Jeux de tuiles robustes et problème du domino

Nathalie Aubrun, Manon Blanc, Olivier Bournez

Séminaire Flajolet

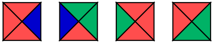
Jeudi 4 avril 2024

Tuiles de Wang et pavages du plan

Tuiles de Wang et pavages (1961)

On considère des pavages :

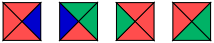
- du plan euclidien,
- par des tuiles carrées avec une couleur par côté,
- avec un nombre fini de couleurs et de tuiles,



Tuiles de Wang et pavages (1961)

On considère des pavages :

- du plan euclidien,
- par des tuiles carrées avec une couleur par côté,
- avec un nombre fini de couleurs et de tuiles,

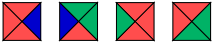


- on place les tuiles sommet contre sommet,
- deux tuiles adjacentes portent la même couleur sur leur côté commun.

Tuiles de Wang et pavages (1961)

On considère des pavages :

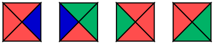
- du plan euclidien,
- par des tuiles carrées avec une couleur par côté,
- avec un nombre fini de couleurs et de tuiles,



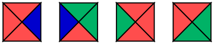
- on place les tuiles sommet contre sommet,
- deux tuiles adjacentes portent la même couleur sur leur côté commun.

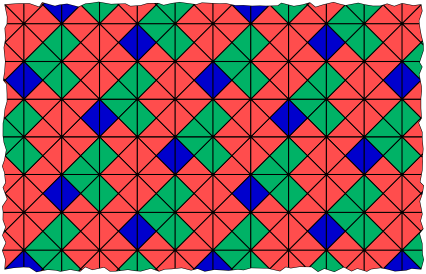
Interdiction de tourner les tuiles !

Exemple 1



Exemple 1





Le problème du Domino

Problème du Domino

Il s'agit d'un problème de **décision**.

Problème du Domino

Etant donné un jeu de tuiles de Wang τ, existe-t-il un pavage valide ?

$$DP := \{\langle\tau\rangle \mid \tau \text{ pave le plan}\}$$

où $\langle\tau\rangle$ est un codage du jeu de tuiles τ.

Problème du Domino

Il s'agit d'un problème de **décision**.

Problème du Domino

Etant donné un jeu de tuiles de Wang τ, existe-t-il un pavage valide ?

$$DP := \{\langle\tau\rangle \mid \tau \text{ pave le plan}\}$$

où $\langle\tau\rangle$ est un codage du jeu de tuiles τ.

Proposition

Si τ est un jeu de tuiles, sont équivalents :

1. τ pave le plan ;
2. τ pave un quart de plan ;
3. τ pave un carré $n \times n$ pour tout n.

Problème du Domino

Il s'agit d'un problème de **décision**.

Problème du Domino

Etant donné un jeu de tuiles de Wang τ, existe-t-il un pavage valide ?

$$DP := \{\langle\tau\rangle \mid \tau \text{ pave le plan}\}$$

où $\langle\tau\rangle$ est un codage du jeu de tuiles τ.

Proposition

Si τ est un jeu de tuiles, sont équivalents :

1. τ pave le plan ;
2. τ pave un quart de plan ;
3. τ pave un carré $n \times n$ pour tout n.

brute-force + 3 $\Rightarrow$ DP est co-RE

Problème du Domino

Il s'agit d'un problème de **décision**.

Problème du Domino

Etant donné un jeu de tuiles de Wang τ, existe-t-il un pavage valide ?

$$DP := \{\langle\tau\rangle \mid \tau \text{ pave le plan}\}$$

où $\langle\tau\rangle$ est un codage du jeu de tuiles τ.

Proposition

Si τ est un jeu de tuiles, sont équivalents :

1. τ pave le plan ;
2. τ pave un quart de plan ;
3. τ pave un carré $n \times n$ pour tout n.

brute-force + 3 $\Rightarrow$ DP est co-RE

Il suffit de montrer que DP est RE pour avoir DP décidable.

Conjecture de Wang (I)

Conjecture (Wang)

Un jeu de tuiles qui pave le plan pave également de façon périodique.

Conjecture de Wang (I)

Conjecture (Wang)

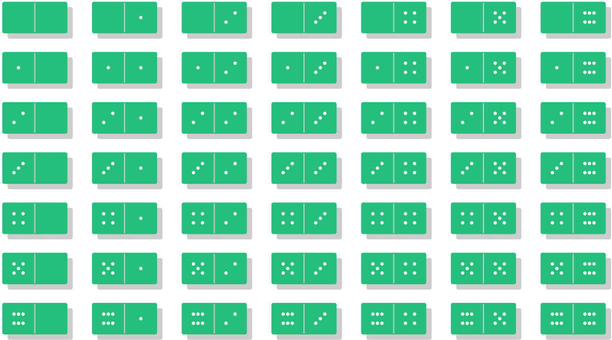
Un jeu de tuiles qui pave le plan pave également de façon périodique.

Pourquoi est-ce raisonnable ?

- c'est vrai en dimension 1 ;
- si on peut paver avec une direction de périodicité, alors on peut paver avec deux directions.

