

Processus d'exclusion simple symétrique quantique, associaèdre et cumulants libres

Séminaire Flajolet

IHP

31 mars 2022

Philippe Biane

CNRS, IGM

Université Gustave-Eiffel

Les polynômes de lacets

C'est une famille de polynômes $Q_\sigma(x_1, \dots, x_n)$ indexés par les permutations circulaires σ de $[1, n]$

Les polynômes de lacets

C'est une famille de polynômes $Q_\sigma(x_1, \dots, x_n)$ indexés par les permutations circulaires σ de $[1, n]$

$$Q_1 = x_1$$

$$Q_{12} = x_1(1 - x_2)$$

$$Q_{123} = x_1(1 - 2x_2)(1 - x_3) = Q_{132}$$

$$\begin{aligned} Q_{1234} &= x_1(1 - 2x_3 - 3x_2 + 5x_2x_3)(1 - x_4) \\ &= Q_{1243} = Q_{1432} = Q_{1342} \end{aligned}$$

$$Q_{1324} = x_1(1 - x_3 - 4x_2 + 5x_2x_3)(1 - x_4) = Q_{1423}$$

Les polynômes de lacets

C'est une famille de polynômes $Q_\sigma(x_1, \dots, x_n)$ indexés par les permutations circulaires σ de $[1, n]$

$$Q_1 = x_1$$

$$Q_{12} = x_1(1 - x_2)$$

$$Q_{123} = x_1(1 - 2x_2)(1 - x_3) = Q_{132}$$

$$\begin{aligned} Q_{1234} &= x_1(1 - 2x_3 - 3x_2 + 5x_2x_3)(1 - x_4) \\ &= Q_{1243} = Q_{1432} = Q_{1342} \end{aligned}$$

$$Q_{1324} = x_1(1 - x_3 - 4x_2 + 5x_2x_3)(1 - x_4) = Q_{1423}$$

- Ces polynômes sont obtenus à partir des fluctuations asymptotiques du *processus d'exclusion simple symétrique quantique*.

cf D. Bernard, T. Jin Comm. Math. Phys. 2021.

-Le but de cet exposé est de

-Le but de cet exposé est de

1. Donner une définition formelle de ces polynômes

-Le but de cet exposé est de

1. Donner une définition formelle de ces polynômes
2. Expliquer le modèle physique dont ils viennent

-Le but de cet exposé est de

1. Donner une définition formelle de ces polynômes
2. Expliquer le modèle physique dont ils viennent
3. Donner une formule combinatoire

-Le but de cet exposé est de

1. Donner une définition formelle de ces polynômes
2. Expliquer le modèle physique dont ils viennent
3. Donner une formule combinatoire
4. Expliquer pourquoi ce sont des *cumulants libres*

Caractérisation algébrique des polynômes de lacets

1. Q_σ est de degré 1 en chaque variable x_i .

Caractérisation algébrique des polynômes de lacets

1. Q_σ est de degré 1 en chaque variable x_i .
2. $Q_1(x_1) = x_1$ et $Q_{12}(x_1, x_2) = x_1(1 - x_2)$.

Caractérisation algébrique des polynômes de lacets

1. Q_σ est de degré 1 en chaque variable x_i .
2. $Q_1(x_1) = x_1$ et $Q_{12}(x_1, x_2) = x_1(1 - x_2)$.
3. Pour $n \geq 2$ ils satisfont les conditions aux bords:

$$Q_\sigma = x_1 P_\sigma(x_2, \dots, x_{n-1})(1 - x_n)$$

Caractérisation algébrique des polynômes de lacets

1. Q_σ est de degré 1 en chaque variable x_i .
2. $Q_1(x_1) = x_1$ et $Q_{12}(x_1, x_2) = x_1(1 - x_2)$.
3. Pour $n \geq 2$ ils satisfont les conditions aux bords:

$$Q_\sigma = x_1 P_\sigma(x_2, \dots, x_{n-1})(1 - x_n)$$

4. Propriété de continuité: $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ($s_i = (i i + 1)$):

$$Q_\sigma|_{x_i=x_{i+1}} = Q_{s_i \sigma s_i}|_{x_i=x_{i+1}}$$

Caractérisation algébrique des polynômes de lacets

1. Q_σ est de degré 1 en chaque variable x_i .
2. $Q_1(x_1) = x_1$ et $Q_{12}(x_1, x_2) = x_1(1 - x_2)$.
3. Pour $n \geq 2$ ils satisfont les conditions aux bords:

$$Q_\sigma = x_1 P_\sigma(x_2, \dots, x_{n-1})(1 - x_n)$$

4. Propriété de continuité: $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ($s_i = (i i + 1)$):

$$Q_\sigma|_{x_i=x_{i+1}} = Q_{s_i \sigma s_i}|_{x_i=x_{i+1}}$$

5. Relation d'échange:

$$\begin{aligned} [x_i](Q_\sigma + Q_{s_i \sigma s_i})|_{x_i=x_{i+1}} - [x_{i+1}](Q_\sigma + Q_{s_i \sigma s_i})|_{x_i=x_{i+1}} = \\ 2([x_i]Q_{\sigma^-}(x^-))([x_{i+1}]Q_{\sigma^+}(x^+)) \end{aligned}$$

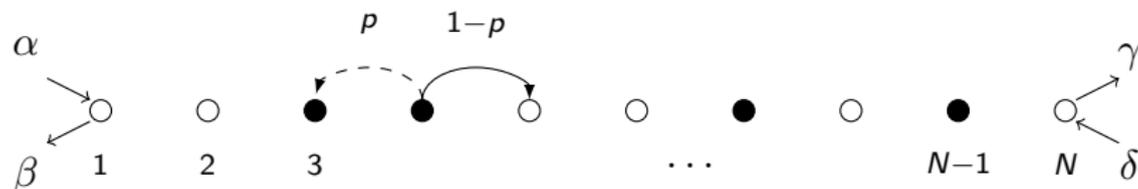
(ici $s_i \sigma = \sigma^+ \sigma^-$, où le cycle σ^+ , contient $i + 1$ et σ^- , contient i .)

