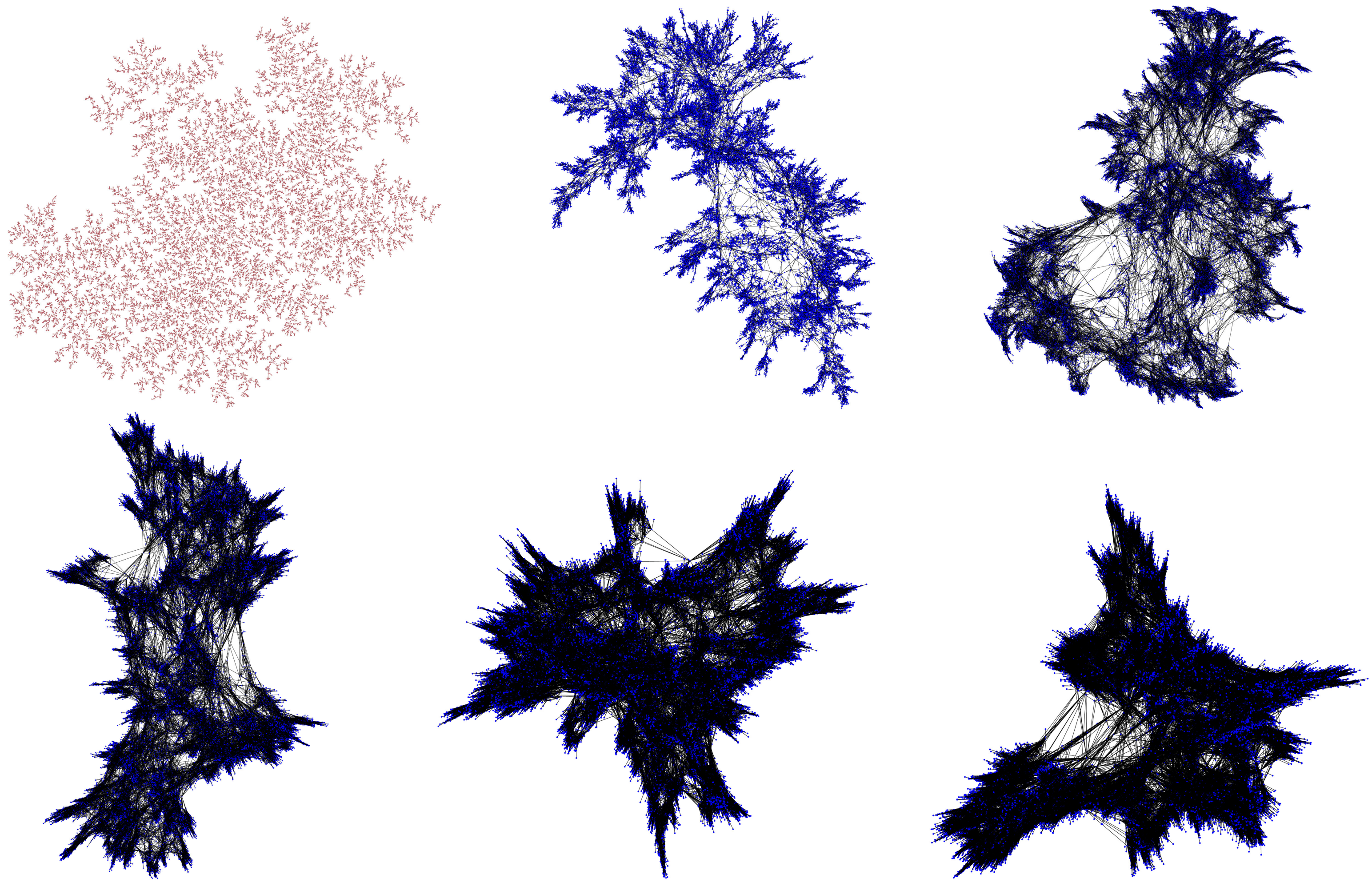
Les feuilletages aléatoires

à la recherche d'un analogue à la carte Brownienne en dimension supérieure.

Luca Lionni & JF. Marckert

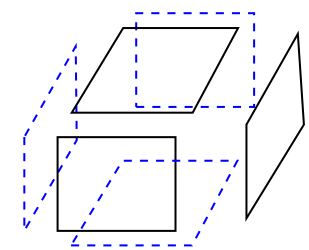


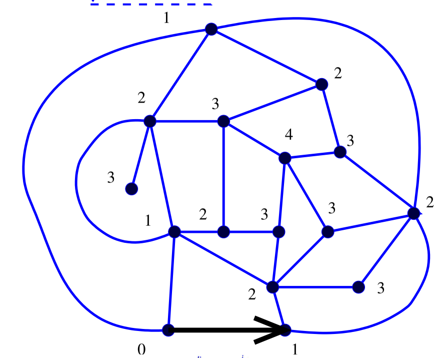
Juin 2022, IHP.

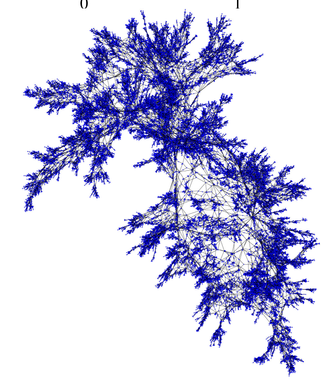
La carte Brownienne

- Diamètre des quadrangulations unif. à n faces : ordre $n^{1/4}$ [Ph. Chassaing & G. Schaeffer 2004]
- Définition de la carte Brownienne [JFM - A. Mokkadem [2006]]
- CV des quad. normalisées vers elle pour une mauvaise topologie

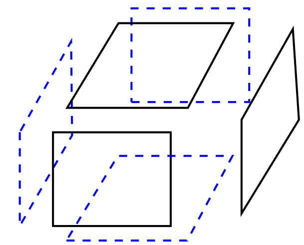
- Convergence des quad. normalisées vers la carte Brownienne pour Gromov Hausdorff [JF Le Gall 2013 + G. Miermont 2013] .
- Topologie de la carte Brownienne [JF LG & F.Paulin] , [G. Miermont] : ps. sphérique, dim Hausdorff 4
- dimension spectrale 2 ([R. Rhodes & V. Vargas 13] , [Gwynne–Miller 17])

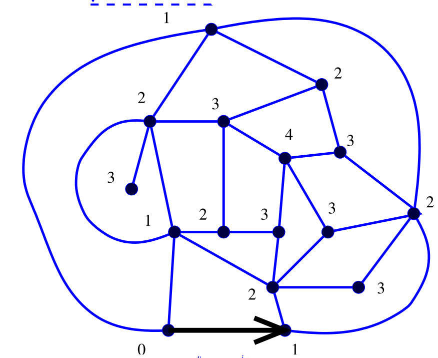


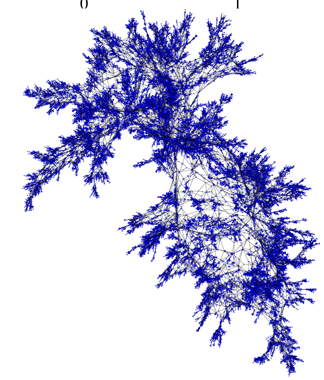




La carte Brownienne







- Diamètre des quadrangulations unif. à n faces : ordre $n^{1/4}$ [Ph. Chassaing & G. Schaeffer 2004]
- Définition de la carte Brownienne [JFM - A. Mokkadem [2006]]
- CV des quad. normalisées vers elle pour une mauvaise topologie

- Convergence des quad. normalisées vers la carte Brownienne pour Gromov Hausdorff [JF Le Gall 2013 + G. Miermont 2013] .
- Topologie de la carte Brownienne [JF LG & F.Paulin] , [G. Miermont] : ps. sphérique, dim Hausdorff 4
- dimension spectrale 2 ([R. Rhodes & V. Vargas 13] , [Gwynne–Miller 17])

- universalité : La carte Brownienne et des variantes sont limites de nombreux modèles de cartes... ([JF Le Gall, G. Miermont, J. Bettinelli, N. Curien, M. Albenque, L. Addario-Berry, C. Marzouk, E. Fusy, Abraham, A. Carrance, L. Fredes, A. Sepulveda, O. Bernardi...])

