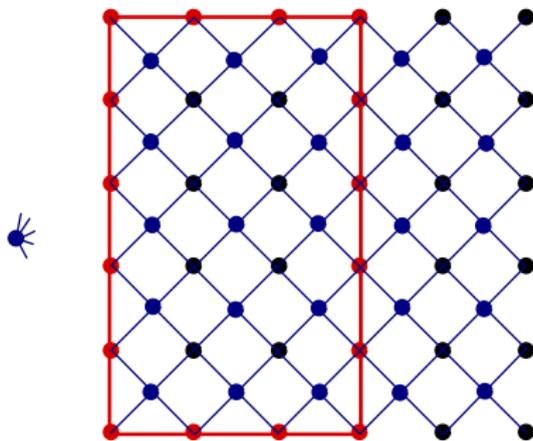


La longueur du plus court séparateur planaire est majorée par la taille de la meilleure décomposition en branches du graphe radial :

$$\text{branchwidth}(S) = \inf_{T \in \mathcal{T}} \sup_{e \in E(T)} |V(C(e))|$$

# Des séparateurs planaires aux décompositions arborescentes

- Remplacer le graphe par son graphe radial.
- Itérer la recherche de séparateur de part et d'autre.
- Cela induit une *décomposition en branches* du graphe ([Robertson-Seymour, Graph Minors X]).

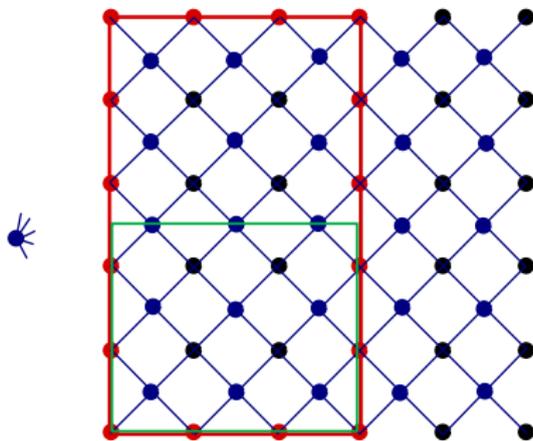


La longueur du plus court séparateur planaire est majorée par la taille de la meilleure décomposition en branches du graphe radial :

$$\text{branchwidth}(S) = \inf_{T \in \mathcal{T}} \sup_{e \in E(T)} |V(C(e))|$$

# Des séparateurs planaires aux décompositions arborescentes

- Remplacer le graphe par son graphe radial.
- Itérer la recherche de séparateur de part et d'autre.
- Cela induit une *décomposition en branches* du graphe ([Robertson-Seymour, Graph Minors X]).

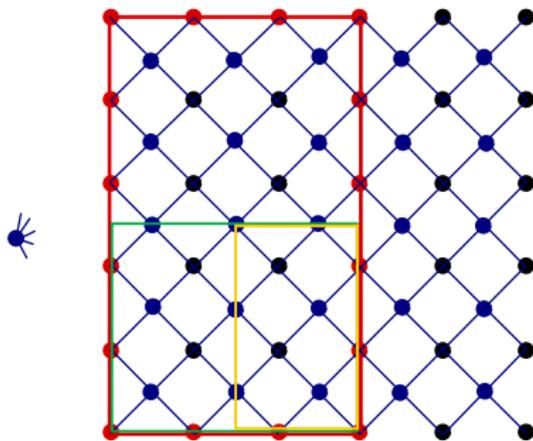


La longueur du plus court séparateur planaire est majorée par la taille de la meilleure décomposition en branches du graphe radial :

$$\text{branchwidth}(S) = \inf_{T \in \mathcal{T}} \sup_{e \in E(T)} |V(C(e))|$$

# Des séparateurs planaires aux décompositions arborescentes

- Remplacer le graphe par son graphe radial.
- Itérer la recherche de séparateur de part et d'autre.
- Cela induit une *décomposition en branches* du graphe ([Robertson-Seymour, Graph Minors X]).