Processus d'Exclusion

Le *processus d'exclusion* décrit un système de particules se déplaçant sur un intervalle $\{1, 2, \dots, N\}$ et satisfaisant le *principe d'exclusion*: il y a au plus une particule par site

Processus d'Exclusion

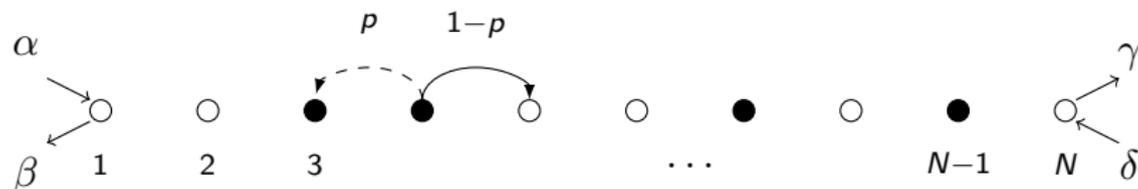
Le *processus d'exclusion* décrit un système de particules se déplaçant sur un intervalle $\{1, 2, \dots, N\}$ et satisfaisant le *principe d'exclusion*: il y a au plus une particule par site



Une particule peut sauter sur un des deux sites voisins. Si le site sur lequel elle veut sauter est occupé, elle ne peut pas sauter. Les particules peuvent sortir de l'intervalle ou y entrer par les bords avec des taux $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Processus d'Exclusion

Le *processus d'exclusion* décrit un système de particules se déplaçant sur un intervalle $\{1, 2, \dots, N\}$ et satisfaisant le *principe d'exclusion*: il y a au plus une particule par site



Une particule peut sauter sur un des deux sites voisins. Si le site sur lequel elle veut sauter est occupé, elle ne peut pas sauter. Les particules peuvent sortir de l'intervalle ou y entrer par les bords avec des taux $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Quand $t \rightarrow \infty$ un courant s'établit et la configuration des particules converge vers une *loi stationnaire* μ , une mesure de probabilités sur l'espace des configurations

$$\Omega = \{0, 1\}^N$$

Le processus d'exclusion est un exemple de système hors d'équilibre. Il y a différentes variantes, qui ont donné lieu à de nombreux travaux, en lien avec de nombreux domaines de physique et mathématiques: mécanique statistique, systèmes intégrables, combinatoire, théorie des matrices aléatoires etc.

Processus d'exclusion simple symétrique quantique

En mécanique quantique la combinatoire et les probabilités sont remplacées par l'algèbre linéaire: l'espace des configurations $\Omega = \{0, 1\}^N$ est remplacé par $V = (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ (espace vectoriel de dimension 2^N)

On considère un système de *fermions* $\{1, 2, \dots, N\}$ avec un Hamiltonien

$$H_t = \sum_{j=1}^N c_{j+1}^\dagger c_j W_t^j + c_j^\dagger c_{j+1} \bar{W}_t^j$$

Processus d'exclusion simple symétrique quantique

En mécanique quantique la combinatoire et les probabilités sont remplacées par l'algèbre linéaire: l'espace des configurations $\Omega = \{0, 1\}^N$ est remplacé par $V = (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ (espace vectoriel de dimension 2^N)

On considère un système de *fermions* $\{1, 2, \dots, N\}$ avec un Hamiltonien

$$H_t = \sum_{j=1}^N c_{j+1}^\dagger c_j W_t^j + c_j^\dagger c_{j+1} \bar{W}_t^j$$

Les $W_t^j, j = 1, \dots, N - 1$ sont des mouvements Browniens complexes

Processus d'exclusion simple symétrique quantique

En mécanique quantique la combinatoire et les probabilités sont remplacées par l'algèbre linéaire: l'espace des configurations $\Omega = \{0, 1\}^N$ est remplacé par $V = (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ (espace vectoriel de dimension 2^N)

On considère un système de *fermions* $\{1, 2, \dots, N\}$ avec un Hamiltonien

$$H_t = \sum_{j=1}^N c_{j+1}^\dagger c_j W_t^j + c_j^\dagger c_{j+1} \bar{W}_t^j$$

Les $W_t^j, j = 1, \dots, N - 1$ sont des mouvements Browniens complexes

Les c_j^\dagger, c_j sont des opérateurs de création et annihilation fermioniques, agissant sur V , satisfaisant

$$c_i c_j^\dagger + c_j^\dagger c_i = \delta_{ij}$$

La distribution des particules à l'instant t est donnée par une matrice de densité ρ_t (un opérateur auto-adjoint positif sur V tel que $Tr(\rho_t) = 1$).

Si $t \rightarrow \infty$ alors $\rho_t \rightarrow \rho$ en loi

ρ est une matrice aléatoire de taille $2^N \times 2^N$

Sa moyenne $E[\rho]$ redonne la mesure stationnaire du processus d'exclusion simple symétrique "classique".

La distribution des particules à l'instant t est donnée par une matrice de densité ρ_t (un opérateur auto-adjoint positif sur V tel que $Tr(\rho_t) = 1$).

Si $t \rightarrow \infty$ alors $\rho_t \rightarrow \rho$ en loi

ρ est une matrice aléatoire de taille $2^N \times 2^N$

Sa moyenne $E[\rho]$ redonne la mesure stationnaire du processus d'exclusion simple symétrique "classique".

Les corrélations $G_{ij} = Tr(\rho c_i c_j^\dagger)$ forment une matrice aléatoire

$$G = (G_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$$

Les variables G_{ij} contiennent l'information sur les corrélations entre les sites i and j .

La distribution des particules à l'instant t est donnée par une matrice de densité ρ_t (un opérateur auto-adjoint positif sur V tel que $Tr(\rho_t) = 1$).

Si $t \rightarrow \infty$ alors $\rho_t \rightarrow \rho$ en loi

ρ est une matrice aléatoire de taille $2^N \times 2^N$

Sa moyenne $E[\rho]$ redonne la mesure stationnaire du processus d'exclusion simple symétrique "classique".

Les corrélations $G_{ij} = Tr(\rho c_i c_j^\dagger)$ forment une matrice aléatoire

$$G = (G_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$$

Les variables G_{ij} contiennent l'information sur les corrélations entre les sites i and j .

Les fluctuations de G sont mesurées par leurs *cumulants*

$$E[G_{i_1 j_1} G_{i_2 j_2} \dots G_{i_p j_p}]^c = C_p(G_{i_1 j_1}, G_{i_2 j_2}, \dots, G_{i_p j_p})$$

Comportement asymptotique des cumulants

$$E[G_{i_1 j_1} G_{i_2 j_2} \dots G_{i_p j_p}]^c = C_p(G_{i_1 j_1}, G_{i_2 j_2}, \dots, G_{i_p j_p})$$

Lorsque $N \rightarrow \infty$ les cumulants sont d'ordre au plus N^{-p+1} .

Comportement asymptotique des cumulants

$$E[G_{i_1 j_1} G_{i_2 j_2} \dots G_{i_p j_p}]^c = C_p(G_{i_1 j_1}, G_{i_2 j_2}, \dots, G_{i_p j_p})$$

Lorsque $N \rightarrow \infty$ les cumulants sont d'ordre au plus N^{-p+1} .