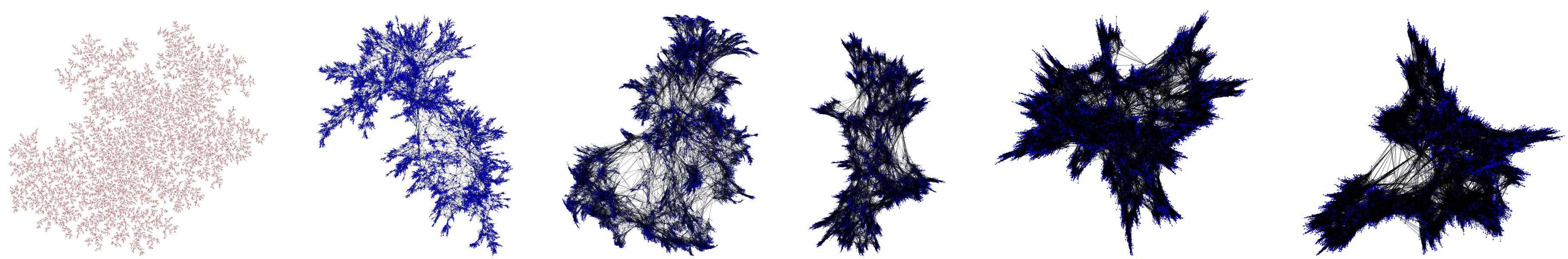
- La carte Brownienne est au coeur de la résolution de la gravité quantique Liouville (Polyakov) en 2D (unification de la théorie de la relativité générale / physique quantique) : [B. Duplantier, J. Miller et S. Sheffield] + nombreux développements ([R. Rhodes, V. Vargas, B. Cerclé] ...) lien avec champs libres gaussiens sur la sphère... [J. Miller, S. Sheffield, E. Gwynne, N. Berestycki, N. Holden, X. Sun ...]

Dans cet exposé :

- Présentation d'un candidat pour un analogue de la carte Brownienne en dimension supérieure.

- Motivation mathématique : la description et l'analyse de modèles aléatoires multi-dim est un challenge,

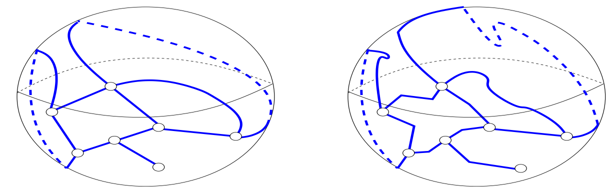
- Motivation physique : Construire des modèles en dimension supérieure pour le problème de la gravité quantique (une théorie englobant la théorie de la relativité générale et la physique quantique).



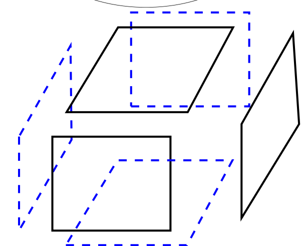
On cherche à construire un espace métrique aléatoire ayant de bonnes propriétés métriques, topologiques, dimensionnelles, spectrales etc. [Dans la même direction [Budd-Lionni, 2022]]

Several equivalent points of view on planar maps

- Drawing on the sphere



- Gluing of polygons



- Graph + cyclic order - permutations

Half edge labelling

– "edge permutations"

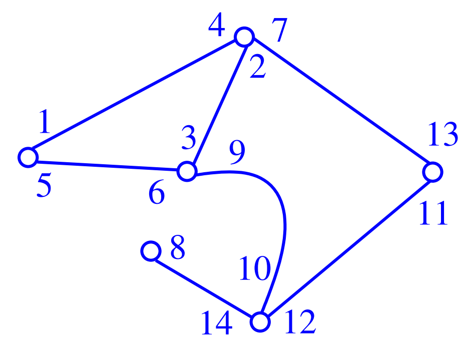
$\alpha = (1,4),(3,2),(5,6),(7,13),(9,10),(11,12),(18,14),$

– "vertices permutation"

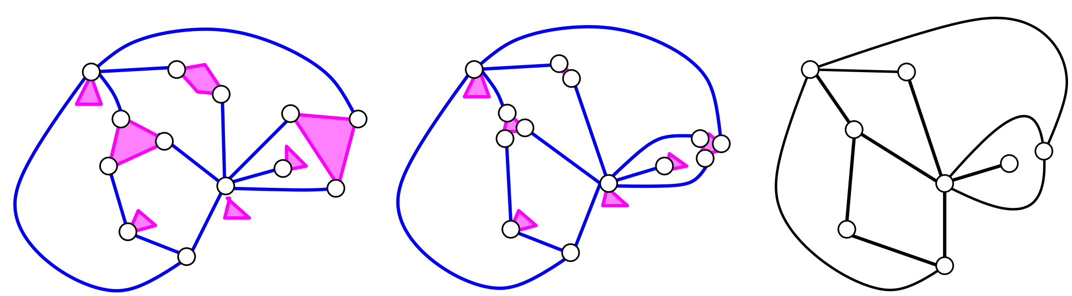
$\sigma = (1,5),(4,7,2),(13,11),(14,10,12),(8),(9,6,3)$

– "faces permutation"

$\phi = \sigma \circ \alpha = (3,4,5),(1,7,11,14,10,6),(2,13,12,9)$

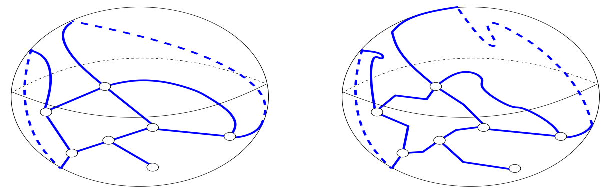


- Non crossing partition on a tree

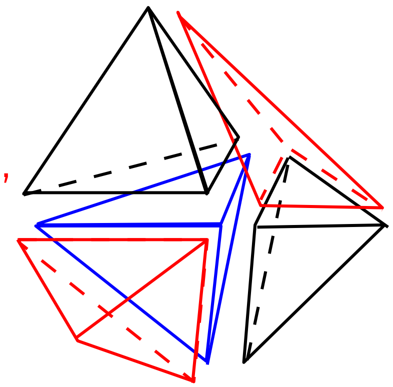


Building more intricate objects / “3D” ?

- (1) Drawing in 3D ?



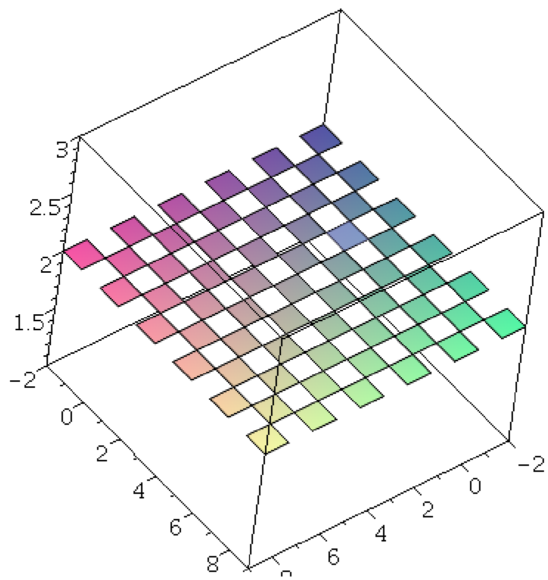
- (2) Gluing of polyhedrons / tensor models
Lead for the moment, to trivial limits [Gurau-Ryan, Ambjorn- Varsted, Carrance]

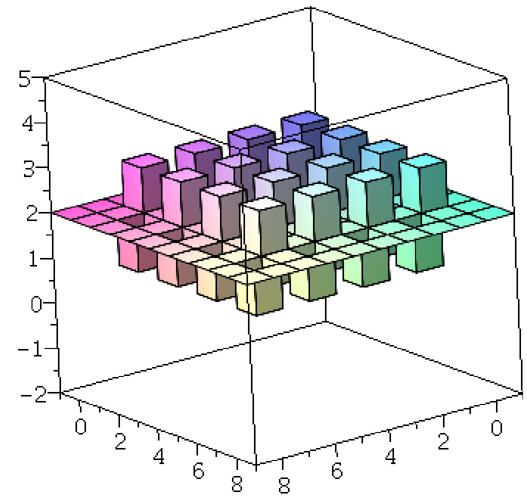


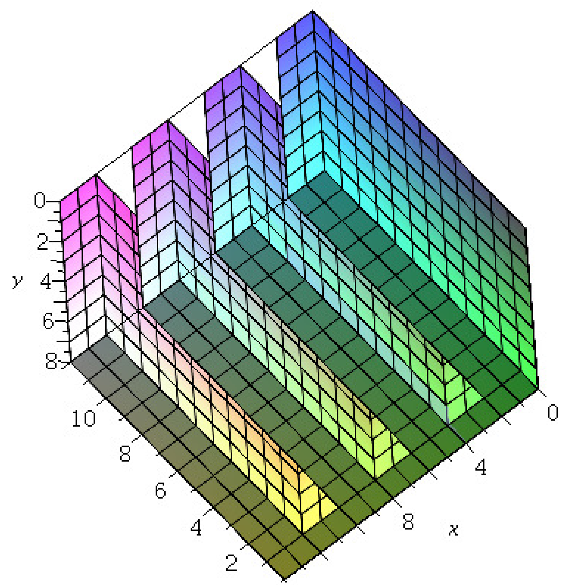
- (3) adding new identification in permutations,
“edge permutations” + “vertices permutation” + “faces permutation” + “4th permutation”+...