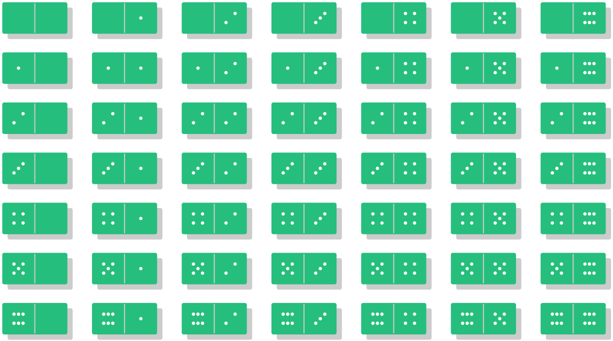
En dimension 1 (I)

Ensemble fini de dominos :



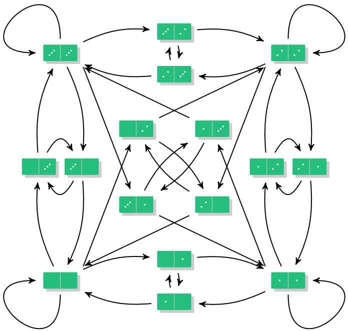
En dimension 1 (I)

Ensemble fini de dominos :

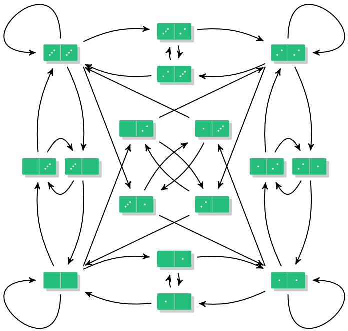


Question : Peut-on paver une ligne infinie ?

En dimension 1 (II)

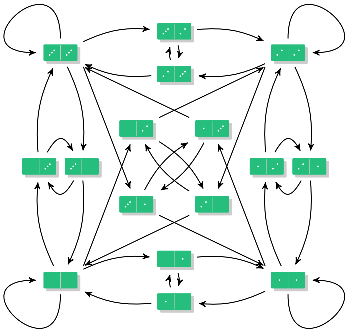


En dimension 1 (II)



Pavage $\Leftrightarrow$ chemin infini $\Leftrightarrow$ cycle $\Leftrightarrow$ pavage périodique

En dimension 1 (II)



Pavage $\Leftrightarrow$ chemin infini $\Leftrightarrow$ cycle $\Leftrightarrow$ pavage périodique

Proposition

- Tout jeu de domino qui pave le fait de façon périodique.
- Le problème du Domino est décidable en dimension 1.

D'une à deux directions de périodicité

$\overrightarrow{u} \in \mathbb{Z}^2$ non nul est **une période** pour $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ si

$$x(\overrightarrow{t}) = x(\overrightarrow{t} + \overrightarrow{u}) \text{ pour tout } \overrightarrow{t} \in \mathbb{Z}^2$$

D'une à deux directions de périodicité

$\overrightarrow{u} \in \mathbb{Z}^2$ non nul est **une période** pour $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ si

$$x(\overrightarrow{t}) = x(\overrightarrow{t} + \overrightarrow{u}) \text{ pour tout } \overrightarrow{t} \in \mathbb{Z}^2$$

- $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ est **faiblement périodique** si $\exists\ \overrightarrow{u}$ période pour x.
- $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ est **fortement périodique** si $\exists\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ périodes non colinéaires pour x.

D'une à deux directions de périodicité

$\overrightarrow{u} \in \mathbb{Z}^2$ non nul est **une période** pour $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ si

$$x(\overrightarrow{t}) = x(\overrightarrow{t} + \overrightarrow{u}) \text{ pour tout } \overrightarrow{t} \in \mathbb{Z}^2$$

- $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ est **faiblement périodique** si $\exists\ \overrightarrow{u}$ période pour x.
- $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ est **fortement périodique** si $\exists\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ périodes non colinéaires pour x.

Pour un **jeu de tuiles**, c'est pareil !

D'une à deux directions de périodicité

$\vec{u} \in \mathbb{Z}^2$ non nul est **une période** pour $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ si

$$x(\vec{t}) = x(\vec{t} + \vec{u}) \text{ pour tout } \vec{t} \in \mathbb{Z}^2$$

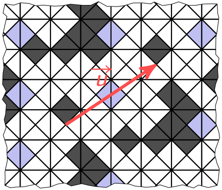
- $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ est **faiblement périodique** si $\exists\ \vec{u}$ période pour x.
- $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ est **fortement périodique** si $\exists\ \vec{u}, \vec{v}$ périodes non colinéaires pour x.

Pour un **jeu de tuiles**, c'est pareil !

Proposition

Si τ admet un pavage faiblement périodique, alors il admet un pavage fortement périodique.

Idée de la preuve :



D'une à deux directions de périodicité

$\vec{u} \in \mathbb{Z}^2$ non nul est **une période** pour $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ si

$$x(\vec{t}) = x(\vec{t} + \vec{u}) \text{ pour tout } \vec{t} \in \mathbb{Z}^2$$

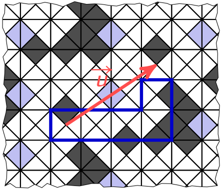
- $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ est **faiblement périodique** si $\exists\ \vec{u}$ période pour x.
- $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ est **fortement périodique** si $\exists\ \vec{u}, \vec{v}$ périodes non colinéaires pour x.

Pour un **jeu de tuiles**, c'est pareil !

Proposition

Si τ admet un pavage faiblement périodique, alors il admet un pavage fortement périodique.

Idée de la preuve :



D'une à deux directions de périodicité

$\overrightarrow{u} \in \mathbb{Z}^2$ non nul est **une période** pour $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ si

$$x(\overrightarrow{t}) = x(\overrightarrow{t} + \overrightarrow{u}) \text{ pour tout } \overrightarrow{t} \in \mathbb{Z}^2$$

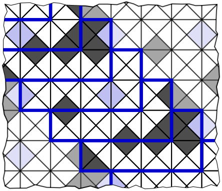
- $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ est **faiblement périodique** si $\exists\ \overrightarrow{u}$ période pour x.
- $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ est **fortement périodique** si $\exists\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ périodes non colinéaires pour x.

Pour un **jeu de tuiles**, c'est pareil !

Proposition

Si τ admet un pavage faiblement périodique, alors il admet un pavage fortement périodique.