Seuls ceux pour lesquels j_1, \dots, j_p est une permutation circulaire de i_1, \dots, i_p sont d'ordre maximal

Si $i_1/N, i_2/N, \dots, i_p/N \rightarrow u_1, u_2, \dots, u_p \in [0, 1]$ quand $N \rightarrow \infty$, alors

$$E[G_{i_1 i_p} G_{i_p i_{p-1}} \dots G_{i_2 i_1}]^c = \frac{1}{N^{p-1}} g_p(u_1, \dots, u_p) + O\left(\frac{1}{N^p}\right)$$

Comportement asymptotique des cumulants

$$E[G_{i_1 j_1} G_{i_2 j_2} \dots G_{i_p j_p}]^c = C_p(G_{i_1 j_1}, G_{i_2 j_2}, \dots, G_{i_p j_p})$$

Lorsque $N \rightarrow \infty$ les cumulants sont d'ordre au plus N^{-p+1} .

Seuls ceux pour lesquels j_1, \dots, j_p est une permutation circulaire de i_1, \dots, i_p sont d'ordre maximal

Si $i_1/N, i_2/N, \dots, i_p/N \rightarrow u_1, u_2, \dots, u_p \in [0, 1]$ quand $N \rightarrow \infty$, alors

$$E[G_{i_1 i_p} G_{i_p i_{p-1}} \dots G_{i_2 i_1}]^c = \frac{1}{N^{p-1}} g_p(u_1, \dots, u_p) + O\left(\frac{1}{N^p}\right)$$

Les g_p sont polynomiales par morceaux, dans chaque secteur correspondant à un ordre sur les u_j .

Polynomes de lacets (Bernard and Jin, 2021)

On définit $Q_\sigma(x_1, \dots, x_p)$ pour $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_p \leq 1$, par

$$E[G_{i_1 i_{\sigma^{p-1}(1)}} G_{i_{\sigma^{p-1}(1)} i_{\sigma^{p-2}(1)}} \cdots G_{i_{\sigma(1)} i_1}]^c = \frac{1}{N^{p-1}} Q_\sigma(x_1, \dots, x_p) + O\left(\frac{1}{N^p}\right).$$

où $i_k/N \rightarrow x_k$ quand $N \rightarrow \infty$ (ne dépend que de la permutation circulaire σ)

Polynomes de lacets (Bernard and Jin, 2021)

On définit $Q_\sigma(x_1, \dots, x_p)$ pour $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_p \leq 1$, par

$$E[G_{i_1 i_{\sigma^{p-1}(1)}} G_{i_{\sigma^{p-1}(1)} i_{\sigma^{p-2}(1)}} \cdots G_{i_{\sigma(1)} i_1}]^c = \frac{1}{N^{p-1}} Q_\sigma(x_1, \dots, x_p) + O\left(\frac{1}{N^p}\right).$$

où $i_k/N \rightarrow x_k$ quand $N \rightarrow \infty$ (ne dépend que de la permutation circulaire σ)

Les Q_σ sont les polynômes de lacets, ils donnent la valeur de la fonction g_p dans chaque secteur.

Caractérisation algébrique des polynômes de lacets

1. Q_σ est de degré 1 en chaque variable x_i .

Caractérisation algébrique des polynômes de lacets

1. Q_σ est de degré 1 en chaque variable x_i .
2. $Q_1(x_1) = x_1$ et $Q_{12}(x_1, x_2) = x_1(1 - x_2)$.

Caractérisation algébrique des polynômes de lacets

1. Q_σ est de degré 1 en chaque variable x_i .
2. $Q_1(x_1) = x_1$ et $Q_{12}(x_1, x_2) = x_1(1 - x_2)$.
3. Pour $n \geq 2$ ils satisfont les conditions aux bords:

$$Q_\sigma = x_1 P_\sigma(x_2, \dots, x_{n-1})(1 - x_n)$$

Caractérisation algébrique des polynômes de lacets

1. Q_σ est de degré 1 en chaque variable x_i .
2. $Q_1(x_1) = x_1$ et $Q_{12}(x_1, x_2) = x_1(1 - x_2)$.
3. Pour $n \geq 2$ ils satisfont les conditions aux bords:

$$Q_\sigma = x_1 P_\sigma(x_2, \dots, x_{n-1})(1 - x_n)$$

4. Propriété de continuité: $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ($s_i = (i i + 1)$):

$$Q_\sigma|_{x_i=x_{i+1}} = Q_{s_i \sigma s_i}|_{x_i=x_{i+1}}$$

Caractérisation algébrique des polynômes de lacets

1. Q_σ est de degré 1 en chaque variable x_i .
2. $Q_1(x_1) = x_1$ et $Q_{12}(x_1, x_2) = x_1(1 - x_2)$.
3. Pour $n \geq 2$ ils satisfont les conditions aux bords:

$$Q_\sigma = x_1 P_\sigma(x_2, \dots, x_{n-1})(1 - x_n)$$

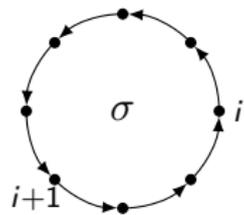
4. Propriété de continuité: $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ($s_i = (i i + 1)$):

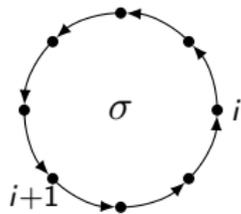
$$Q_\sigma|_{x_i=x_{i+1}} = Q_{s_i \sigma s_i}|_{x_i=x_{i+1}}$$

5. Relation d'échange:

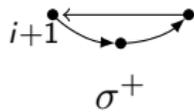
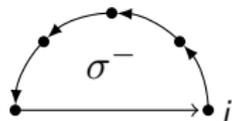
$$\begin{aligned} [x_i](Q_\sigma + Q_{s_i \sigma s_i})|_{x_i=x_{i+1}} - [x_{i+1}](Q_\sigma + Q_{s_i \sigma s_i})|_{x_i=x_{i+1}} = \\ 2([x_i]Q_{\sigma^-}(x^-))([x_{i+1}]Q_{\sigma^+}(x^+)) \end{aligned}$$

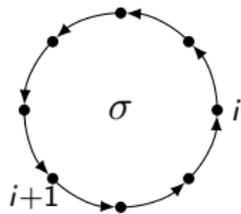
(ici $s_i \sigma = \sigma^+ \sigma^-$, où le cycle σ^+ , contient $i + 1$ et σ^- , contient i .)