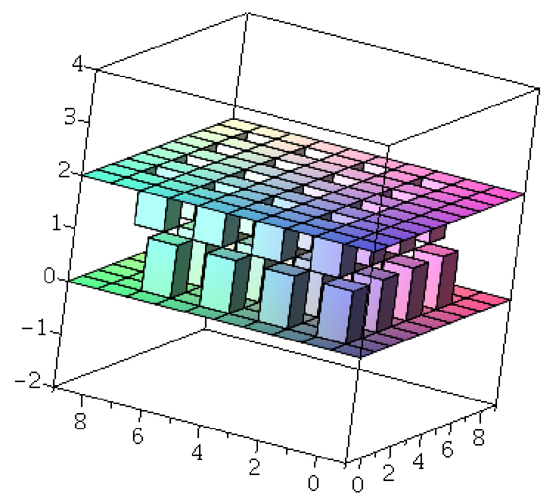
- (4) Adding identifications in planar maps ? → our approach.
  (3) and (4) are more or less equivalent

Why adding identifications in planar maps can give “3D objects” ?









→ origami type construction : notion of feuilletage !

Non random Feuilletages

The word Feuilletage is borrowed from the french culinary science.

Close concept = "pâte feuilletée" : obtained by successive foldings of a dough

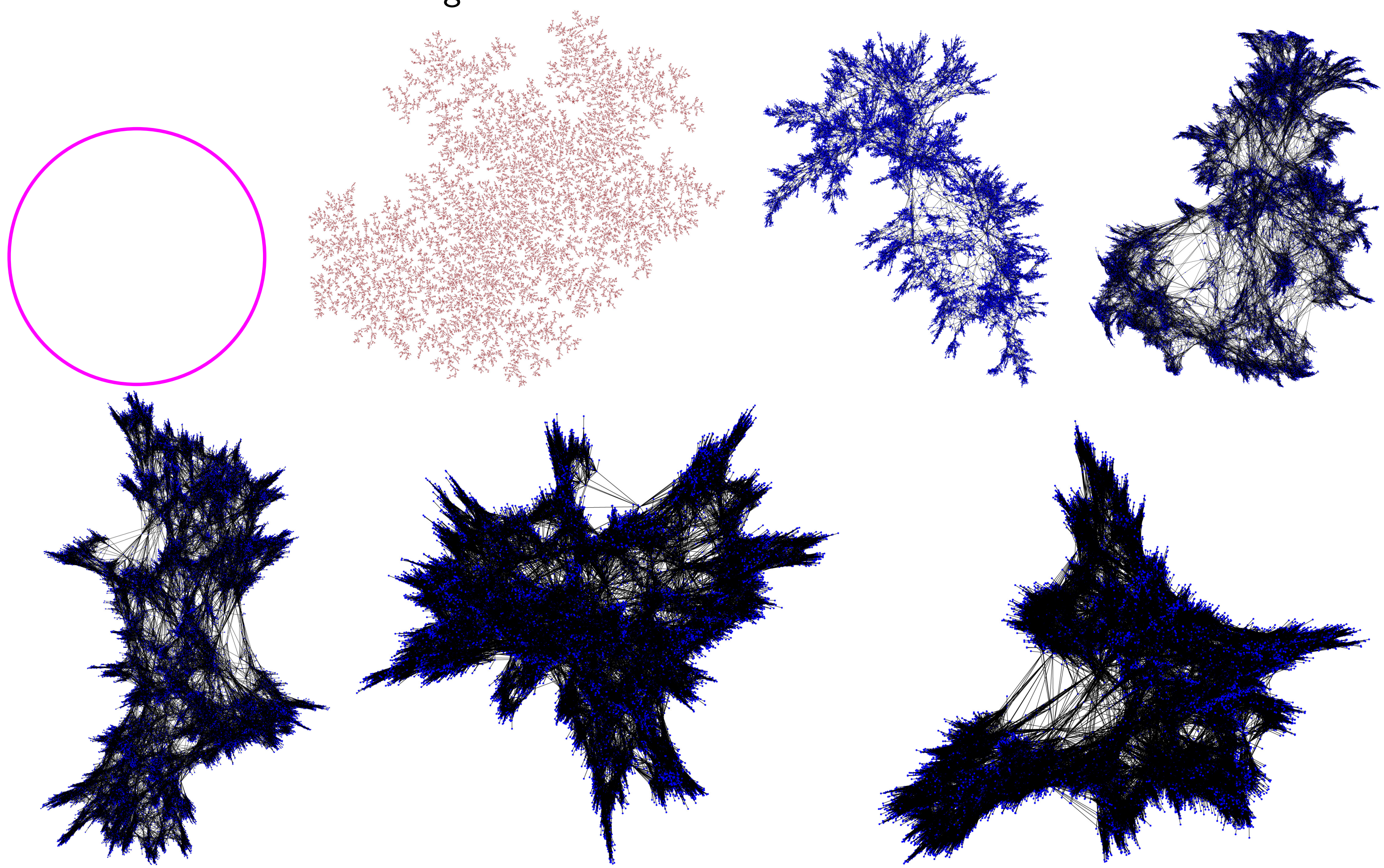
$= ([\text{ flour . water . salt}] \otimes \text{butter})^{10}.$

⚠⚠ Croissants are not done with a simple pâte feuilletée !

(Recipe = $([\text{flour . water. salt . yeats . milk . sugar }] \otimes \text{butter })^{10}$)

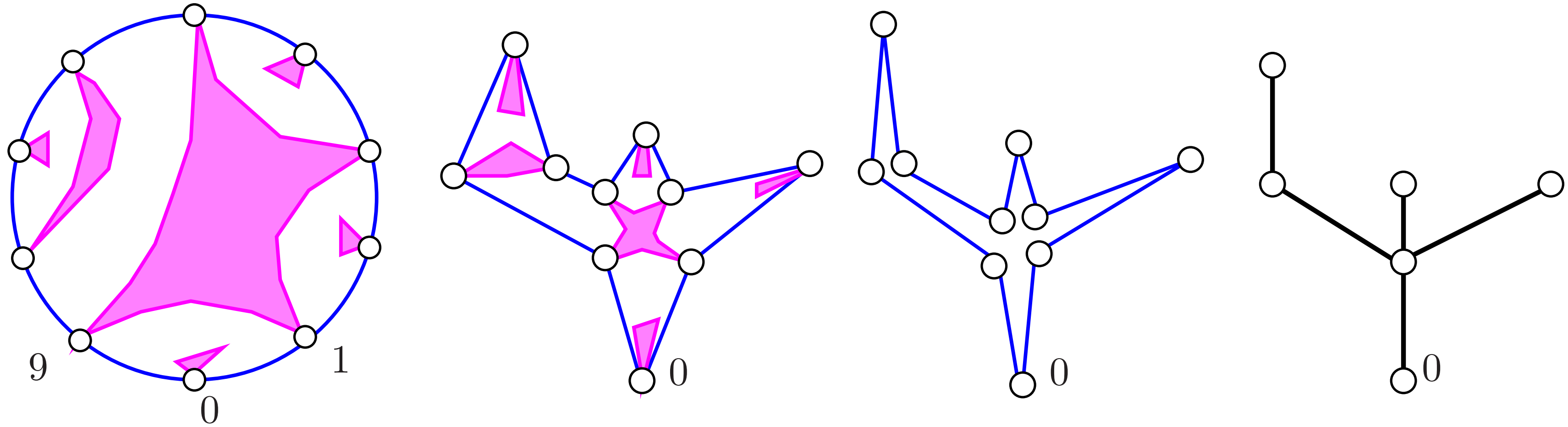
Random feuilletages

- RF_0 = the zeroth (random) feuilletage = the circle
- RF_1= the first random feuilletage = Aldous continuum random tree
- RF_2= the second random feuilletage = The Brownian map
- RF_3 = the third random feuilletage
- RF_4 = the fourth random feuilletage...