Idée de la preuve :



D'une à deux directions de périodicité

$\overrightarrow{u} \in \mathbb{Z}^2$ non nul est **une période** pour $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ si

$$x(\overrightarrow{t}) = x(\overrightarrow{t} + \overrightarrow{u}) \text{ pour tout } \overrightarrow{t} \in \mathbb{Z}^2$$

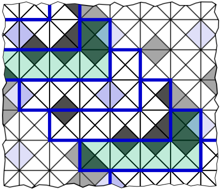
- $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ est **faiblement périodique** si $\exists\ \overrightarrow{u}$ période pour x.
- $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ est **fortement périodique** si $\exists\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ périodes non colinéaires pour x.

Pour un **jeu de tuiles**, c'est pareil !

Proposition

Si τ admet un pavage faiblement périodique, alors il admet un pavage fortement périodique.

Idée de la preuve :



D'une à deux directions de périodicité

$\vec{u} \in \mathbb{Z}^2$ non nul est **une période** pour $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ si

$$x(\vec{t}) = x(\vec{t} + \vec{u}) \text{ pour tout } \vec{t} \in \mathbb{Z}^2$$

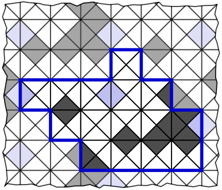
- $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ est **faiblement périodique** si $\exists\ \vec{u}$ période pour x.
- $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ est **fortement périodique** si $\exists\ \vec{u}, \vec{v}$ périodes non colinéaires pour x.

Pour un **jeu de tuiles**, c'est pareil !

Proposition

Si τ admet un pavage faiblement périodique, alors il admet un pavage fortement périodique.

Idée de la preuve :



D'une à deux directions de périodicité

$\overrightarrow{u} \in \mathbb{Z}^2$ non nul est **une période** pour $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ si

$$x(\overrightarrow{t}) = x(\overrightarrow{t} + \overrightarrow{u}) \text{ pour tout } \overrightarrow{t} \in \mathbb{Z}^2$$

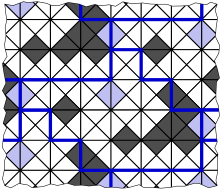
- $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ est **faiblement périodique** si $\exists\ \overrightarrow{u}$ période pour x.
- $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ est **fortement périodique** si $\exists\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ périodes non colinéaires pour x.

Pour un **jeu de tuiles**, c'est pareil !

Proposition

Si τ admet un pavage faiblement périodique, alors il admet un pavage fortement périodique.

Idée de la preuve :



D'une à deux directions de périodicité

$\overrightarrow{u} \in \mathbb{Z}^2$ non nul est **une période** pour $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ si

$$x(\overrightarrow{t}) = x(\overrightarrow{t} + \overrightarrow{u}) \text{ pour tout } \overrightarrow{t} \in \mathbb{Z}^2$$

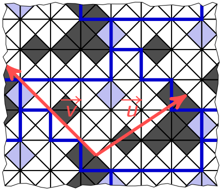
- $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ est **faiblement périodique** si $\exists\ \overrightarrow{u}$ période pour x.
- $x \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ est **fortement périodique** si $\exists\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ périodes non colinéaires pour x.

Pour un **jeu de tuiles**, c'est pareil !

Proposition

Si τ admet un pavage faiblement périodique, alors il admet un pavage fortement périodique.

Idée de la preuve :



Conjecture de Wang (II)

Conjecture (Wang)

Un jeu de tuiles qui pave le plan pave également de façon périodique.

Conjecture de Wang (II)

Conjecture (Wang)

Un jeu de tuiles qui pave le plan pave également de façon périodique.

Pour résoudre DP, il suffit de chercher un pavage périodique !

Conjecture de Wang (II)

Conjecture (Wang)

Un jeu de tuiles qui pave le plan pave également de façon périodique.

Pour résoudre DP, il suffit de chercher un pavage périodique !

Théorème

Si la conjecture de Wang est vraie, alors DP est décidable.

Conjecture de Wang (II)

Conjecture (Wang)

Un jeu de tuiles qui pave le plan pave également de façon périodique.

Pour résoudre DP, il suffit de chercher un pavage périodique !

Théorème

Si la conjecture de Wang est vraie, alors DP est décidable.

Semi-algorithme 1 :

1. renvoie un entier n tel que le carré $[-n; n]^2$ ne peut pas être pavé, s'il existe
2. boucle sinon

Semi-algorithme 2 :

1. renvoie un motif qui pave le plan de manière périodique s'il existe
2. boucle sinon

Conjecture de Wang (II)

Conjecture (Wang)

Un jeu de tuiles qui pave le plan pave également de façon périodique.

Pour résoudre DP, il suffit de chercher un pavage périodique !

Théorème

Si la conjecture de Wang est vraie, alors DP est décidable.

Semi-algorithme 1 :

1. renvoie un entier n tel que le carré $[-n; n]^2$ ne peut pas être pavé, s'il existe
2. boucle sinon

Semi-algorithme 2 :

1. renvoie un motif qui pave le plan de manière périodique s'il existe
2. boucle sinon

(Si la conjecture de Wang est vraie, alors DP est RE)

Conjecture de Wang et apériodicité

Conjecture de Wang et apériodicité

Conjecture de Wang (1961)

Si un jeu de tuiles pave le plan, alors il peut le faire de manière périodique.

Conjecture de Wang et apériodicité

Conjecture de Wang (1961)

Si un jeu de tuiles pave le plan, alors il peut le faire de manière périodique.

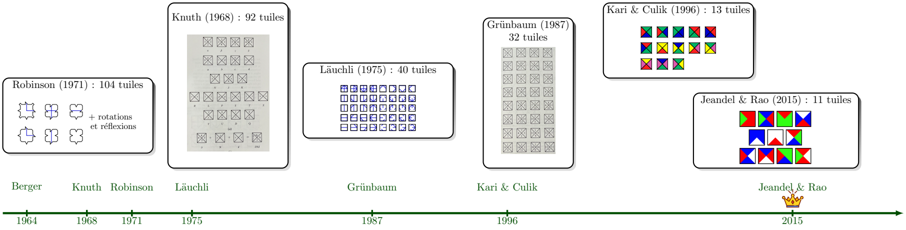
Un jeu de tuiles est **apériodique** s'il pave le plan mais jamais de façon périodique.