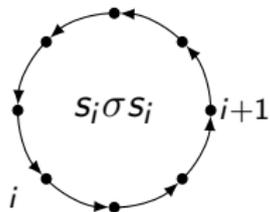
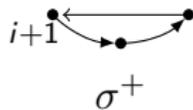
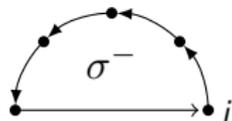


$$s_i \sigma = \sigma^- \sigma^+$$





$$S_i \sigma = \sigma^- \sigma^+$$



Comment utiliser les relations pour calculer les Q_σ

$$Q_\sigma = A + x_i B + x_{i+1} C + x_i x_{i+1} D,$$

Comment utiliser les relations pour calculer les Q_σ

$$Q_\sigma = A + x_i B + x_{i+1} C + x_i x_{i+1} D,$$

$$Q_{s_j \sigma s_j} = A' + x_i B' + x_{i+1} C' + x_i x_{i+1} D',$$

où $A, B, C, D, A', B', C', D'$ ne dépendent pas de x_i, x_{i+1} .

Comment utiliser les relations pour calculer les Q_σ

$$Q_\sigma = A + x_j B + x_{j+1} C + x_j x_{j+1} D,$$

$$Q_{s_j \sigma s_j} = A' + x_j B' + x_{j+1} C' + x_j x_{j+1} D',$$

où $A, B, C, D, A', B', C', D'$ ne dépendent pas de x_j, x_{j+1} .

Par continuité:

$$A = A', \quad D = D', \quad B + C = B' + C'.$$

Comment utiliser les relations pour calculer les Q_σ

$$Q_\sigma = A + x_i B + x_{i+1} C + x_i x_{i+1} D,$$

$$Q_{s_i \sigma s_i} = A' + x_i B' + x_{i+1} C' + x_i x_{i+1} D',$$

où $A, B, C, D, A', B', C', D'$ ne dépendent pas de x_i, x_{i+1} .

Par continuité:

$$A = A', \quad D = D', \quad B + C = B' + C'.$$

Soit $s_i \sigma = \sigma^- \sigma^+$ et

$$\Delta := ([x_i] Q_{\sigma^-}(x^-))([x_{i+1}] Q_{\sigma^+}(x^+)).$$

La relation décharge donne

$$B - C' = B' - C = \Delta.$$

On peut obtenir Q_σ pour toutes les permutations circulaires si on le connaît pour une des valeurs de σ . Les conditions aux bords mettent des contraintes fortes sur ces polynômes. Bernard et Jin ont montré qu'en fait les relations ci-dessus déterminent uniquement les polynômes de lacets.

On peut obtenir Q_σ pour toutes les permutations circulaires si on le connaît pour une des valeurs de σ . Les conditions aux bords mettent des contraintes fortes sur ces polynômes. Bernard et Jin ont montré qu'en fait les relations ci-dessus déterminent uniquement les polynômes de lacets.

Exemples: $n = 5$

$$Q_{12345} = x_1(1-4x_2-3x_3-2x_4+9x_2x_3+7x_2x_4+5x_3x_4-14x_2x_3x_4)(1-x_5)$$

$$Q_{13245} = x_1(1-6x_2-x_3-2x_4+9x_2x_3+10x_2x_4+2x_3x_4-14x_2x_3x_4)(1-x_5)$$

$$Q_{12435} = x_1(1-4x_2-4x_3-x_4+12x_2x_3+4x_2x_4+5x_3x_4-14x_2x_3x_4)(1-x_5)$$

$$Q_{14235} = x_1(1-6x_2-2x_3-x_4+12x_2x_3+7x_2x_4+2x_3x_4-14x_2x_3x_4)(1-x_5)$$

et

$$Q_{12345} = Q_{13452} = Q_{14523} = Q_{15234} = Q_{15432} = Q_{12543} = Q_{13254} = Q_{14325}$$

$$Q_{13245} = Q_{13254} = Q_{15423} = Q_{14523}$$

$$Q_{12435} = Q_{14352} = Q_{15342} = Q_{12534}$$

$$Q_{14235} = Q_{13524} = Q_{15234} = Q_{15324} = Q_{14253} = Q_{13425} = Q_{15243} = Q_{14325}$$

On peut obtenir Q_σ pour toutes les permutations circulaires si on le connaît pour une des valeurs de σ . Les conditions aux bords mettent des contraintes fortes sur ces polynômes. Bernard et Jin ont montré qu'en fait les relations ci-dessus déterminent uniquement les polynômes de lacets.

Exemples: $n = 5$

$$Q_{12345} = x_1(1-4x_2-3x_3-2x_4+9x_2x_3+7x_2x_4+5x_3x_4-14x_2x_3x_4)(1-x_5)$$

$$Q_{13245} = x_1(1-6x_2-x_3-2x_4+9x_2x_3+10x_2x_4+2x_3x_4-14x_2x_3x_4)(1-x_5)$$

$$Q_{12435} = x_1(1-4x_2-4x_3-x_4+12x_2x_3+4x_2x_4+5x_3x_4-14x_2x_3x_4)(1-x_5)$$

$$Q_{14235} = x_1(1-6x_2-2x_3-x_4+12x_2x_3+7x_2x_4+2x_3x_4-14x_2x_3x_4)(1-x_5)$$

et

$$Q_{12345} = Q_{13452} = Q_{14523} = Q_{15234} = Q_{15432} = Q_{12543} = Q_{13254} = Q_{14325}$$

$$Q_{13245} = Q_{13254} = Q_{15423} = Q_{14523}$$

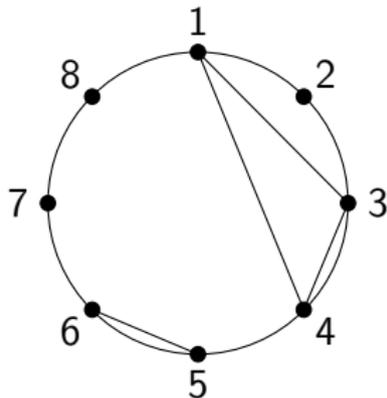
$$Q_{12435} = Q_{14352} = Q_{15342} = Q_{12534}$$

$$Q_{14235} = Q_{13524} = Q_{15234} = Q_{15324} = Q_{14253} = Q_{13425} = Q_{15243} = Q_{14325}$$

Le but est maintenant de donner une formule combinatoire explicite pour les Q_σ .

