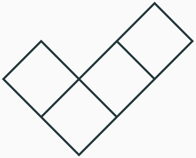
Limites de tableaux de Young aléatoires : une approche déterminantale

Jacopo Borga, **Cédric Boutillier**, Valentin Féray, Pierre-Loïc Méliot

Séminaire Flajolet, 27 septembre 2023

Tableaux de Young Standard (YST)

diagramme de Young d'une partition λ



Tableaux de Young Standard (YST)

diagramme de Young d'une partition λ

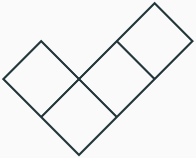
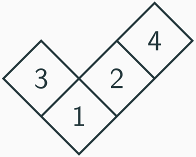


tableau de Young standard de forme λ

- remplissage des cases de λ de 1 à $n = |\lambda|$
- croissant $\uparrow$
- extension linéaire du poset décrit par λ



Formule des équerres (Frame, Robinson, Thrall)

f^λ : nombre de tableaux de Young de forme λ

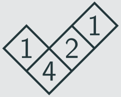
$h_\square$: longueur d'équerre de la case $\square$ dans λ

nb de cases dans diagonales au dessus à gauche et droite

$$f^\lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod_{\square \in \lambda} h_\square}$$

Exemple

$\lambda = (3, 1)$ avec longueurs d'équerre



$$f^\lambda = \frac{4!}{1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1} = 3$$

Grands tableaux de Young aléatoires

- forme globale fixée λ^0
- λ^N : dilatation de λ^0 par facteur N
- suite (T^N) de tableaux de Young uniformes de forme λ^N

Que peut-on dire du comportement typique ?

global : T^N renormalisé comme fonction au dessus de λ^0

local : position relative des éléments de T_N dans une fenêtre autour d'une case

Existence de forme limite

- Biane : théorie des représentations asymptotiques
  concentration $\Rightarrow$ existence forme limite
- Maślanka–Śniady (2022) : correspondance de Markov-Krein, compression libre…
- Wangru Sun (2018) : principe variationnel (entropie)

Les deux approches difficiles à manipuler

- Pittel–Romik (2007) : cas du rectangle

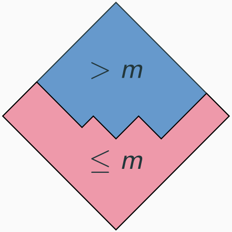
explicite mais pas généralisable

cas de Pittel–Romik : formes carrées

$$\lambda = (\underbrace{N, \ldots, N}_{N \text{ fois}}), \qquad m = \alpha N^2, \alpha \in]0,1[$$

ligne de niveau m délimite partition μ_m

- **en dessous :** nombres $\leq m$
  tableau de Young de forme μ_m

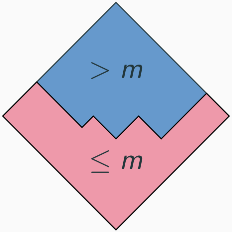


cas de Pittel–Romik : formes carrées

$$\lambda = (\underbrace{N, \ldots, N}_{N \text{ fois}}), \qquad m = \alpha N^2, \alpha \in]0,1[$$

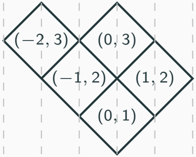
ligne de niveau m délimite partition μ_m

- **en dessous :** nombres $\leq m$
  tableau de Young de forme μ_m
- **au dessus :** nombres $> m$
  aussi tableau de Young
  après $j \mapsto N^2 + 1 - j$ et retournement

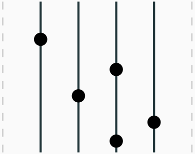


$$\mathbb{P}(\mu_m = \nu) = \frac{1}{f^\lambda} \cdot f^\nu \times f^{\lambda \setminus \nu}$$

Approche ici : lien avec config. de perles



λ



$V_\lambda = \{(t_{x,y}) \in [0,1]^{|\lambda|} \text{ ; inégalités}\}$

Stanley : tableau de Young de forme $\lambda \leftrightarrow$ simplexe de V_λ

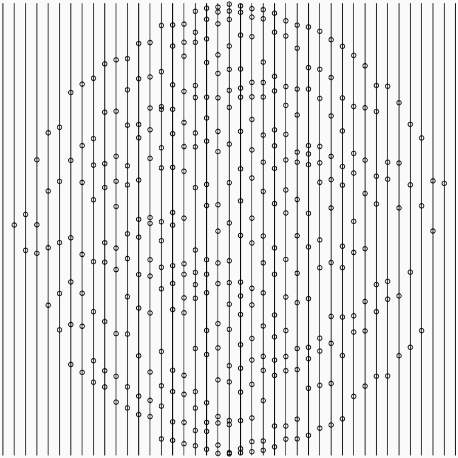
$$\mathrm{Vol}(V_\lambda) = \frac{1}{|\lambda|!} \cdot f^\lambda$$