Conjecture de Wang et apériodicité

Conjecture de Wang (1961)

Si un jeu de tuiles pave le plan, alors il peut le faire de manière périodique.

Un jeu de tuiles est **apériodique** s'il pave le plan mais jamais de façon périodique.

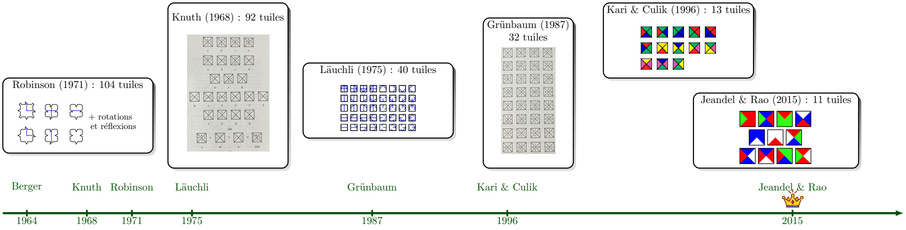


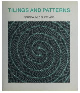
Conjecture de Wang et apériodicité

Conjecture de Wang (1961)

Si un jeu de tuiles pave le plan, alors il peut le faire de manière périodique.

Un jeu de tuiles est **apériodique** s'il pave le plan mais jamais de façon périodique.





Tilings and patterns, Grünbaum & Shephard

Quasi-périodicité

Pavages quasi-périodiques

Un pavage x est **quasi-périodique** si tout motif fini qui apparaît dans x apparaît dans tout carré suffisamment grand de x :

$$\forall p \sqsubset x, \exists n \in \mathbb{N}, \forall M \in \tau^{[-n;n]^2}, M \sqsubset x \Rightarrow p \sqsubset M.$$

Pavages quasi-périodiques

Un pavage x est **quasi-périodique** si tout motif fini qui apparaît dans x apparaît dans tout carré suffisamment grand de x :

$$\forall p \sqsubset x, \exists n \in \mathbb{N}, \forall M \in \tau^{[-n;n]^2}, M \sqsubset x \Rightarrow p \sqsubset M.$$

x périodique $\Rightarrow$ x quasi-périodique

Proposition (Durand 1999)

Si τ pave le plan, alors il existe x un pavage par τ quasi-périodique.

Pavages quasi-périodiques

Un pavage x est **quasi-périodique** si tout motif fini qui apparaît dans x apparaît dans tout carré suffisamment grand de x :

$$\forall p \sqsubset x, \exists n \in \mathbb{N}, \forall M \in \tau^{[-n;n]^2}, M \sqsubset x \Rightarrow p \sqsubset M.$$

x périodique $\Rightarrow$ x quasi-périodique

Proposition (Durand 1999)

Si τ pave le plan, alors il existe x un pavage par τ quasi-périodique.

MAIS...

Pavages quasi-périodiques

Un pavage x est **quasi-périodique** si tout motif fini qui apparaît dans x apparaît dans tout carré suffisamment grand de x :

$$\forall p \sqsubset x, \exists n \in \mathbb{N}, \forall M \in \tau^{[-n;n]^2}, M \sqsubset x \Rightarrow p \sqsubset M.$$

x périodique $\Rightarrow$ x quasi-périodique

Proposition (Durand 1999)

Si τ pave le plan, alors il existe x un pavage par τ quasi-périodique.

MAIS...

Si x est un pavage quasi-périodique, sa **fonction de quasi-périodicité** est $f_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q. $f_x(n)$ est la taille minimale de motif de x dans lequel tout motif de x de taille n apparaît.

Pavages quasi-périodiques

Un pavage x est **quasi-périodique** si tout motif fini qui apparaît dans x apparaît dans tout carré suffisamment grand de x :

$$\forall p \sqsubset x, \exists n \in \mathbb{N}, \forall M \in \tau^{[-n;n]^2}, M \sqsubset x \Rightarrow p \sqsubset M.$$

x périodique $\Rightarrow$ x quasi-périodique

Proposition (Durand 1999)

Si τ pave le plan, alors il existe x un pavage par τ quasi-périodique.

MAIS...

Si x est un pavage quasi-périodique, sa **fonction de quasi-périodicité** est $f_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q. $f_x(n)$ est la taille minimale de motif de x dans lequel tout motif de x de taille n apparaît.

Théorème (Ballier & Jeandel 2010)

Il existe τ t.q. tout pavage quasi-périodique par τ a une fonction de quasi-périodicité non calculable.

Indécidabilité du problème du Domino

Indécidabilité du problème du Domino

Théorème (Berger 1964)

Le problème du Domino est indécidable.

Indécidabilité du problème du Domino

Théorème (Berger 1964)

Le problème du Domino est indécidable.

Plusieurs preuves (voir le chapitre de Jeandel & Vanier) :

- encoder des **calculs** de machines de Turing/fonctions rationnelles affines par morceaux. . .
- rendre ces calculs **denses** dans les pavages via de l'aperiodicité/théorème de point fixe/substitution. . .

Indécidabilité du problème du Domino

Théorème (Berger 1964)

Le problème du Domino est indécidable.

Plusieurs preuves (voir le chapitre de Jeandel & Vanier) :

- encoder des **calculs** de machines de Turing/fonctions rationnelles affines par morceaux. . .
- rendre ces calculs **denses** dans les pavages via de l'aperiodicité/théorème de point fixe/substitution. . .