Partitions non-croisées

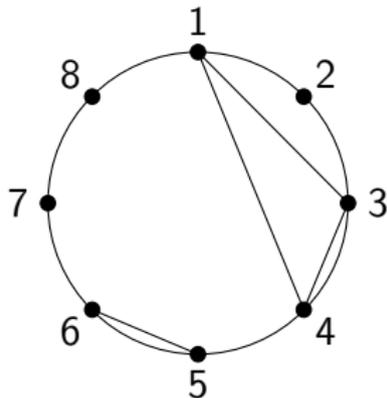
Partitions de $\{1, 2, \dots, n\}$ sans croisement:



$$\pi = \{1, 3, 4\} \cup \{2\} \cup \{5, 6\} \cup \{7\} \cup \{8\}$$

Partitions non-croisées

Partitions de $\{1, 2, \dots, n\}$ sans croisement:

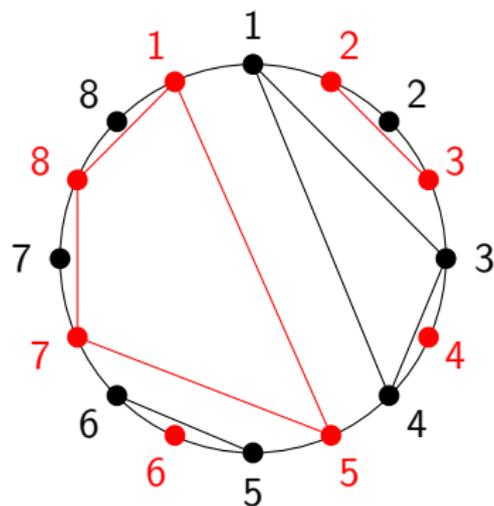


$$\pi = \{1, 3, 4\} \cup \{2\} \cup \{5, 6\} \cup \{7\} \cup \{8\}$$

$$|NC(n)| = \text{Cat}_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Les partitions non-croisées forment un treillis pour l'ordre du raffinement des partitions.

Complémentaire de Kreweras



$$\pi = \{1, 3, 4\} \cup \{2\} \cup \{5, 6\} \cup \{7\} \cup \{8\}$$

$$K(\pi) = \{1, 5, 7, 8\} \cup \{2, 3\} \cup \{4\} \cup \{6\}$$

Cumulants libres (R. Speicher)

A = algèbre avec unité, $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\varphi(1) = 1$.

Cumulants libres (R. Speicher)

A = algèbre avec unité, $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\varphi(1) = 1$.

Les *cumulants libres* sont des formes multi-linéaires ($\kappa_n = n$ -linéaire) sur A , $n = 1, 2, \dots$, définies implicitement par

$$\varphi(a_1 a_2 \dots a_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} \kappa_{\pi}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

où $\kappa_{\pi}(a_1, \dots, a_n) = \prod_{p \text{ partie de } \pi} \kappa_{|p|}(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{|p|}})$

Cumulants libres (R. Speicher)

A = algèbre avec unité, $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\varphi(1) = 1$.

Les *cumulants libres* sont des formes multi-linéaires ($\kappa_n = n$ -linéaire) sur A , $n = 1, 2, \dots$, définies implicitement par

$$\varphi(a_1 a_2 \dots a_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} \kappa_\pi(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$\text{où } \kappa_\pi(a_1, \dots, a_n) = \prod_{p \text{ partie de } \pi} \kappa_{|p|}(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{|p|}})$$

On a

$$\kappa_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} \mu(\pi) \varphi_\pi(a_1, \dots, a_n)$$

où μ est la *fonction de Möbius* de $NC(n)$:

$$\mu(\pi) = \prod_{p \text{ part of } K(\pi)} (-1)^{|p|-1} \text{Cat}_{|p|-1}$$

Exemples:

$$\kappa_1(\mathbf{a}_1) = \varphi(\mathbf{a}_1)$$

Exemples:

$$\kappa_1(\mathbf{a}_1) = \varphi(\mathbf{a}_1)$$

$$\kappa_2(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \varphi(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2) - \varphi(\mathbf{a}_1)\varphi(\mathbf{a}_2)$$

Exemples:

$$\kappa_1(a_1) = \varphi(a_1)$$

$$\kappa_2(a_1, a_2) = \varphi(a_1 a_2) - \varphi(a_1)\varphi(a_2)$$

$$\begin{aligned} \varphi(a_1 a_2 a_3) = & \quad \kappa_3(a_1, a_2, a_3) & \quad \{1, 2, 3\} \\ & + \kappa_1(a_1)\kappa_2(a_2, a_3) & \quad \{1\} \cup \{2, 3\} \\ & + \kappa_2(a_1, a_3)\kappa_1(a_2) & \quad \{1, 3\} \cup \{2\} \\ & + \kappa_2(a_1, a_2)\kappa_1(a_3) & \quad \{1, 2\} \cup \{3\} \\ & + \kappa_1(a_1)\kappa_1(a_2)\kappa_1(a_3) & \quad \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \end{aligned}$$

Exemples:

$$\kappa_1(a_1) = \varphi(a_1)$$

$$\kappa_2(a_1, a_2) = \varphi(a_1 a_2) - \varphi(a_1)\varphi(a_2)$$

$$\begin{aligned} \varphi(a_1 a_2 a_3) = & \kappa_3(a_1, a_2, a_3) & \{1, 2, 3\} \\ & + \kappa_1(a_1)\kappa_2(a_2, a_3) & \{1\} \cup \{2, 3\} \\ & + \kappa_2(a_1, a_3)\kappa_1(a_2) & \{1, 3\} \cup \{2\} \\ & + \kappa_2(a_1, a_2)\kappa_1(a_3) & \{1, 2\} \cup \{3\} \\ & + \kappa_1(a_1)\kappa_1(a_2)\kappa_1(a_3) & \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_3(a_1, a_2, a_3) = & \varphi(a_1 a_2 a_3) - \varphi(a_1 a_2)\varphi(a_3) - \varphi(a_1 a_3)\varphi(a_2) \\ & - \varphi(a_1)\varphi(a_2 a_3) + 2\varphi(a_1)\varphi(a_2)\varphi(a_3) \end{aligned}$$

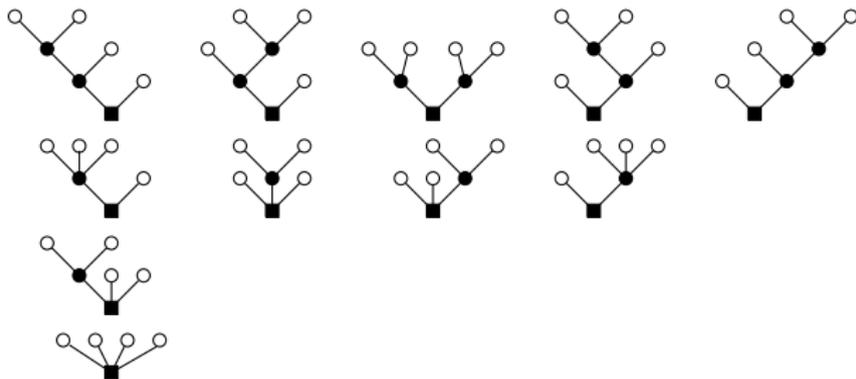
Les cumulants libres servent à définir les *variables libres* qui modélisent les propriétés des matrices aléatoires indépendantes de grande taille.