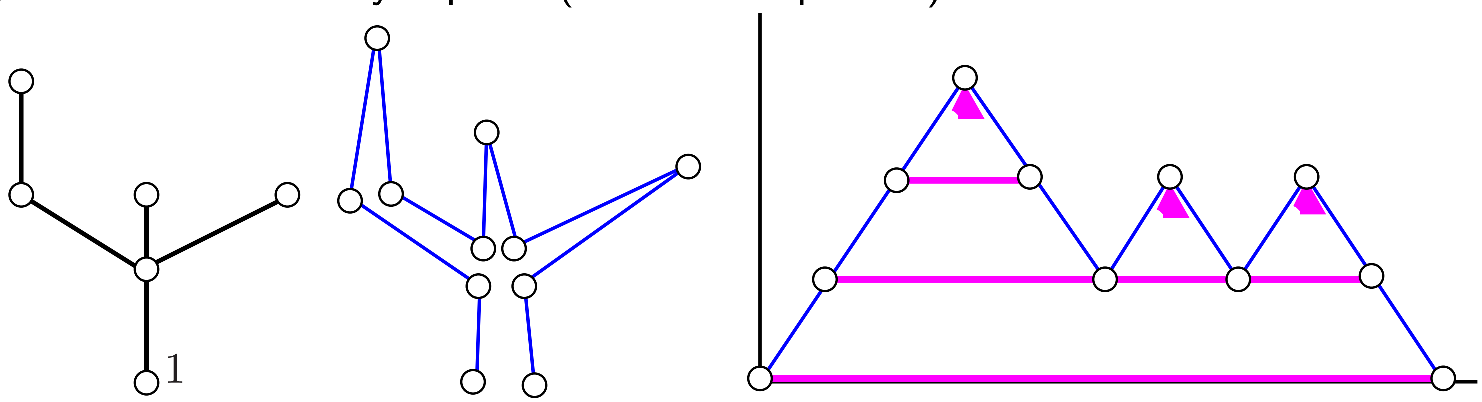
Discrete random feuilletages

Idea (classic) 1 : Planar trees $\leftrightarrow$ Non crossing partition of a regular polygon



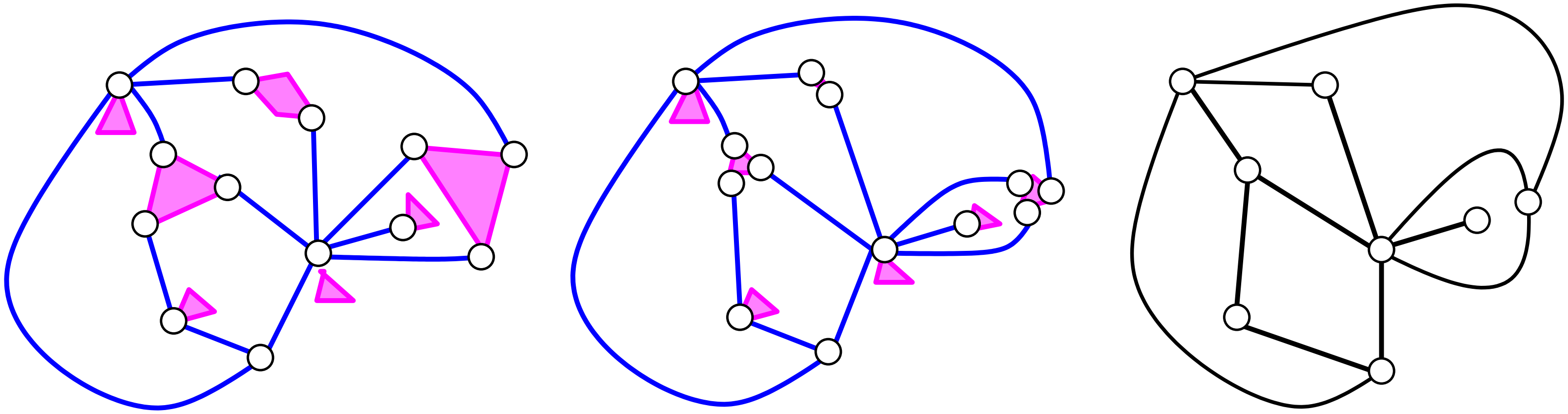
Non-crossing partitions are $\{0\}, \{1,3,5,9\}, \{2\}, \{6,8\}, \{7\}$.

Equivalently : Planar trees $\leftrightarrow$ Dyck paths (the contour process)



A tree = a feuilletage of a circle

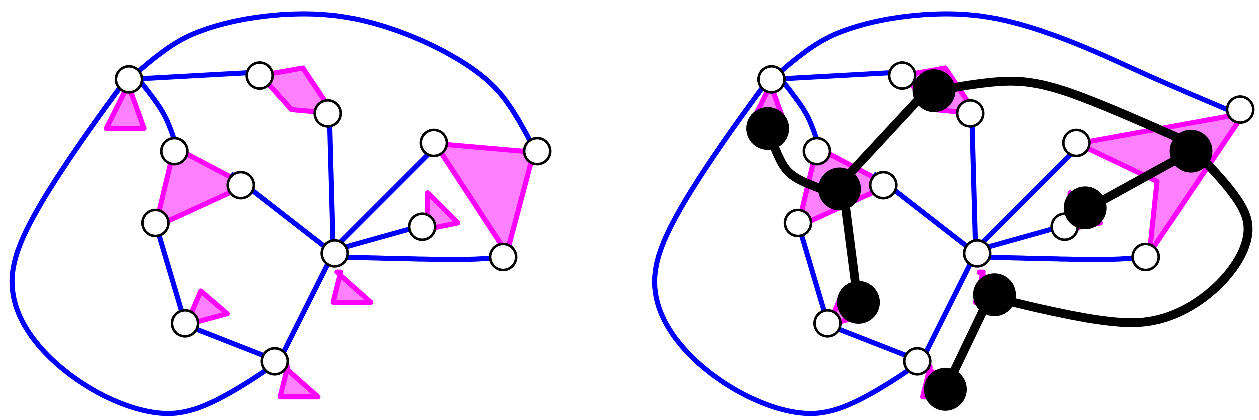
Discrete random feuilletages



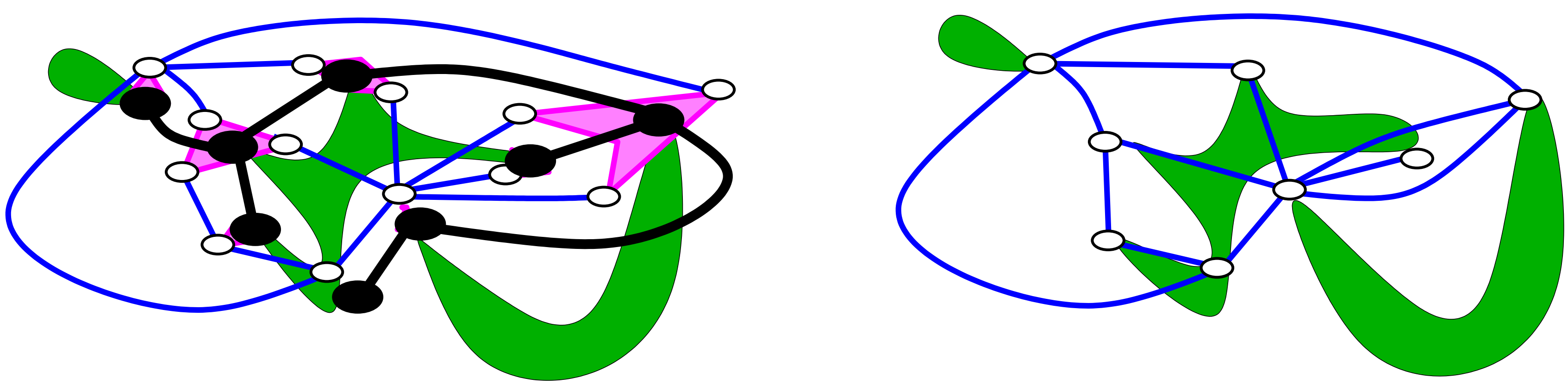
Idea (classic) 2 : planar maps $\leftrightarrow$ a tree + identification informations

A planar map = feuilletage of a tree
= feuilletage of a feuilletage of a circle.