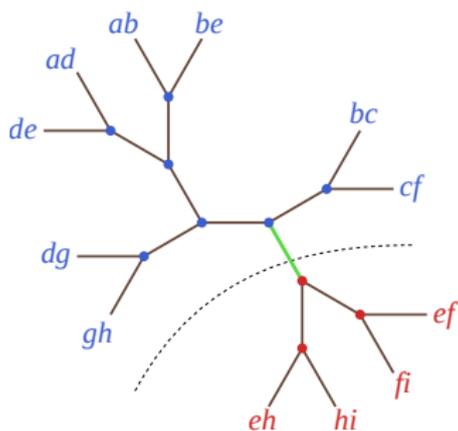
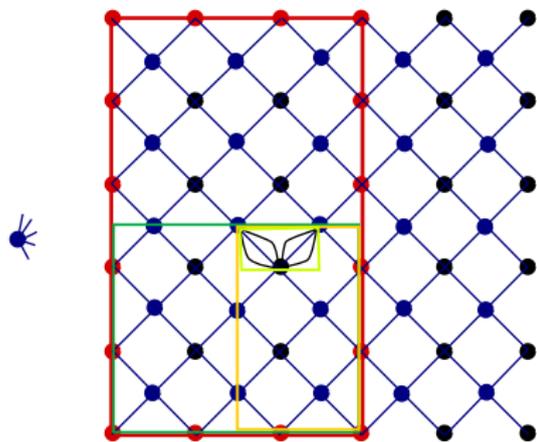


La longueur du plus court séparateur planaire est majorée par la taille de la meilleure décomposition en branches du graphe radial :

$$\text{branchwidth}(S) = \inf_{T \in \mathcal{T}} \sup_{e \in E(T)} |V(C(e))|$$

# Des séparateurs planaires aux décompositions arborescentes

- Remplacer le graphe par son graphe radial.
- Itérer la recherche de séparateur de part et d'autre.
- Cela induit une **décomposition en branches** du graphe ([Robertson-Seymour, Graph Minors X]).



La longueur du plus court séparateur planaire est majorée par la taille de la meilleure décomposition en branches du graphe radial :

$$\text{branchwidth}(S) = \inf_{T \in \mathcal{T}} \sup_{e \in E(T)} |V(C(e))|$$

- Une analogie forte entre les *balayages arborescents* de sphères et les *décompositions en branches* de graphes planaires...

- Une analogie forte entre les *balayages arborescents* de sphères et les *décompositions en branches* de graphes planaires...
- ... que l'on peut exploiter.

## Théorème (Alon-Seymour-Thomas '94, Fomin-Thilikos '06)

Soit  $G$  un graphe planaire à  $n$  sommets, alors

- il existe un cycle avec au plus  $3/2\sqrt{2}\sqrt{n}$  sommets tels que l'intérieur et l'extérieur du cycle contiennent chacun au plus  $2n/3$  sommets,
- $G$  a branchwidth au plus  $3/2\sqrt{2}\sqrt{n}$ .

## Théorème (Hubard, de Mesmay, Lazarus '18 ?)

Soit  $S$  une sphère riemannienne d'aire  $A$ .

- La branchwaist de  $S$  vérifie :

$$\text{branchwaist}(S) := \inf_{f:S \rightarrow T, T \in \mathcal{T}} \sup_{t \in E(T)} \|f^{-1}(t)\| \leq \sqrt{2\pi} \sqrt{A}$$

- Il existe une géodésique fermée de longueur au plus  $2\sqrt{2\pi A}$ .

Pour comparer,

- sur la sphère usuelle,  $A = 4\pi$ ,  $|\gamma| = 2\pi$  et donc  $|\gamma| = \sqrt{\pi A}$ .
- la sphère conjecturée ayant les plus grosses géodésiques est construite en collant deux triangles équilatéraux l'un sur l'autre.

On peut calculer la branchwidth d'un graphe planaire en temps *polynomial*.

**Théorème (Seymour-Thomas '94, s'appuyant sur Graph Minors XI)**

*Soit  $G$  un graphe planaire,  $G$  a branchwidth au moins  $k$  si et seulement si il a une antipodalité de taille au moins  $k$ .*

On peut calculer la branchwidth d'un graphe planaire en temps *polynomial*.