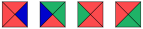
Exemples de réductions :

- $\mathcal{M}$ machine de Turing $\Rightarrow$ jeu de tuiles $\tau_{\mathcal{M}}$ t.q. τ pave ssi $\mathcal{M}$ ne s'arrête pas
- f rationnelle affine par morceaux $\Rightarrow$ jeu de tuiles τ_f t.q. τ pave ssi f a un point immortel

Vers les jeux de tuiles robustes

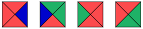
Jeux de tuiles et transducteurs

Soit τ un jeu de tuiles

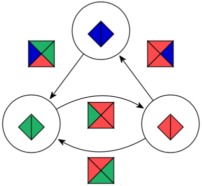


Jeux de tuiles et transducteurs

Soit τ un jeu de tuiles

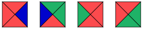


On peut écrire τ comme un transducteur $\mathcal{T}$

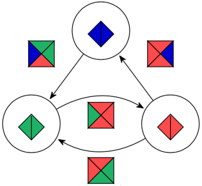


Jeux de tuiles et transducteurs

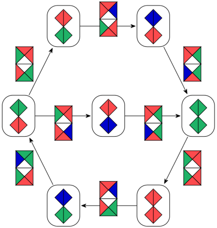
Soit τ un jeu de tuiles



On peut écrire τ comme un transducteur $\mathcal{T}$

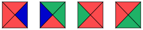


et on peut composer ce transducteur avec lui même pour obtenir $\mathcal{T}^2$,

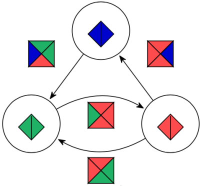


Jeux de tuiles et transducteurs

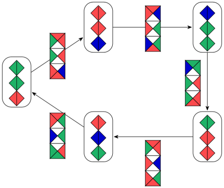
Soit τ un jeu de tuiles



On peut écrire τ comme un transducteur $\mathcal{T}$



et on peut composer ce transducteur avec lui même pour obtenir $\mathcal{T}^2$, $\mathcal{T}^3$, etc



Périodicité à tous les étages

τ jeu de tuiles $\Rightarrow$ suite de transducteurs $(\mathcal{T}^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

chemin infini (cycle) dans $\mathcal{T}^n$ $\Leftrightarrow$ pavage d'une bande $\mathbb{Z} \times [1; n]$

Proposition

Un jeu de tuiles τ pave le plan ssi $\mathcal{T}^n$ contient un cycle pour tout n.

Peut-on décrire ces cycles ?

- si τ admet un pavage périodique, alors $\exists p$ t.q. $\mathcal{T}^p$ contient un cycle avec mêmes couleurs en haut et en bas ;

Périodicité à tous les étages

τ jeu de tuiles $\Rightarrow$ suite de transducteurs $(\mathcal{T}^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

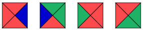
chemin infini (cycle) dans $\mathcal{T}^n \Leftrightarrow$ pavage d'une bande $\mathbb{Z} \times [1; n]$

Proposition

Un jeu de tuiles τ pave le plan ssi $\mathcal{T}^n$ contient un cycle pour tout n.

Peut-on décrire ces cycles ?

- si τ admet un pavage périodique, alors $\exists p$ t.q. $\mathcal{T}^p$ contient un cycle avec mêmes couleurs en haut et en bas ;



$\mathcal{T}^{15}$ contient un cycle avec la suite RRRRV en haut et en bas

Périodicité à tous les étages

τ jeu de tuiles $\Rightarrow$ suite de transducteurs $(\mathcal{T}^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

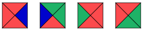
chemin infini (cycle) dans $\mathcal{T}^n$ $\Leftrightarrow$ pavage d'une bande $\mathbb{Z} \times [1; n]$

Proposition

Un jeu de tuiles τ pave le plan ssi $\mathcal{T}^n$ contient un cycle pour tout n.

Peut-on décrire ces cycles ?

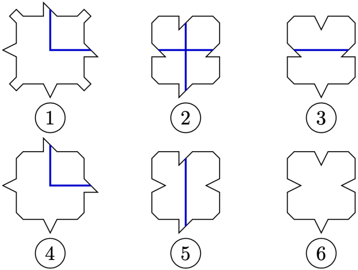
- si τ admet un pavage périodique, alors $\exists p$ t.q. $\mathcal{T}^p$ contient un cycle avec mêmes couleurs en haut et en bas ;

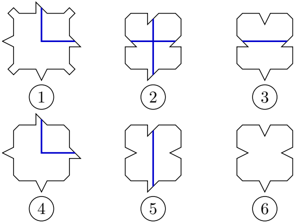
  $\mathcal{T}^{15}$ contient un cycle avec la suite RRRRV en haut et en bas
- si τ est apériodique : ???

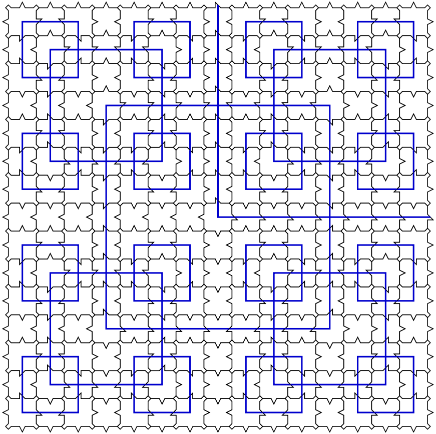
Jeu de tuiles de Robinson

Jeu de tuiles de Robinson (I)

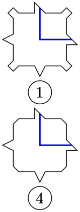


Jeu de tuiles de Robinson (I)

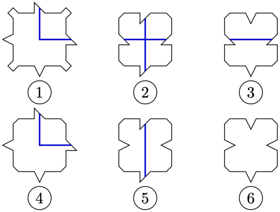




Jeu de tuiles de Robinson (II)



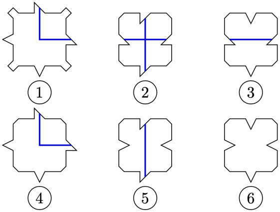
Jeu de tuiles de Robinson (II)