Tableau de Young poissonisé / continu :

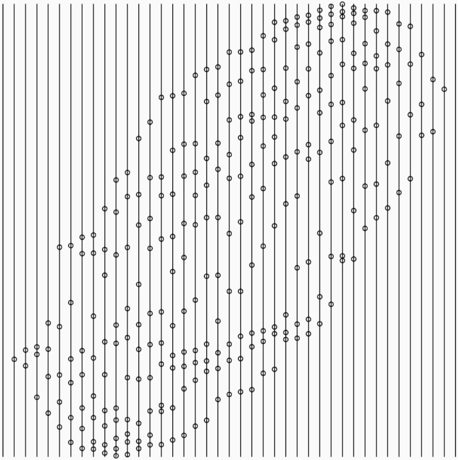
forme λ remplie avec ordonnées des perles

Q : limite d'échelle pour perles / tableaux poissonisés ?

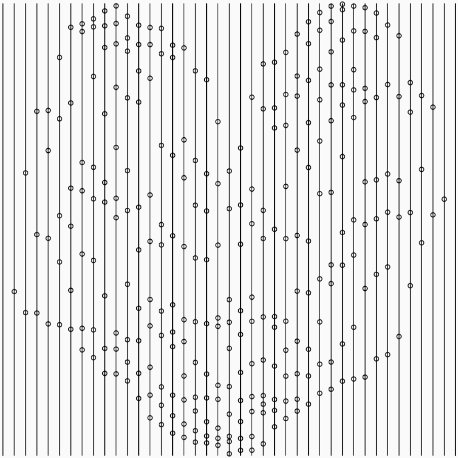
Perles pour une forme carrée 20×20



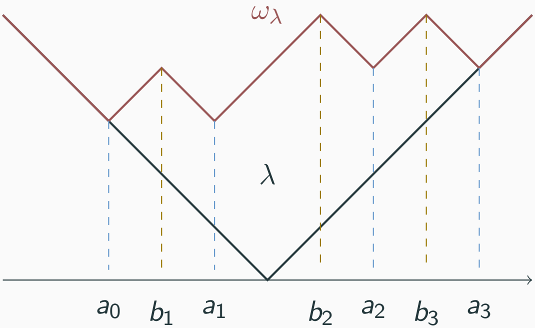
Perles pour une forme rectangle 20×10



Perles pour une forme « en L » 20×10



Encodage de la forme de base (Kerov)



$$a_0 < b_1 < a_1 < \cdots < b_m < a_m \in \mathbb{Z}$$

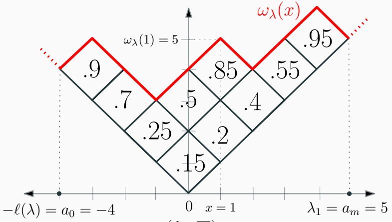
$$\sum_{i=0}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m} b_i$$

Forme limite pour les perles : fonction de hauteur $H_{\lambda,T}$

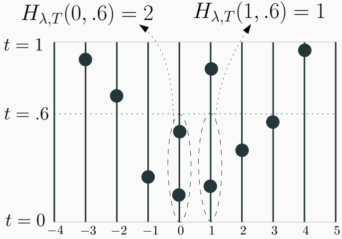
Pour $(x,t) \in \mathbb{Z} \cap [a_0, a_m] \times [0,1]$,

$H_{\lambda,T}(x,t) =$ nombre de perles sur le fil x sous le niveau t

- $T(x,y) < t \Leftrightarrow H_{\lambda,T}(x,t) > \frac{1}{2}(y - |x|)$
- $H_{\lambda,T}(x,0) = 0$
- $H_{\lambda,T}(x,1) = \frac{1}{2}(\omega_\lambda(x) - |x|)$



(λ, T)



$M_{\lambda,T}$

Lemme

Pour $(x,t) \in [a_0, a_m] \times [0,1]$*, l'équation en la variable* U *:*

$$U \prod_{i=1}^{n} (x - b_i + U) = (1-t) \prod_{i=0}^{m} (x - a_i + U)$$

a au plus deux solutions non réelles (conjuguées)