**Théorème (Seymour-Thomas '94, s'appuyant sur Graph Minors XI)**

*Soit  $G$  un graphe planaire,  $G$  a branchwidth au moins  $k$  si et seulement si il a une antipodalité de taille au moins  $k$ .*

Soit  $G$  un graphe planaire, une *antipodalité* de taille  $k$  est une application  $\alpha$  qui associe,

- à chaque arête  $e \in E(G)$  un sous-graphe  $\alpha(e)$  de  $G$ ,
- à chaque face  $f \in F(G)$  un sous-ensemble  $\alpha(f)$  de  $V(G)$ ,

tels que

- 1 Pour  $e \in E(G)$ , aucune extrémité de  $e$  n'appartient à  $V(\alpha(e))$ ,
- 2 Si  $e \in E(G)$ ,  $f \in F(G)$  et  $e$  est incident à  $f$ , alors  $\alpha(f) \subseteq V(\alpha(e))$  et chaque composante de  $\alpha(e)$  a un sommet dans  $\alpha(f)$ ,
- 3 Si  $e \in E(G)$ ,  $f \in E(\alpha(e))$  alors chaque marche de  $G^*$  qui utilise  $e^*$  et  $f^*$  a longueur au moins  $k$ .

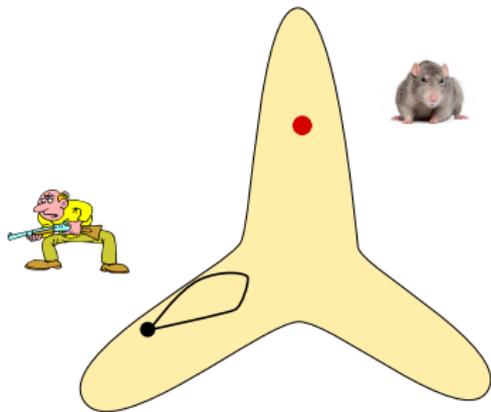
# L'attrappeur de rats

On peut calculer la branchwidth d'un graphe planaire en temps *polynomial*.

**Théorème (Seymour-Thomas '94, s'appuyant sur Graph Minors XI)**

*Soit  $G$  un graphe planaire,  $G$  a branchwidth au moins  $k$  si et seulement si il a une antipodalité de taille au moins  $k$ .*

Une *antipodalité* de taille  $k$  est une stratégie qui permet à un rat d'échapper à un attrappeur de rats ayant des bras de taille  $k$ .



Une **antipodalité** (continue) de taille  $k$  est une application continue  $a : S \rightarrow S$  telle que pour tout  $x \in S$ ,

$$d(x, a(x)) \geq k/2.$$

**Théorème (Hubard, de Mesmay, Lazarus '18?)**

Soit  $S$  une sphère riemannienne,  $S$  a branchwaist au moins  $k$  si et seulement il existe une antipodalité de taille au moins  $k - \epsilon$  pour tout  $\epsilon > 0$ , i.e.,

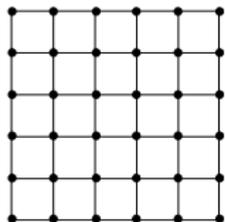
$$\inf_{f:S \rightarrow T, t \in T} \sup_{t \in E(T)} \|f^{-1}(t)\| = \sup_{f:S \rightarrow S} \inf_{x \in S} 2d(x, a(x))$$

Relié à des résultats de Berger (1980) et Gromov (1983).

- Discrétisations naturelles de surfaces arithmétiques ?

## Quelques perspectives 2

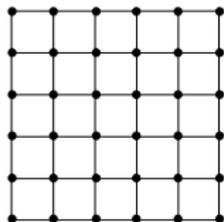
- Dualité géométrique pour les balayages linéaires (=homotopie optimale)? pour la *treewidth* de graphes planaires?  
⇒ Algorithme polynomial?
- Quid des graphes sur les surfaces? Connexion avec la constante de Bers?
- Connexions avec la géométrie *Finslerienne*?



≠



- Dualité géométrique pour les balayages linéaires (=homotopie optimale)? pour la *treewidth* de graphes planaires?  
⇒ Algorithme polynomial?
- Quid des graphes sur les surfaces? Connexion avec la constante de Bers?
- Connexions avec la géométrie *Finslerienne*?



≠



*Merci de votre attention !*