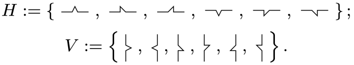


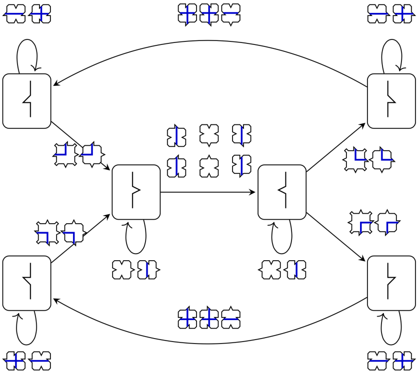
$$H := \{\ ,\ ,\ ,\ ,\ ,\ \};$$

$$V := \left\{\ ,\ ,\ ,\ ,\ ,\ \right\}.$$

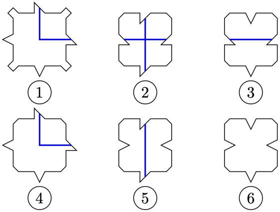
Jeu de tuiles de Robinson (II)

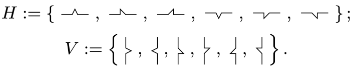


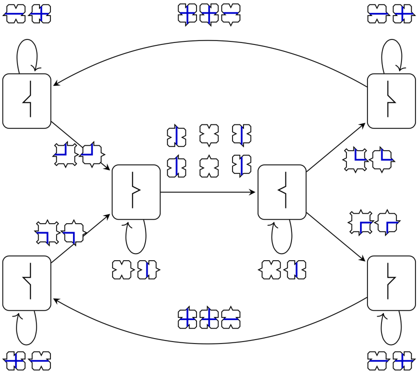




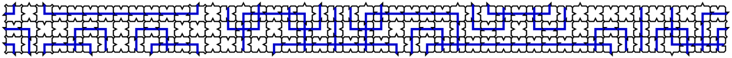
Jeu de tuiles de Robinson (II)



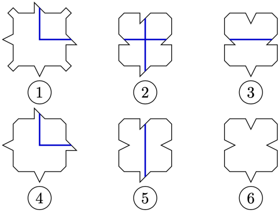


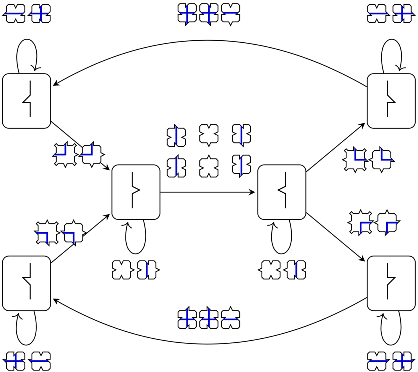


Quid de $\mathcal{T}^2$, $\mathcal{T}^3$, etc ?



Jeu de tuiles de Robinson (II)

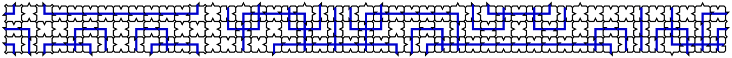




$H := \{ \; , \; , \; , \; , \; , \; \};$

$V := \left\{ \; , \; , \; , \; , \; , \; \right\}.$

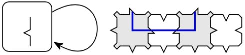
Quid de $\mathcal{T}^2$, $\mathcal{T}^3$, etc ?



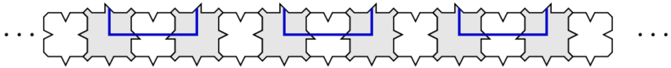
$\Rightarrow$ au moins 46 sommets dans $\mathcal{T}^3$...

Jeu de tuiles de Robinson (III)

Le transducteur $\mathcal{T}$ contient ce cycle

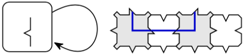


qui correspond à ce pavage périodique de la ligne infinie

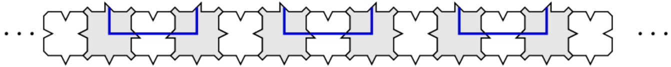


Jeu de tuiles de Robinson (III)

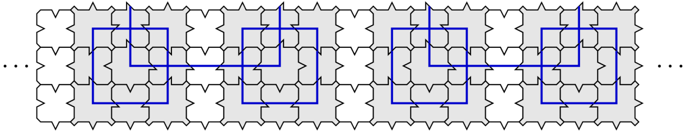
Le transducteur $\mathcal{T}$ contient ce cycle



qui correspond à ce pavage périodique de la ligne infinie

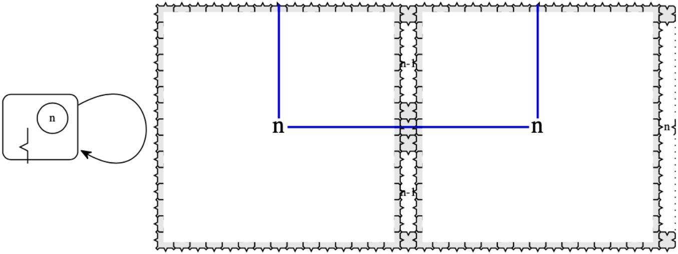


Le transducteur $\mathcal{T}^3$ contient un cycle semblable, qui correspond à ce pavage périodique de la bande infinie de hauteur 3



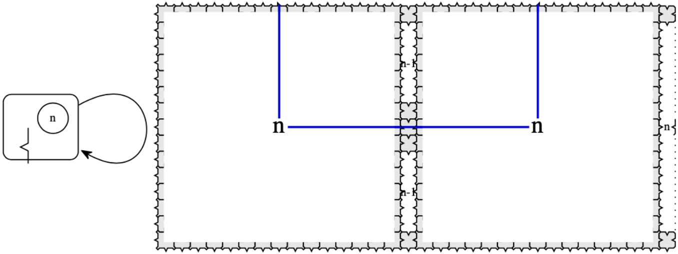
Jeu de tuiles de Robinson (IV)