Arbres de Schröder

Arbres plans, enracinés, dont chaque sommet interne a au moins deux descendants.

Arbres de Schröder

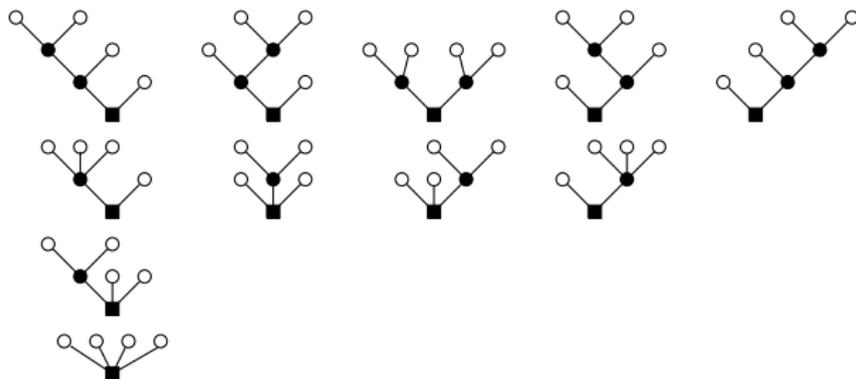
Arbres plans, enracinés, dont chaque sommet interne a au moins deux descendants.



Les arbres de Schröder à 4 feuilles

Arbres de Schröder

Arbres plans, enracinés, dont chaque sommet interne a au moins deux descendants.



Les arbres de Schröder à 4 feuilles

Comptés, en fonction du nombre de feuilles, par les petits nombres de Schröder $s_n = 1, 1, 3, 11, 45, \dots$ for $n = 1, 2, 3, \dots$ (A001003 in

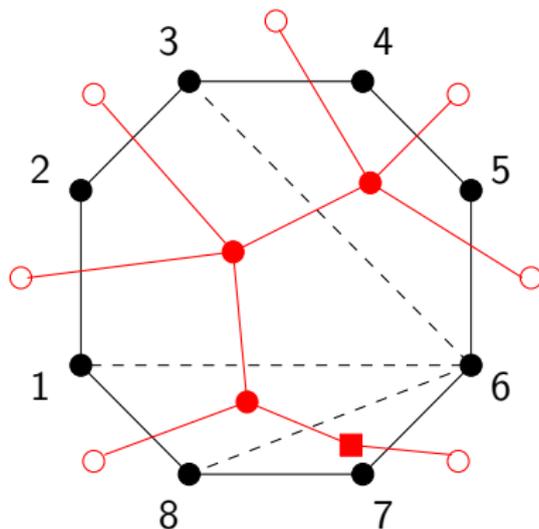
OEIS); série génératrice: $\frac{1+x-\sqrt{1-6x+x^2}}{4x}$.

Arbres de Schröder et associaèdre

Les arbres de Schröder correspondent à des *dissections de polygones* et aux faces de l'*associaèdre*.

Arbres de Schröder et associaèdre

Les arbres de Schröder correspondent à des *dissections de polygones* et aux faces de l'*associaèdre*.



Arbres de Schröder premiers

Un arbre de Schröder est *premier* si le descendant le plus à droite de la racine est une feuille.

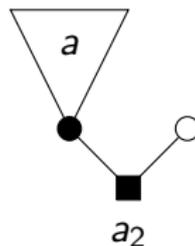
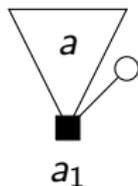
Comptés par les grand nombres de Schröder $S_n = 2s_{n-1}$.

Arbres de Schröder premiers

Un arbre de Schröder est *premier* si le descendant le plus à droite de la racine est une feuille.

Comptés par les grand nombres de Schröder $S_n = 2s_{n-1}$.

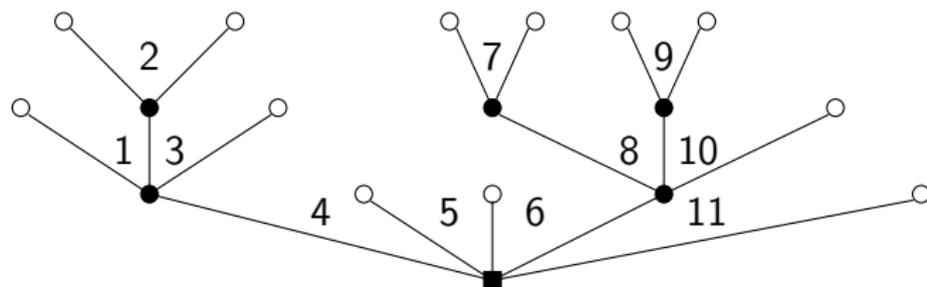
À chaque arbre de Schröder a , avec $n - 1$ feuilles on peut faire correspondre deux arbres de Schröder premiers a_1 et a_2 , avec n feuilles



Coins

Un *coin* est un angle entre deux arêtes consécutives.

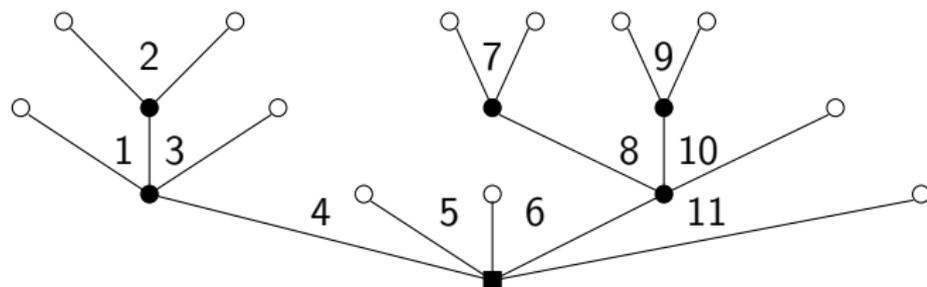
Un arbre de Schröder avec n feuilles a $n - 1$ coins, numérotés de gauche à droite.



Coins

Un *coin* est un angle entre deux arêtes consécutives.

Un arbre de Schröder avec n feuilles a $n - 1$ coins, numérotés de gauche à droite.