Définition

- région *liquide* : $\{(x,t)\ ;\ 2 \text{ racines non-réelles } U_c, \overline{U_c}\}$

$$\alpha(x,t) := \frac{\operatorname{Im}(U_c)}{1-t}, \quad \beta(x,t) := \frac{\operatorname{Re}(U_c)}{|U_c|}$$

- région *gelée* : $\{(x,t)\ ;\ \text{pas de racines non-réelles}\}$

$$\alpha(x,t) := 0$$

Forme limite pour les perles

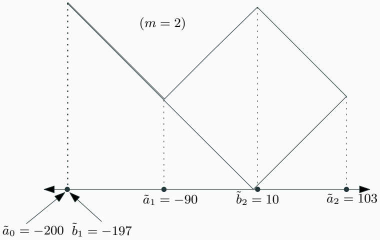
Théorème (BBFM)

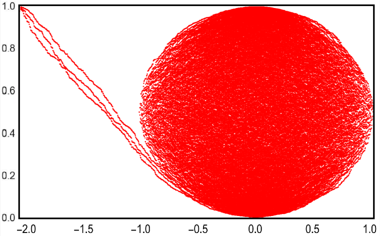
Quand $N \to \infty$, *la fonction de hauteur renormalisée* $H_{\lambda^N, T^N}(\lfloor Nx \rfloor, t)$ *converge en probabilité pour la norme sup vers*

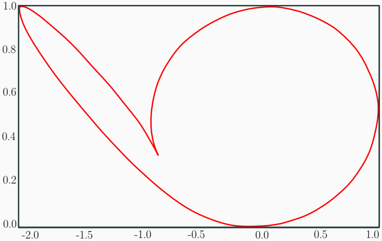
$$H^\infty(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \alpha(x,s) ds$$

- Moralement, α : densité de perles le long du fil
- En utilisant $T(x,y) < t \Leftrightarrow H_{\lambda,T}(x,t) > \frac{1}{2}(y - |x|)$, on peut remonter à la forme limite de T^N renormalisé comme fonction au dessus de λ_0
- **Attention !** Certaines discontinuités pour T^∞

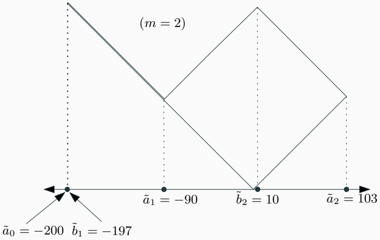
L'exemple de la « pipe »

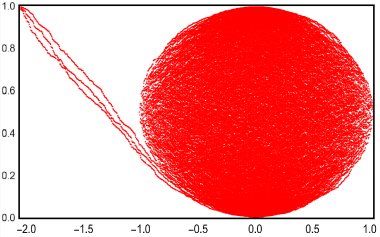


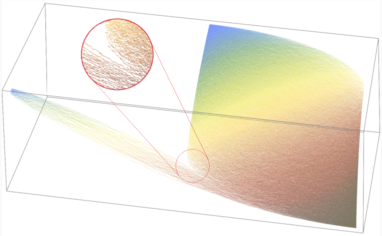


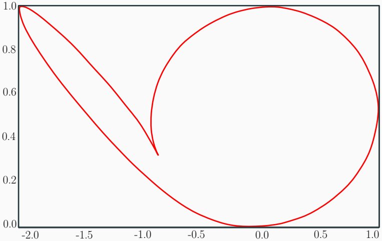


L'exemple de la « pipe »







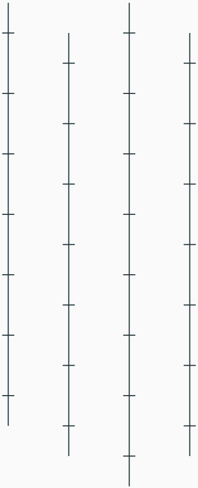


Idées de preuve

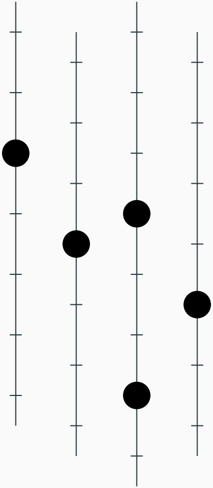
Gorin–Rahman (2019)

- étude des tableaux de Young poissonisés de taille finie
- intéressés par le cas « escalier » en lien avec les *random sorting networks*
- processus déterminantal avec noyau explicite
- noyau : limite à partir d'un processus discrétisé