Pour tout n, le transducteur $\mathcal{T}^{2^n-1}$ contient un cycle



Jeu de tuiles de Robinson (IV)

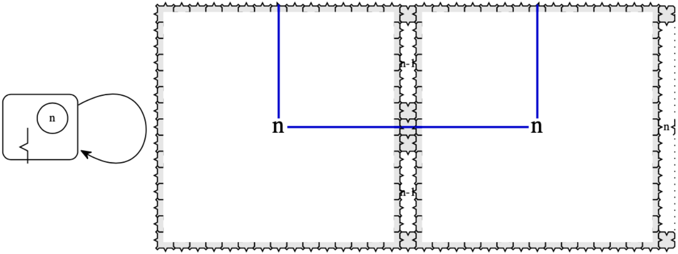
Pour tout n, le transducteur $\mathcal{T}^{2^n-1}$ contient un cycle



$\Rightarrow$ le jeu de tuiles de Robinson admet un pavage

Jeu de tuiles de Robinson (IV)

Pour tout n, le transducteur $\mathcal{T}^{2^n-1}$ contient un cycle



$\Rightarrow$ le jeu de tuiles de Robinson admet un pavage

Important : On montre **par récurrence** que chaque transducteur $\mathcal{T}^{2^n-1}$ contient un cycle *«du même type»*.

Machines de Turing et pavages

Machines de Turing dans des pavages

Pour toute machine de Turing $\mathcal{M}$, on peut construire un jeu de tuiles $\tau_{\mathcal{M}}$ tel que

$$\mathcal{M} \text{ s'arrête sur } \epsilon \text{ ssi } \tau_{\mathcal{M}} \text{ ne pave pas}$$

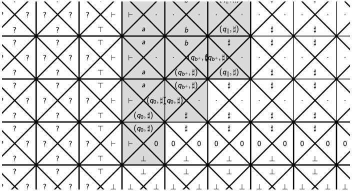
Machines de Turing dans des pavages

Pour toute machine de Turing $\mathcal{M}$, on peut construire un jeu de tuiles $\tau_{\mathcal{M}}$ tel que

$$\mathcal{M} \text{ s'arrête sur } \epsilon \text{ ssi } \tau_{\mathcal{M}} \text{ ne pave pas}$$

Idée de la construction :

- encoder les règles de la machines dans un jeu de tuiles



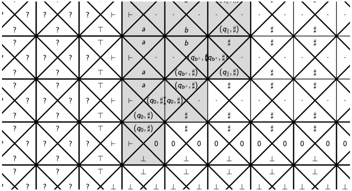
Machines de Turing dans des pavages

Pour toute machine de Turing $\mathcal{M}$, on peut construire un jeu de tuiles $\tau_{\mathcal{M}}$ tel que

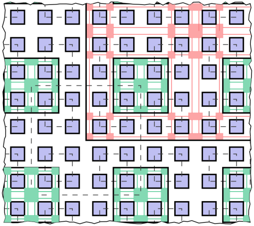
$$\mathcal{M} \text{ s'arrête sur } \epsilon \text{ ssi } \tau_{\mathcal{M}} \text{ ne pave pas}$$

Idée de la construction :

- encoder les règles de la machines dans un jeu de tuiles



- le combiner avec le jeu de tuiles de Robinson



Machines de Turing robustes

Une machine de Turing $\mathcal{M}$ est **robuste** si pour toute entrée w, soit $\mathcal{M}$ s'arrête, soit il existe une preuve qu'elle ne s'arrête pas.

Machines de Turing robustes

Une machine de Turing $\mathcal{M}$ est **robuste** si pour toute entrée w, soit $\mathcal{M}$ s'arrête, soit il existe une preuve qu'elle ne s'arrête pas.

Théorème (A., Blanc, Bournez)

Le problème de l'arrêt est décidable pour les machines de Turing robustes.

Démonstration : Pour $\mathcal{M}$ une machine de Turing robuste, on lance deux semi-algorithmes en parallèle :

1. on simule $\mathcal{M}$ sur w : si $\mathcal{M}$ accepte w, alors on s'arrête et accepte ; si M rejette w, on s'arrête et rejette.
2. on cherche une preuve π que $\mathcal{M}$ ne s'arrête pas sur w. Si on trouve π, alors on s'arrête et rejette.

Machines de Turing robustes

Une machine de Turing $\mathcal{M}$ est **robuste** si pour toute entrée w, soit $\mathcal{M}$ s'arrête, soit il existe une preuve qu'elle ne s'arrête pas.

Théorème (A., Blanc, Bournez)

Le problème de l'arrêt est décidable pour les machines de Turing robustes.

Démonstration : Pour $\mathcal{M}$ une machine de Turing robuste, on lance deux semi-algorithmes en parallèle :

1. on simule $\mathcal{M}$ sur w : si $\mathcal{M}$ accepte w, alors on s'arrête et accepte ; si M rejette w, on s'arrête et rejette.
2. on cherche une preuve π que $\mathcal{M}$ ne s'arrête pas sur w. Si on trouve π, alors on s'arrête et rejette.

Proposition

Il existe des machines de Turing non robustes.

Jeux de tuiles robustes

Jeux de tuiles robustes (I)

Un jeu de tuiles τ est **inductif** s'il existe

- $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante avec $g(1) = 1$
- une suite de transducteurs $(\widetilde{\mathcal{T}}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ t.q. $\widetilde{\mathcal{T}}^{(n)} \sqsubseteq \mathcal{T}^{g(n)}$
- un motif de composition $F = F(\widetilde{\mathcal{T}}^{(1)}, \widetilde{\mathcal{T}}^{(n-k)}, \dots, \widetilde{\mathcal{T}}^{(n)})$

tels qu'**il existe une preuve** que

- pour tout n, $F(\widetilde{\mathcal{T}}^{(1)}, \widetilde{\mathcal{T}}^{(n-k)}, \dots, \widetilde{\mathcal{T}}^{(n)}) \sqsubseteq \widetilde{\mathcal{T}}^{(n+1)}$
- pour tout n, $\widetilde{\mathcal{T}}^{(n)}$ contient un cycle.