Third feuilletage



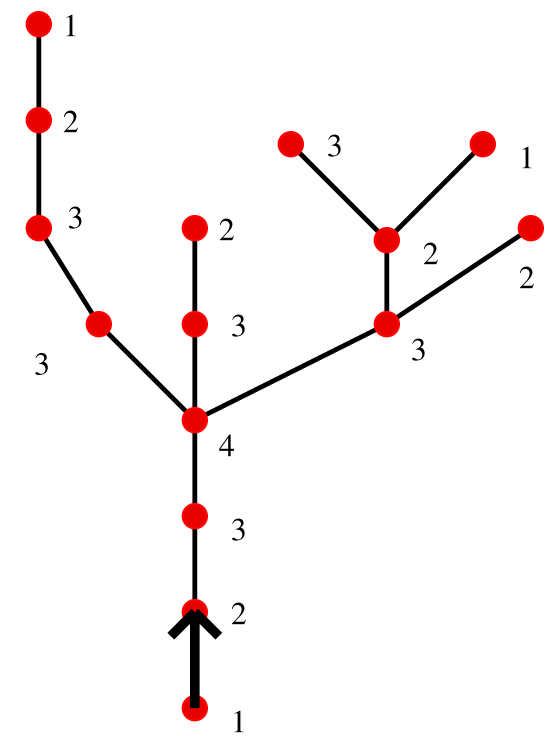
Identification of the non-crossing partition with a tree.



Quadrangulations and a pair of trees

Theorem (Cori & Vauquelin (1981), Schaeffer (1998)) :There exists a bijection between

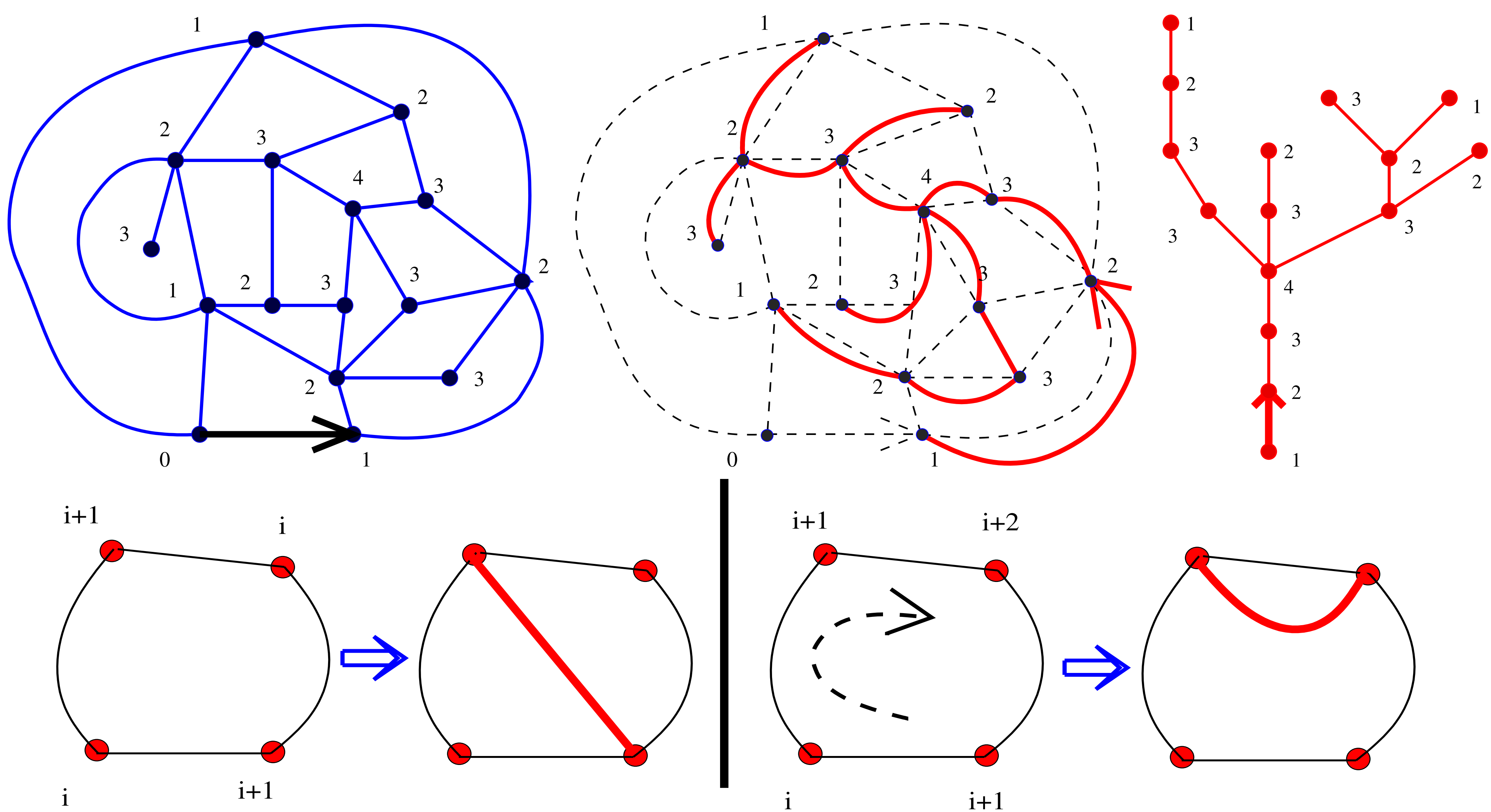
- The set of quadrangulations with n faces
- The set of well labeled trees with n edges :



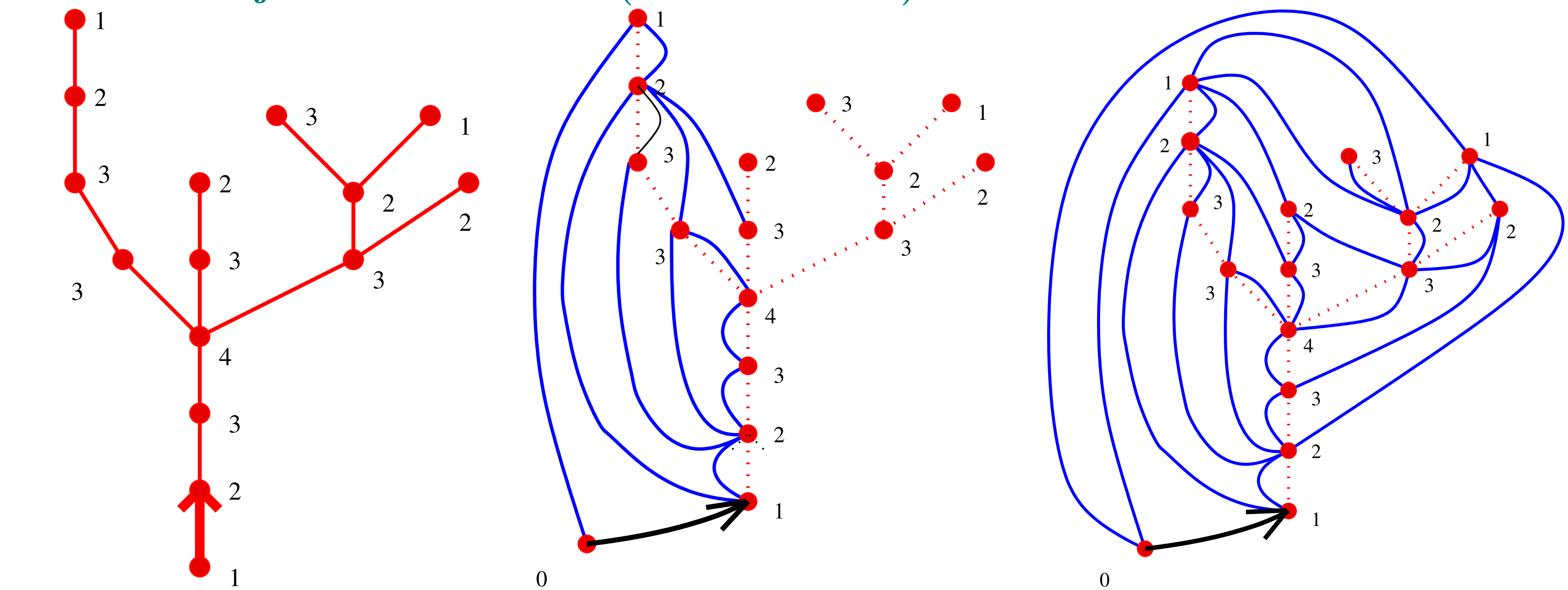
- Labels $\in \mathbb{N}^{\star}$.
- Label of the root $= 1$
- The difference between labels of neighbors

belongs to $\in \{-1, 0, +1\}$.