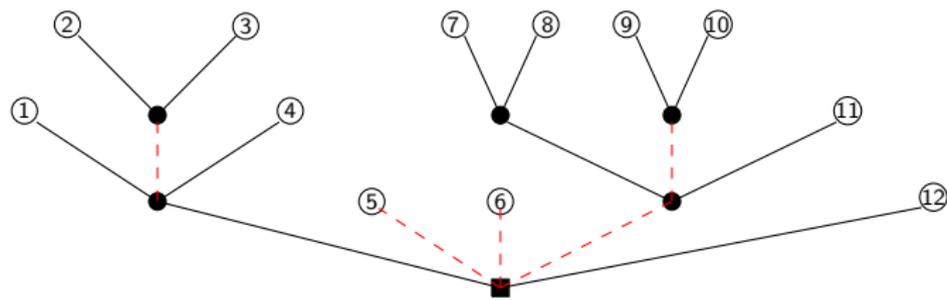
Un arbre de Schröder détermine une partition non-croisée de ses coins:

$$\pi(a) = \{1, 3\}, \{2\}, \{4, 5, 6, 11\}, \{7\}, \{8, 10\}, \{9\}$$

Arbres de Schröder premiers et fonction de Möbius sur $NC(n)$ (Josuat-Vergès, Menous, Novelli, Thibon, 2017)

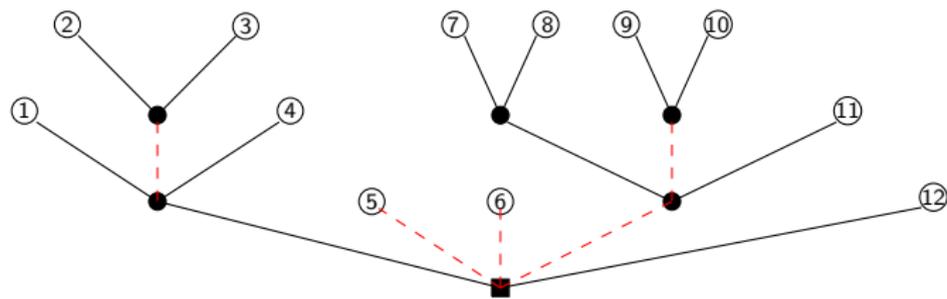
Arbres de Schröder premiers et fonction de Möbius sur $NC(n)$ (Josuat-Vergès, Menous, Novelli, Thibon, 2017)

Dans un arbre de Schröder premier on enlève les arêtes issues de chaque sommet interne, sauf la plus à droite et la plus à gauche.



Arbres de Schröder premiers et fonction de Möbius sur $NC(n)$ (Josuat-Vergès, Menous, Novelli, Thibon, 2017)

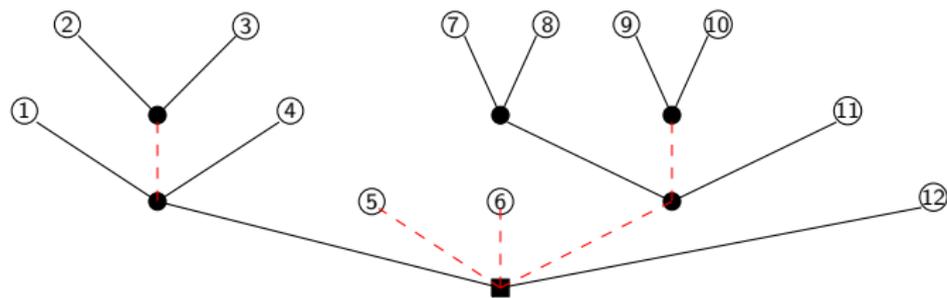
Dans un arbre de Schröder premier on enlève les arêtes issues de chaque sommet interne, sauf la plus à droite et la plus à gauche.



on obtient un forêt d'arbres binaires.

Arbres de Schröder premiers et fonction de Möbius sur $NC(n)$ (Josuat-Vergès, Menous, Novelli, Thibon, 2017)

Dans un arbre de Schröder premier on enlève les arêtes issues de chaque sommet interne, sauf la plus à droite et la plus à gauche.

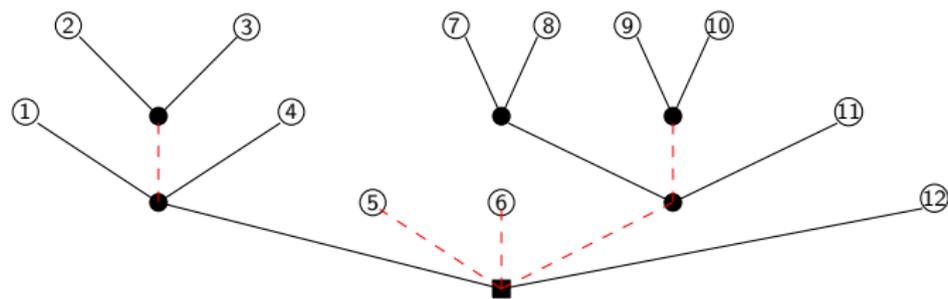


on obtient un forêt d'arbres binaires.

et une partition non-croisée des feuilles = $K(\pi(a))$ (si on enlève la feuille la plus à droite).

Arbres de Schröder premiers et fonction de Möbius sur $NC(n)$ (Josuat-Vergès, Menous, Novelli, Thibon, 2017)

Dans un arbre de Schröder premier on enlève les arêtes issues de chaque sommet interne, sauf la plus à droite et la plus à gauche.



on obtient un forêt d'arbres binaires.

et une partition non-croisée des feuilles = $K(\pi(a))$ (si on enlève la feuille la plus à droite).

Pour chaque $\pi \in NC(n)$ il y a

$$\prod_{p \text{ part de } K(\pi)} \text{Cat}_{|p|-1} = |\mu(\pi)|$$

arbres de Schröder premiers tels que $\pi(a) = \pi$.