Jeux de tuiles robustes (I)

Un jeu de tuiles τ est **inductif** s'il existe

- $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante avec $g(1) = 1$
- une suite de transducteurs $(\widetilde{\mathcal{T}}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ t.q. $\widetilde{\mathcal{T}}^{(n)} \sqsubseteq \mathcal{T}^{g(n)}$
- un motif de composition $F = F(\widetilde{\mathcal{T}}^{(1)}, \widetilde{\mathcal{T}}^{(n-k)}, \ldots, \widetilde{\mathcal{T}}^{(n)})$

tels qu'**il existe une preuve** que

- pour tout n, $F(\widetilde{\mathcal{T}}^{(1)}, \widetilde{\mathcal{T}}^{(n-k)}, \ldots, \widetilde{\mathcal{T}}^{(n)}) \sqsubseteq \widetilde{\mathcal{T}}^{(n+1)}$
- pour tout n, $\widetilde{\mathcal{T}}^{(n)}$ contient un cycle.

« **il existe une preuve** » est crucial ! (sans, on écrit que τ pave le plan)

Jeux de tuiles robustes (I)

Un jeu de tuiles τ est **inductif** s'il existe

- $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante avec $g(1) = 1$
- une suite de transducteurs $(\widetilde{\mathcal{T}}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ t.q. $\widetilde{\mathcal{T}}^{(n)} \sqsubseteq \mathcal{T}^{g(n)}$
- un motif de composition $F = F(\widetilde{\mathcal{T}}^{(1)}, \widetilde{\mathcal{T}}^{(n-k)}, \dots, \widetilde{\mathcal{T}}^{(n)})$

tels qu'**il existe une preuve** que

- pour tout n, $F(\widetilde{\mathcal{T}}^{(1)}, \widetilde{\mathcal{T}}^{(n-k)}, \dots, \widetilde{\mathcal{T}}^{(n)}) \sqsubseteq \widetilde{\mathcal{T}}^{(n+1)}$
- pour tout n, $\widetilde{\mathcal{T}}^{(n)}$ contient un cycle.

« **il existe une preuve** » est crucial ! (sans, on écrit que τ pave le plan)

Un jeu de tuiles τ est **robuste** si

- ou bien τ ne pave pas le plan ;
- ou bien τ est inductif.

Jeux de tuiles robustes (II)

Exemples de jeux de tuiles robustes :

- jeux de tuiles périodiques ($g(n) = n \cdot p$ où p est la hauteur d'un motif périodique);

Jeux de tuiles robustes (II)

Exemples de jeux de tuiles robustes :

- jeux de tuiles périodiques ($g(n) = n \cdot p$ où p est la hauteur d'un motif périodique);
- jeu de tuiles de Robinson ($g(n) = 2^n - 1$) ;

Jeux de tuiles robustes (II)

Exemples de jeux de tuiles robustes :

- jeux de tuiles périodiques ($g(n) = n \cdot p$ où p est la hauteur d'un motif périodique);
- jeu de tuiles de Robinson ($g(n) = 2^n - 1$) ;
- jeu de tuiles de Jeandel-Rao *(pourvu que l'on adapte le modèle de transducteurs)* ($g(n) = F_n$ nombre de Fibonacci) ;

Jeux de tuiles robustes (II)

Exemples de jeux de tuiles robustes :

- jeux de tuiles périodiques ($g(n) = n \cdot p$ où p est la hauteur d'un motif périodique);
- jeu de tuiles de Robinson ($g(n) = 2^n - 1$) ;
- jeu de tuiles de Jeandel-Rao *(pourvu que l'on adapte le modèle de transducteurs)* ($g(n) = F_n$ nombre de Fibonacci) ;
- jeu de tuiles $\tau_{\mathcal{M}}$ avec $\mathcal{M}$ machine de Turing robuste.

Jeux de tuiles robustes (II)

Exemples de jeux de tuiles robustes :

- jeux de tuiles périodiques ($g(n) = n \cdot p$ où p est la hauteur d'un motif périodique);
- jeu de tuiles de Robinson ($g(n) = 2^n - 1$) ;
- jeu de tuiles de Jeandel-Rao *(pourvu que l'on adapte le modèle de transducteurs)* ($g(n) = F_n$ nombre de Fibonacci) ;
- jeu de tuiles $\tau_{\mathcal{M}}$ avec $\mathcal{M}$ machine de Turing robuste.

Proposition

Il existe des jeux de tuiles non robustes.

Idée : machine de Turing $\mathcal{M}$ non robuste $\Rightarrow \tau_{\mathcal{M}}$ non robuste

Jeux de tuiles robustes (III)

Théorème (A., Blanc, Bournez)

Le problème du Domino est décidable pour les jeux de tuiles robustes.

Démonstration : Pour τ un jeu de tuiles robuste, deux semi-algorithmes en parallèle :

1. chercher n t.q. τ ne pave pas $[-n; n]^2$ et renvoyer n s'il existe ;
2. chercher une preuve π du fait que τ est inductif et renvoyer π si elle existe.

Robustesse $\Rightarrow$ s'arrête toujours !

Conclusion

- jeux de tuiles comme transducteurs
- robustesse : point de vue nouveau sur le problème du domino
- pour la suite : caractériser l'apériodicité ?

Conclusion

- jeux de tuiles comme transducteurs
- robustesse : point de vue nouveau sur le problème du domino
- pour la suite : caractériser l'apériodicité ?

Merci :-)