Quadrangulations and a pair of trees

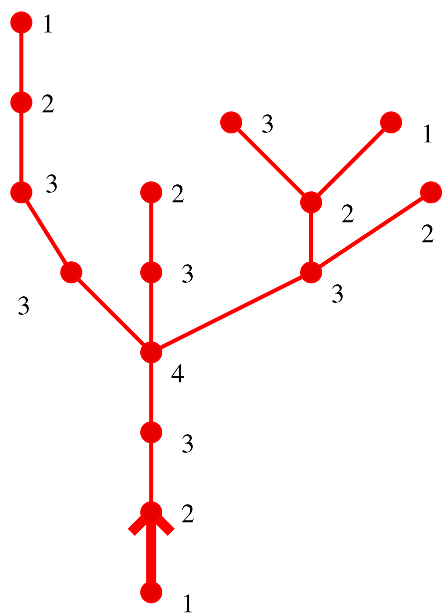


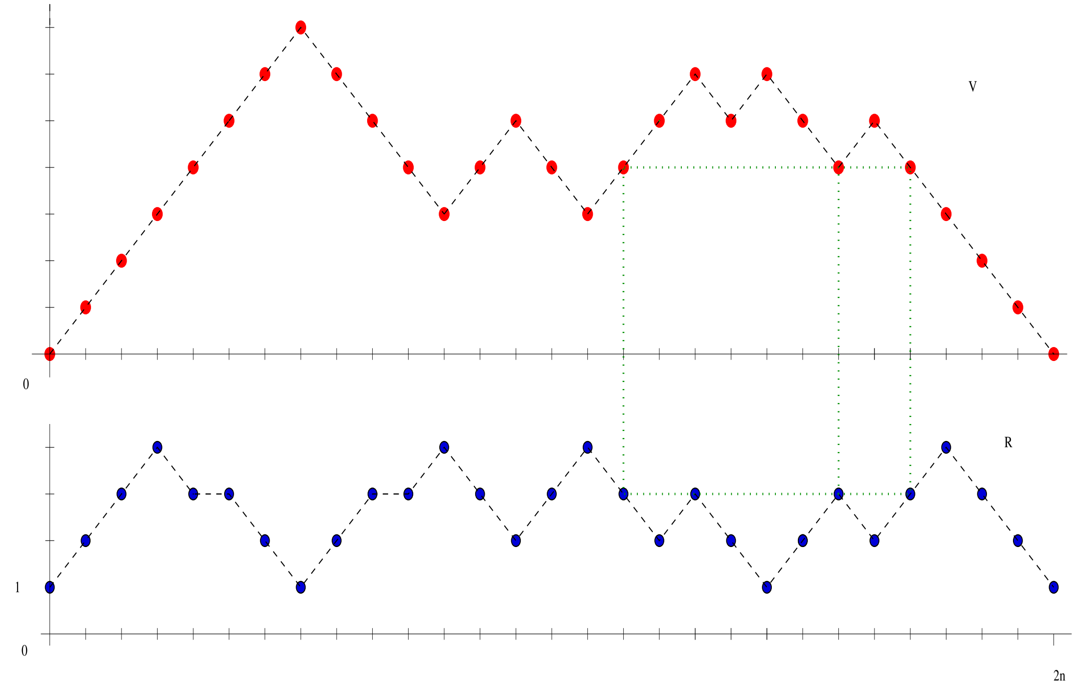
Quadrangulations and a pair of trees
Schaeffer's bijection^{-1} modified (M-Mokkadem)



Algorithm :

- Add a node with label 0 in the plane.
- walk around the tree : add an edge between the corner labeled k and the last corner labeled $k-1$ encountered