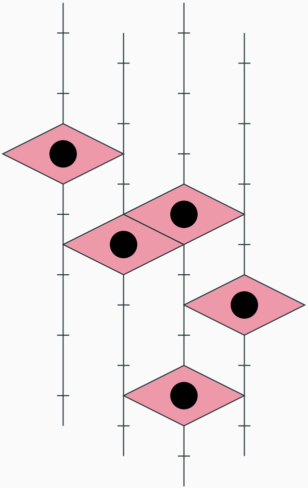
Configurations de perles discrétisées



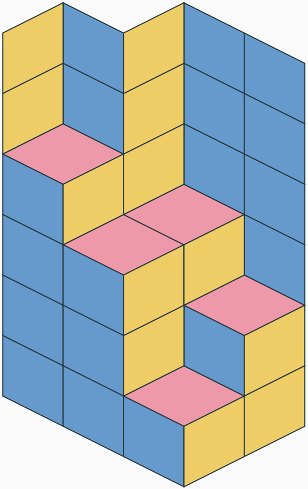
Configurations de perles discrétisées



Configurations de perles discrétisées



Configurations de perles discrétisées



Pavages de demi-hexagones tronqués (Petrov 2015)

noyau explicite calculé par théorème d'Eynard–Mehta

Noyau déterminantal de Gorin-Rahman réécrit

$$K_\lambda((x_1, t_1), (x_2, t_2) =$$

$$-\oint_{\gamma_z} \oint_{\gamma_y} \frac{F_\lambda(z)}{F_\lambda(w)} \frac{\Gamma(w - x_1 + 1)}{\Gamma(z - x_2 + 1)} \frac{(1 - t_2)^{z - x_2}(1 - t_1)^{-w + x_1 - 1}}{z - w} \frac{dzdw}{(2i\pi)^2}$$

où

- $F_\lambda(u) = \frac{\prod_{i=0}^{m} \Gamma(u - a_i + 1)}{\prod_{i=1}^{m} \Gamma(u - b_i + 1)}$
- γ_z à l'intérieur (extérieur) de γ_w si $t_1 \geq t_2$ $(t_1 < t_2)$
- γ_w contient tous les entiers de $[a_0, x_1 - 1]$
- γ_z contient tous les entiers de $[x_2, a_m - 1]$

Analyse asymptotique autour d'un point $(x_0 N, t_0)$

Remplacer $a_i \rightsquigarrow N a_i$

$$K_{\lambda^N}((Nx_0 + x_1, t_0 + \frac{t_1}{N}, Nx_0 + x_2, t_0 + \frac{t_2}{N})) \sim \oint \oint \exp(N(S(Z; x_0, t_0) - S(W; x_0, t_0)))(\cdots) dZ dW$$

$$S(Z; x, t) = g(Z) - Z \log(1-t) - \sum_{i=0}^{m} g(x - a_i + Z) + \sum_{i=1}^{m} g(x - b_i + Z)$$

avec $g(z) = z \log z$

Analyse asymptotique autour d'un point $(x_0 N, t_0)$

Remplacer $a_i \rightsquigarrow N a_i$

$$K_{\lambda^N}((Nx_0 + x_1, t_0 + \frac{t_1}{N}, Nx_0 + x_2, t_0 + \frac{t_2}{N})) \sim \oint \oint \exp(N(S(Z; x_0, t_0) - S(W; x_0, t_0)))(\cdots) dZdW$$

$$S(Z; x, t) = g(Z) - Z \log(1-t) - \sum_{i=0}^{m} g(x - a_i + Z) + \sum_{i=1}^{m} g(x - b_i + Z)$$

avec $g(z) = z \log z$

Equation :

$$U \prod_{i=1}^{n} (x_0 - b_i + U) = (1 - t_0) \prod_{i=0}^{m} (x - a_i + U) \qquad (\heartsuit)$$

donne les points critiques de S

Plus d'information données par le noyau

- **densité de perles** α : noyau avec $x_1 = x_2 = 0$, $t_1 = t_2 = 0$
- **courbe arctique** séparant phases liquide/gelée
  quand les deux racines complexes de ($\heartsuit$) fusionnent
  =courbe algébrique
- limite locale des perles : processus ponctuel sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$
  processus du collier de perles de param α, β (B. 2009)
  - ergodique
  - chaque marginale sur $\mathbb{R}$: déterminantal, noyau sinus
  - limite de pavages, GUE corner process
- définition limite locale pour les tableaux de Young