Une formule combinatoire pour les polynômes de lacets

Théorème: pour tout $k \in [1, n]$ on a

$$Q_{\sigma}(x_1, \dots, x_n) = - \sum_{a \in pS_{n+1}} x^{a, k, \sigma}$$

Preuve

$$Q_{\sigma}(x_1, \dots, x_n) = - \sum_{a \in pS_{n+1}} x^{a, k, \sigma}$$

Preuve

$$Q_\sigma(x_1, \dots, x_n) = - \sum_{a \in pS_{n+1}} x^{a, k, \sigma}$$

On vérifie que ça ne dépend pas de k

Preuve

$$Q_\sigma(x_1, \dots, x_n) = - \sum_{a \in pS_{n+1}} x^{a, k, \sigma}$$

On vérifie que ça ne dépend pas de k

On vérifie les conditions aux bords: $(x_1$ et $(1 - x_n)$ facteurs de Q_σ)

Preuve

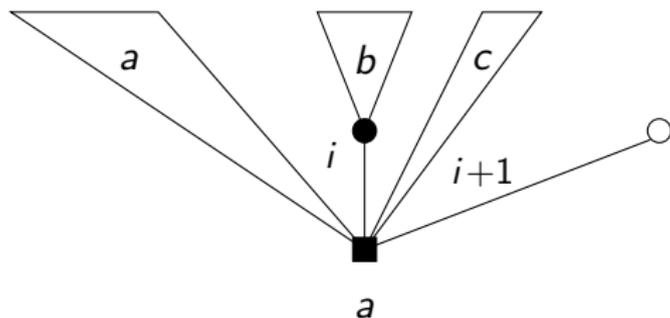
$$Q_\sigma(x_1, \dots, x_n) = - \sum_{a \in pS_{n+1}} x^{a, k, \sigma}$$

On vérifie que ça ne dépend pas de k

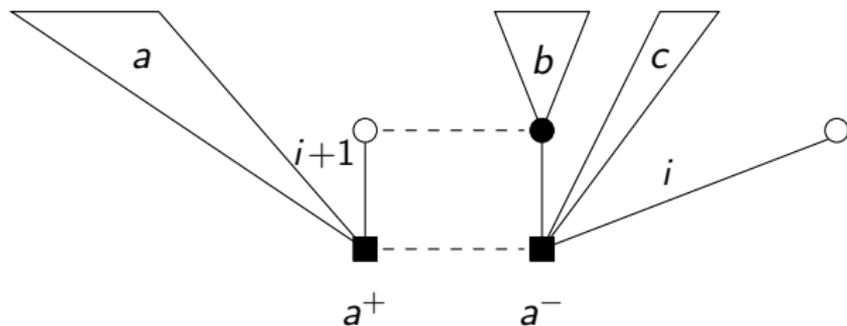
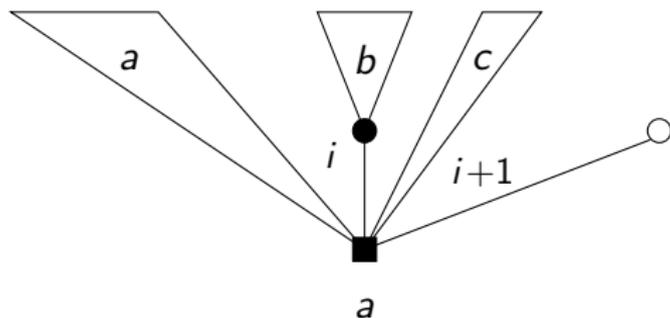
On vérifie les conditions aux bords: $(x_1$ et $(1 - x_n)$ facteurs de Q_σ)

Les propriétés de continuité et d'échange viennent des propriétés simples des arbres de Schröder.

Propriété d'échange et scindage d'un arbre de Schröder premier:



Propriété d'échange et scindage d'un arbre de Schröder premier:



Polynômes de lacets et cumulants libres

Sur $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue, pour $x \in [0, 1]$ on pose

$$\Pi_x = 1_{[0,x]}$$

Les Π_x sont des variables aléatoires (qui commutent).

$$\Pi_x \Pi_y = \Pi_{\min(x,y)}$$

Polynômes de lacets et cumulants libres

Sur $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue, pour $x \in [0, 1]$ on pose

$$\Pi_x = 1_{[0,x]}$$

Les Π_x sont des variables aléatoires (qui commutent).

$$\Pi_x \Pi_y = \Pi_{\min(x,y)}$$

Théorème

$$Q_\sigma(x_1, \dots, x_n) = \kappa_n(\Pi_{x_1}, \Pi_{x_{\sigma(1)}}, \Pi_{x_{\sigma^2(1)}}, \dots, \Pi_{x_{\sigma^{n-1}(1)}})$$

Polynômes de lacets et cumulants libres

Sur $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue, pour $x \in [0, 1]$ on pose

$$\Pi_x = 1_{[0,x]}$$

Les Π_x sont des variables aléatoires (qui commutent).

$$\Pi_x \Pi_y = \Pi_{\min(x,y)}$$

Théorème

$$Q_\sigma(x_1, \dots, x_n) = \kappa_n(\Pi_{x_1}, \Pi_{x_{\sigma(1)}}, \Pi_{x_{\sigma^2(1)}}, \Pi_{x_{\sigma^{n-1}(1)}})$$

Preuve: utilise la relation entre arbres de Schröder, $NC(n)$ et sa fonction de Möbius.

RÉSUMÉ

RÉSUMÉ

À partir du QSSEP on a construit une matrices de corrélations

$$G_{ij} = Tr(\rho c_i c_j^\dagger)$$

RÉSUMÉ

À partir du QSSEP on a construit une matrices de corrélations

$$G_{ij} = \text{Tr}(\rho c_i c_j^\dagger)$$

Les cumulants des coefficients de cette matrices donnent les polynômes de lacets quand $N \rightarrow \infty$ ($i_k/N \rightarrow x_k$)

$$E[G_{i_1 i_{\sigma^{p-1}(1)}} G_{i_{\sigma^{p-1}(1)} i_{\sigma^{p-2}(1)}} \cdots G_{i_{\sigma(1)} i_1}]^c = \frac{1}{N^{p-1}} Q_\sigma(x_1, \dots, x_p) + O\left(\frac{1}{N^p}\right).$$

RÉSUMÉ

À partir du QSSEP on a construit une matrices de corrélations

$$G_{ij} = \text{Tr}(\rho c_i c_j^\dagger)$$

Les cumulants des coefficients de cette matrices donnent les polynômes de lacets quand $N \rightarrow \infty$ ($i_k/N \rightarrow x_k$)

$$E[G_{i_1 i_{\sigma^{p-1}(1)}} G_{i_{\sigma^{p-1}(1)} i_{\sigma^{p-2}(1)}} \cdots G_{i_{\sigma(1)} i_1}]^c = \frac{1}{N^{p-1}} Q_\sigma(x_1, \dots, x_p) + O\left(\frac{1}{N^p}\right).$$

Les polynômes de lacets sont des cumulant libres:

$$\Pi_x = 1_{[0,x]}; \quad x \in [0, 1]$$

$$Q_\sigma(x_1, \dots, x_n) = \kappa_n(\Pi_{x_1}, \Pi_{x_{\sigma(1)}}, \Pi_{x_{\sigma^2(1)}}, \Pi_{x_{\sigma^{n-1}(1)}})$$

Il est très étonnant de trouver des cumulants libres de variables aléatoires qui commutent!

MERCI