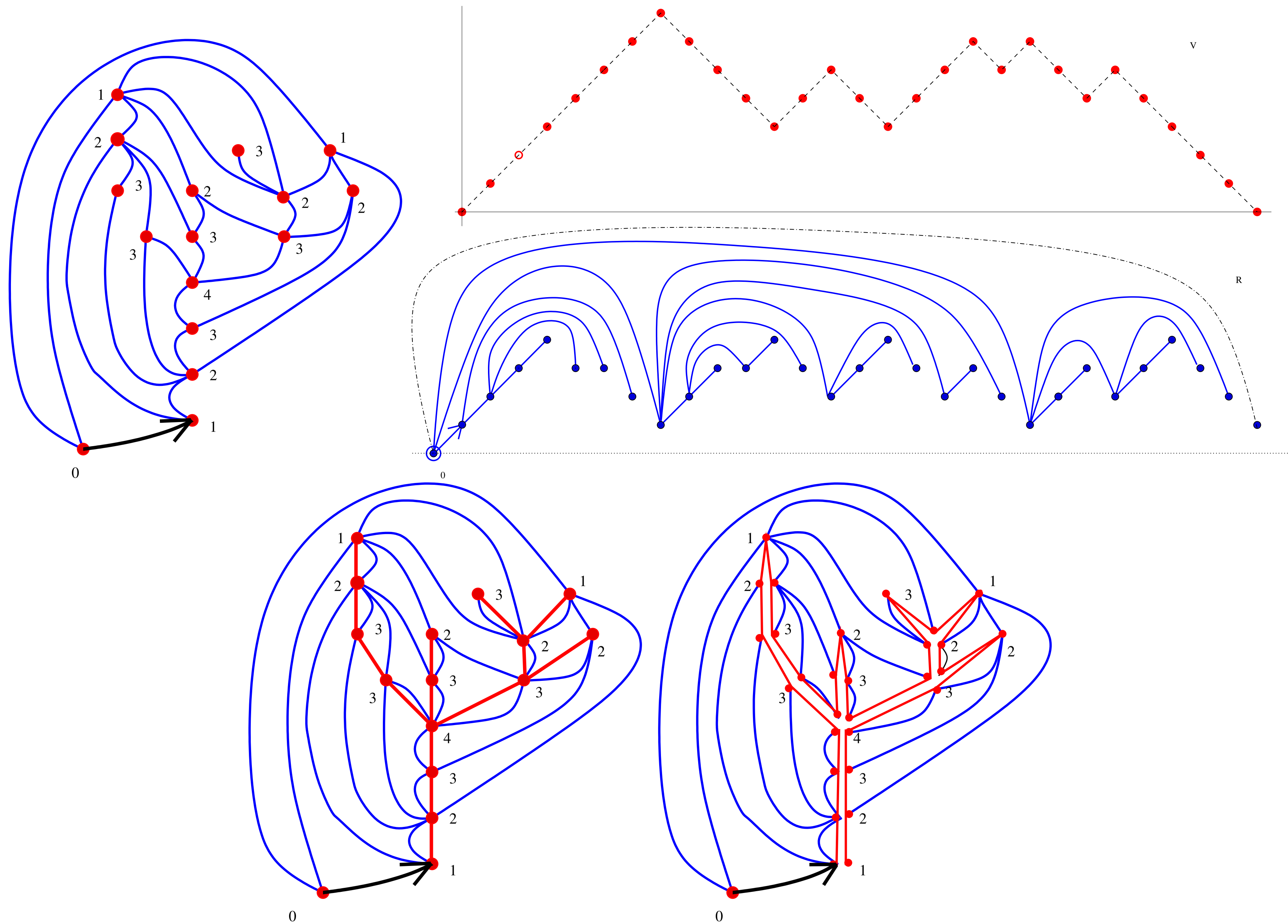


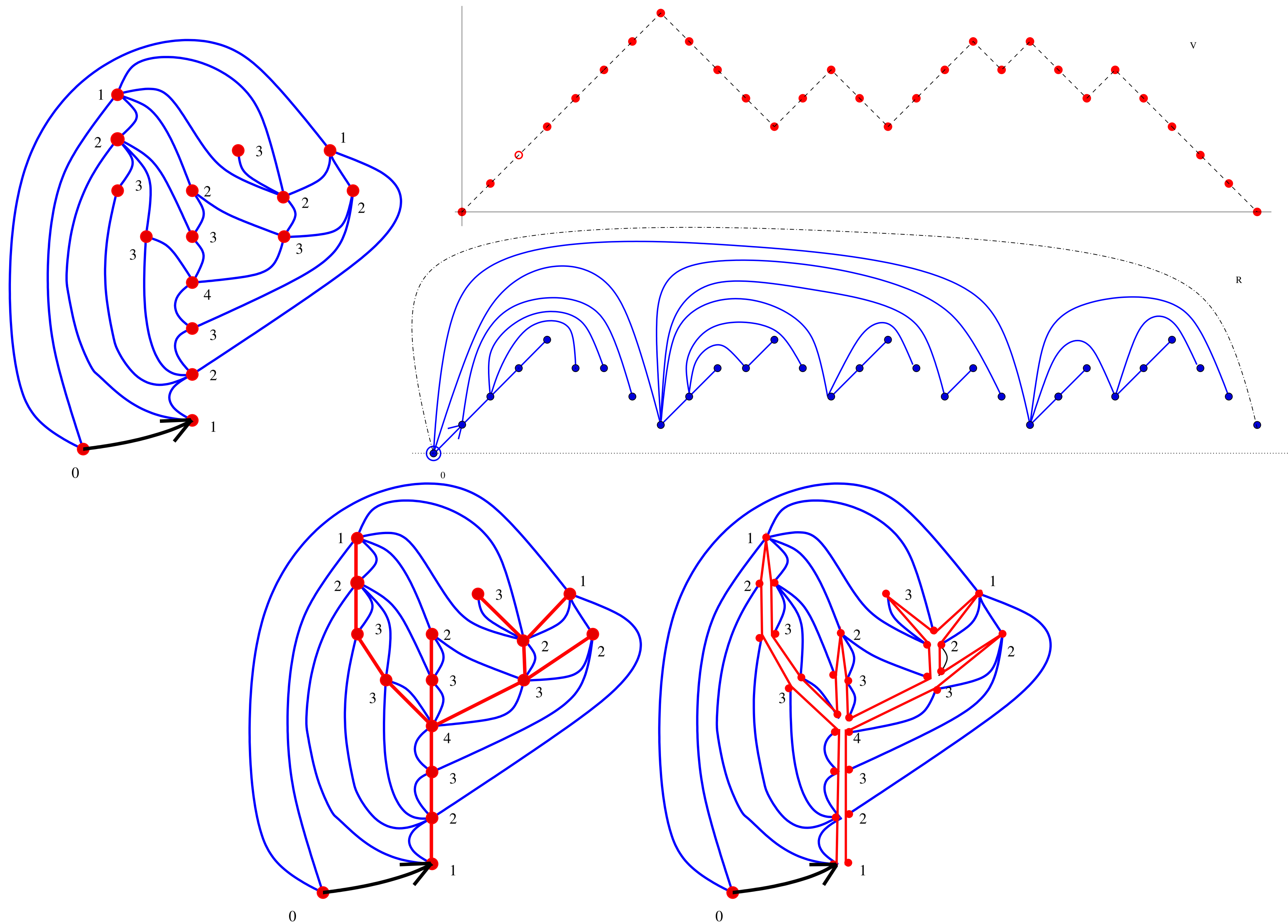


Encoding of well labeled trees with the help of two compatible processes :

- V_n tour of the tree
- L_n label process.

These two processes encode the corners





Le slogan qui va bien...

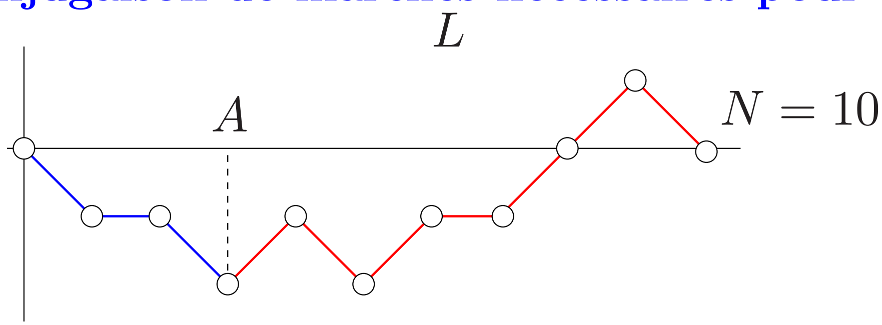
Le processus des étiquettes de l'arbre 1 = le processus des hauteurs de l'arbre 2

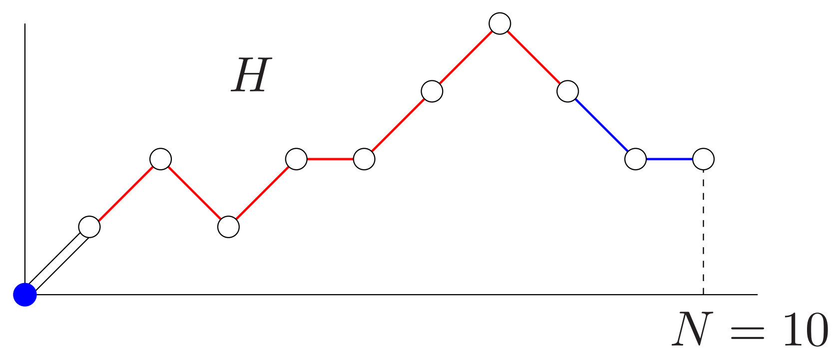
Pour simplifier : On relaxe la condition de positivité des étiquettes

→ Cela correspond alors à l'étude des quadrangulations pointées étiquetées

→ Le long des branches, les étiquettes, forment une marche aléatoire : échelle $n^{1/4}$

Conjugaison de marches nécessaires pour obtenir le processus des hauteurs :





Idée de l'itération : construction de serpents itérés

On construit une suite d'arbres **étiquetés** $(t^{(j)}, \ell^{(j)}), j \geq 1$:

- Arbre $t_n^{(1)}$: arbre planaire uniforme à n arêtes,
- $\ell_n^{(1)}$ étiquetage uniforme avec incréments $\{+1, -1, 0\}$ sans condition de positivité. $L^{(1)}$ le processus des étiquettes associé

Utiliser les étiquettes sur l'arbre j pour définir un arbre $j+1$.

$$\text{Conjugaison}(L_n^{(j)}) = H_n^{(j+1)} \qquad (\text{Processus hauteur de l'arbre } j+1)$$

$\rightarrow$ ça colle exactement en 2D pour décrire les quad. **pointées enracinées uniformes**

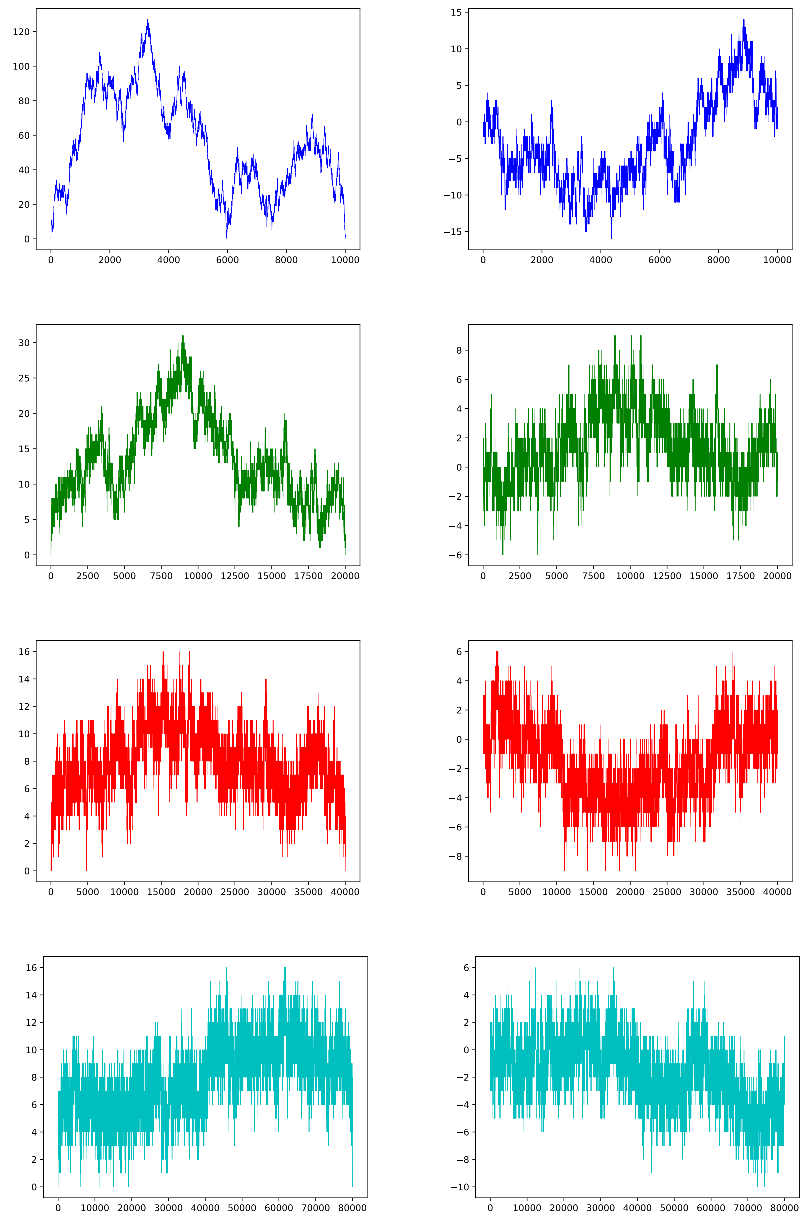
$$(t_n^{(1)}, \ell_n^{(1)}) \rightarrow (t_n^{(2)}, \ell_n^{(2)}), \rightarrow (t_n^{(3)}, \ell_n^{(3)}) \rightarrow \cdots$$

En détails

$$C_n^{(1)} \underset{\text{ajout d'etiquettes}}{\rightarrow} L_n^{(1)} \underset{\text{Conj}}{\rightarrow} H_n^{(2)} \rightarrow C_n^{(2)} \underset{\text{ajout d'etiquettes}}{\rightarrow} L_n^{(2)} \underset{\text{Conj}}{\rightarrow} H_n^{(3)} \rightarrow C_n^{(3)} \rightarrow \cdots$$

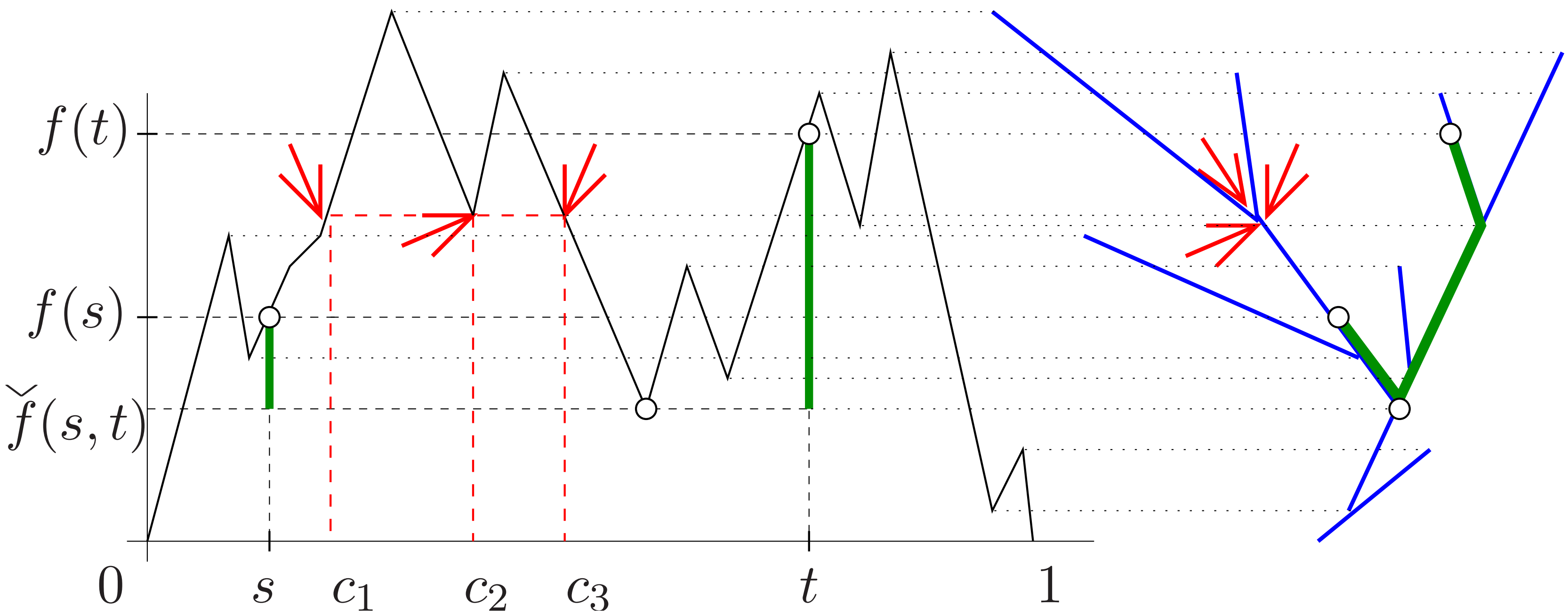
Echelle typique de $C_n^{(k)}$: $n^{1/2^k}$ (c'est-à-dire $n^{1/2}, n^{1/4}, n^{1/8}$, etc).

Des simulations



Contour processes of the first trees (left), label processes (right)

Une notion d'arbres continus



A toute fonction $f \in C[0,1]$, $f(0) = f(1) = 0$, $f \geq 0$ on associe un arbre $(A(f), d_f)$ qui est un espace métrique connexe compact, sans cycles :

- Ses noeuds sont les classes d'équivalences dans $[0,1]$ pour la relation,

$$x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y) = \min\{f(u), u \in [\min\{x,y\}, \max\{x,y\}],$$

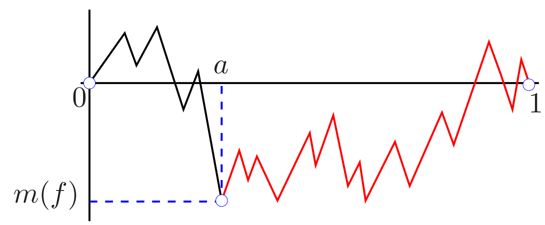
la distance est

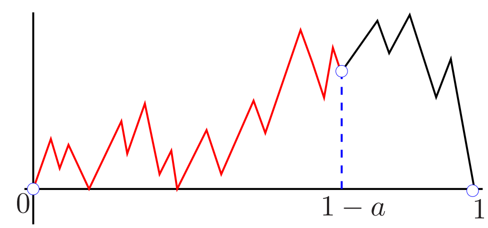
$$d_f(x,y) = f(x) + f(y) - 2\min\{f(u), u \in [\min\{x,y\}, \max\{x,y\}].$$

Construction des analogues Browniens

- $t^{(1)}$ = CRT, contour $c^{(1)}$ = excursion brownienne normalisée
- $\ell^{(1)}$ Etiquetage Brownien sur les branches... Le serpent Brownien.

Conjugaison continue :





Utiliser les étiquettes sur l'arbre j pour définir un arbre $j+1$.

$$\text{Conjugaison}(\ell^{(j)}) = h^{(j+1)}(\text{Processus etiquette} = \text{contour de l'arbre} j+1)$$

$\rightarrow$ ça colle exactement en 2D pour décrire **la carte brownienne**

$$(t^{(1)}, \ell^{(1)}) \rightarrow (t^{(2)}, \ell^{(2)}), \rightarrow (t^{(3)}, \ell^{(3)}) \rightarrow \cdots$$

En détail

$$c^{(1)} \underset{\text{ajout d'etiquettes}}{\longrightarrow} \ell^{(1)} \underset{\text{Conj}}{\rightarrow} c^{(2)} \underset{\text{ajout d'etiquettes}}{\longrightarrow} \ell_n^{(2)} \underset{\text{Conj}}{\rightarrow} c_n^{(3)} \rightarrow \cdots$$

Des analogies avec le Brownien itéré

- $c^{(k)}$ est $1/2^k - \epsilon$-Hölder : tous ces objets existent
- convergence jointe $((c_n^{(k)}, \ell_n^{(k)}), 1 \leq k \leq K) \xrightarrow{(d)} ((c^{(k)}, \ell^{(k)}), 1 \leq k \leq K)$.

Définition du $d$ème feuilletage

Intuitivement : C'est le $d$ème arbre de contour $c^{(d)}$ que l'on “colle” sur le $d-1$ème, que l'on colle sur le $d-2$ème... que l'on colle sur le 1er

Mathématiquement : c'est l'espace

$$F_d := [0,1]/ \sim_{c^{(1)},\cdots,c^{(d)}},$$

pour la relation la plus grossière qui étend les $\sim_{c^{(j)}}$,
muni de la métrique $D_{c^{(d)}}$ quotientée : les points à distance 0 pour l'une des $D_{c^{(j)}}$ sont identifiés.

Ce qu'il reste à faire

- démontrer que l'espace quotient obtenu est non trivial (en tant qu'espace métrique),
- comprendre la topologie de cet espace (dimension ?)
- montrer la convergence pour Gromov-Hausdorff,
- calculer les dimensions de Hausdorff, spectrale, etc,
- lier cet objet à la gravité quantique en $3D$, $4D$, $5D$, etc.
- Unifier la théorie de la relativité générale et la physique quantique.